UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

1 4 NOV

REMARQUES SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ABSTRAITES

PAR

GASTON MANDATA N'GUÉRÉKATA
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE STATISTIQUE
FACULTÉ DES ARTS ET DES SCIENCES

THÈSE PRÉSENTÉE À LA FACULTÉ DES ÉTUDES SUPÉRIEURES
EN VUE DE L'OBTENTION DU GRADE DE
PHILOSOPHIAE DOCTOR (Ph. D.)

Juin 1980

Faculté des Études Supérieures
Soutenance le
80/11/18
Université de Montréal

02061

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

FACULTÉ DES ÉTUDES SUPÉRIEURES

RAPPORT FINAL DU JURY

DÉSIGNÉ POUR L'EXAMEN D'UNE THÈSE DE DOCTORAT

Nom du candidat Gaston N'Guérékata Code permanent [illegible]20055303

Grade postulé Ph.D. Option mathématiques

Titre de la thèse Remarques sur [illegible] équations différentielles [illegible]

Directeur de recherche M. Samuel Zaidman.

DÉCISION DU JURY PRISE À L'UNANIMITÉ DES VOIX

Après la soutenance tenue le [illegible]

les membres du jury ont décidé:

- [x] d'accepter la thèse
- [ ] de refuser la thèse (la candidature prend fin)

Signatures [illegible]
président-rapporteur

[illegible]
examinateur externe

[illegible]
membre

[illegible]
membre

[illegible]
doyen de la F.E.S.

[illegible]
date

En cas de dissidence du jury, chaque membre est prié d'indiquer sa décision et de signer

Président-rapporteur

Examinateur externe

Membre

Membre

date

FES-Gr 19 FACULTÉ/DÉPARTEMENT/ÉCOLE

UNIVERSITE DE MONTREAL

FACULTE DES ETUDES SUPERIEURES

REÇU
NOV 13 1980
MATHÉMATIQUES
U. DE M.

AVIS DE SOUTENANCE

M. Gaston Nguerekata

candidat au Ph.D. (mathématiques), soutiendra sa thèse

intitulée Remarques sur les équations différentielles abstraites.

le 18 novembre 1980 à 15H00

dans la salle 375 du Pavillon Délia Tétreault

Les membres du jury sont :

M.M. Serge Dubuc président-rapporteur

Jérôme A. Goldstein * examinateur externe

Samuel Zaidman

Shuichi Takahashi

La soutenance aura lieu en présence du doyen de la Faculté des études supérieures ou de son représentant.

Les professeurs et étudiants intéressés au domaine de la recherche du candidat sont invités à assister à cette soutenance.

. A CETTE SOUTENANCE, LE DOYEN SERA REPRESENTE PAR M. GUY PAQUETTE, DU DEPARTEMENT DE PHYSIQUE.

80. 11. 11
date

Doyen de la F.E.S.

. M. Jerome A. Goldstein ne peut y assister et le Doyen de la F.E.S. a nommé M. Jacques Gauvin, professeur au département de mathématiques appliquées de l'Ecole Polytechnique pour le remplacer.

TABLE DES MATIÈRES

SOMMAIRE

La présente thèse comprend trois parties:

1° Nous démontrons les résultats suivants au premier chapitre, dans un espace localement convexe complet E :

- si le problème de Cauchy correspondant à l'équation $x'(t) = Ax(t)$ est bien posé sur $[0,T]$, alors il l'est aussi sur $[0,\infty)$.

- si A est un opérateur fermé, pour chaque solution $x(t)$ de $x'(t) = Ax(t)$ de classe $C^1[0,T]$ et $C^2(0,T]$, on peut construire une solution affaiblie sur $[0,T]$ soit $y(t) = (A-\lambda I)x(t)$, λ un scalaire donné.

2° Le chapitre II est consacré à l'étude des fonctions presque-périodiques dans un espace localement convexe; les principaux résultats sont les suivants:

- si $f(t)$ est presque-périodique dans un espace localement convexe complet E , alors $\{f(t) ; t \in \mathbb{R}\}$ est totalement borné dans E .

- soit E un espace de Fréchet; alors la fonction $f : \mathbb{R} \to E$ est presque-périodique ssi de toute suite $(s_n')_{n=1}^{\infty}$, on peut extraire une sous-suite $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ telle que $(f(t+s_n))_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément en $t \in \mathbb{R}$.

- si $f(t)$ est presque-périodique dans l'espace de Fréchet E et si $F(t) = \int_0^t f(\sigma)d\sigma$ est à trajectoire relativement compacte, alors $F(t)$ est presque-périodique.

3° Nous discutons de la presque-périodicité de solutions d'équations différentielles dans le dernier chapitre:

- soit E un espace de Fréchet, A un opérateur compact tel que $\{A^k ; k=1,2,\ldots\}$ est équi-continu, et pour toute semi-norme p, il existe une semi-norme q telle que $p(e^{tA}x) \leq q(x)$ pour tout $x \in E$ et tout $t \in \mathbb{R}$; alors toute solution à trajectoire relativement compacte de $x'(t) = Ax(t)$ est presque-périodique.

- soit E un espace de Fréchet; si A est générateur infinitésimal d'un groupe d'opérateurs équi-continu de classe C_0, $\{T(t) ; t \in \mathbb{R}\}$ tel que $T(t)x : \mathbb{R} \to E$ est presque-périodique pour chaque $x \in E$ et si $f(t)$ est presque-périodique, alors toute solution à trajectoire relativement compacte de $x'(t) = Ax(t) + f(t)$ est presque-périodique.

- si $A = A_+ + A_-$ est un opérateur de domaine $D(A)$ dense dans l'espace de Hilbert H avec A_+ un opérateur symétrique et A_- antisymétrique tels que pour tout $x \in D(A)$, $\mathrm{Re}(A_+x , A_-x) \geq -c\|A_+x\|^2$ où $c \leq 1$, alors toute solution à trajectoire relativement compacte de $x'(t) = Ax(t)$ est presque-périodique.

INTRODUCTION

Soit $E = E(\tau)$ un espace localement convexe complet dont la topologie τ est induite par une famille Q de semi-normes continues. Nous démontrons au chapitre I (Théorèmes 1 et 2) des résultats sur le problème de Cauchy abstrait relatif à l'équation différentielle $x'(t) = Ax(t)$, sur l'intervalle $[0,T]$. Le cas banachique dont nous sommes partis est de S.G. KREIN [12]. Ensuite, en suivant toujours S.G. KREIN, nous parlons de solution affaiblie de cette équation sur $[0,T]$ en démontrant (Théorème 3) qu'on peut obtenir une solution affaiblie à partir d'une solution ordinaire vérifiant certaines hypothèses de régularité.

Le concept de fonction presque-périodique a été introduit dans la littérature par E. BOHL et E. ESCLANGON au début du siècle et largement étudié par S. BOCHNER [4], [5] et aussi par bien d'autres mathématiciens. Sur ce sujet on peut par exemple consulter les ouvrages suivants: [1], [2], [3], [6], [8], [9], [15], ...

Une définition de fonctions presque-périodiques sur un groupe et à valeurs dans un espace vectoriel topologique fut déjà introduite dès 1935 par S. BOCHNER et J. von NEUMANN dans leur important mémoire [5]; nous considérons quant à nous celle suggérée dans [6] qui nous a permis ici de généraliser sans trop de peine de nombreux résultats connus dans les espaces de Banach, notamment le critère de Bochner qui nous est d'une réelle importance dans l'étude de solutions presque-périodiques d'équations différentielles, étude à laquelle est dévolu le dernier chapitre de la thèse.

Le premier théorème de ce chapitre démontre la presque-périodicité des solutions de l'équation $x'(t) = Ax(t)$ dans un espace de Fréchet. Ce théorème est inspiré d'un résultat de A.I. PEROV (voir par exemple théorème 1.1 [21]) mais n'en est pas une généralisation directe étant donné que nous devons supposer en plus l'équi-continuité de l'ensemble des puissances de l'opérateur A . Toutefois la technique utilisée reste la même.

Le deuxième théorème généralise un résultat dû au Professeur S. ZAIDMAN (voir Théorème 3.2 dans [21]), au cas d'espace de Fréchet. On démontre la presque-périodicité des solutions à trajectoires relativement compactes de l'équation $x'(t) = Ax(t) + f(t)$ lorsque $f(t)$ est une fonction presque-périodique dans l'espace de Fréchet E . Nous caractérisons ensuite les solutions presque-périodiques de l'équation homogène associée, au Théorème 3.

Enfin le Théorème 4 donne un résultat nouveau sur la presque-périodicité des solutions de l'équation $x'(t) = Ax(t)$ dans un espace de Hilbert.

Mais avant tout, à titre de préliminaires, (chapitre 0), nous rappelons quelques propriétés élémentaires des espaces vectoriels topologiques, et discutons très brièvement de la dérivation et de l'intégration (au sens de Riemann) de fonctions vectorielles.

CHAPITRE 0

PRÉLIMINAIRES

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\Phi(\Phi = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Une topologie τ sur E est dite compatible avec la structure algébrique de E si les opérations d'espace vectoriel sont continues par rapport à τ . Un espace vectoriel topologique (e.v.t.) sur Φ , $E = E(\tau)$, est un espace vectoriel sur Φ avec une topologie compatible τ .

On peut montrer (voir par exemple [10], [17], [18]):

PROPOSITION. Pour chaque $a \in E$, la translation $f : E \to E$, $f(x) = a+x$, est un homéomorphisme. En particulier si U est une base de voisinages de l'origine, $a+U$ est une base de voisinages du point a .

Il en résulte que la structure topologique de E est entièrement déterminée par une base de voisinages de l'origine. Aussi, sauf mention contraire, nous appelerons "voisinages", tout court, les voisinages de l'origine. Si U est un voisinage, $a+U$ est un voisinage de a et $x \in a+U$ ssi $x-a \in U$.

PROPOSITION. Pour chaque $\lambda \in \Phi$, $\lambda \neq 0$, l'application $f : E \to E$ $f(x) = \lambda x$, est un homéomorphisme. En particulier si U est un voisinage, λU aussi est un voisinage ($\lambda \neq 0$) .

Un sous-ensemble X d'un espace vectoriel E est dit convexe si pour tout $x \in X$ et tout $y \in X$, $\lambda x+\mu y \in X$ si $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ et $\lambda+\mu = 1$; il est dit symétrique (ou équilibré, ou disqué) si pour tout $x \in X$ et $|\lambda| \leq 1$, $\lambda x \in X$; s'il est à la fois symétrique et convexe, on dit qu'il est absolument convexe. Si pour chaque $x \in X$, il existe $\lambda > 0$ tel que $x \in \mu X$ pour tout μ tel que $|\mu| \geq \lambda$, on dit que X est absorbant.

PROPOSITION. Si $\mathcal{U}$ est une base de voisinages, alors pour chaque $U \in \mathcal{U}$,

(i) U est absorbant

(ii) il existe $V \in \mathcal{U}$ tel que $V+V \subset U$

(iii) il existe un voisinage symétrique $W \subset U$.

En pratique les e.v.t. les plus importants et les plus utiles sont ceux qui sont localement convexes, c'est-à-dire les e.v.t. qui possèdent une base de voisinages (de l'origine) formée d'ensembles convexes. On appellera de tels e.v.t. des espaces localement convexes (e.ℓ.c.). Nous supposerons ici que tous les e.v.t. sont séparés.

<u>THÉORÈME</u>. Un e.ℓ.c. E possède une base de voisinages $\mathcal{U}$ telle que

(i) si $U \in \mathcal{U}$, $V \in \mathcal{U}$ il existe $W \in \mathcal{U}$, $W \subset U \cap V$

(ii) si $U \in \mathcal{U}$, $\lambda \neq 0$ alors $\lambda U \in \mathcal{U}$

(iii) chaque $U \in \mathcal{U}$ est absolument convexe et absorbant.

Inversement si $\mathcal{U}$ est une famille (non vide) d'ensembles de l'espace vectoriel E avec les propriétés (i)-(iii), il existe une topologie qui fait de E un espace localement convexe avec $\mathcal{U}$ comme base de voisinages.

<u>SEMI-NORMES</u>

Une fonction $p : E \to [0,\infty)$ vérifiant les propriétés

(i) $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$

(ii) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$

pour tout $x \in E$, $y \in E$, $\lambda \in \Phi$, est dite <u>semi-norme</u> sur E .

Il résulte de (ii) que $p(\theta) = 0$ où θ est l'élément nul de E .

Si p est une semi-norme sur E , on peut lui faire correspondre un ensemble absolument convexe et absorbant X , et on dit que p est la <u>jauge</u> de X .

PROPOSITION.

(i) Dans un e.ℓ.c. E , une semi-norme est continue ssi elle est continue à l'origine

(ii) Si p est la jauge d'un ensemble absolument convexe et absorbant X , p est continue ssi U est un voisinage.

THÉORÈME. *Pour tout ensemble* Q *de semi-normes sur un espace vectoriel* E *, il existe une plus faible topologie sur* E *compatible avec la structure algébrique de* E *et dans laquelle chaque semi-norme de* Q *est continue.*

E *est alors un espace localement convexe et une base de voisinages ouverts est formée par les ensembles:*

$$U = U(\varepsilon \; ; \; p_i \; , \; 1 \leq i \leq n) = \{x \in E \; ; \; p_i(x) < \varepsilon \; , \; 1 \leq i \leq n\}$$

on dit que $E = E(\tau)$ *est* <u>*métrisable*</u> *si* τ *est compatible avec une métrique* d *; si* E *est un* e.ℓ.c. *tel que* τ *est induite par une métrique invariante et complète* d *, alors il est dit un* <u>*espace de Fréchet*</u>*. Dans un espace de Fréchet,* τ *peut être engendrée par une famille dénombrable de semi-normes continues.*

CONVERGENCE

Soit E un ensemble quelconque; toute application d'un ensemble dirigé Λ dans E est dite <u>suite généralisée</u> et se note $(x_\mu)_{\mu \in \Lambda}$.

On dit que la suite généralisée $(x_\mu)_{\mu \in \Lambda}$ converge vers un point x de l'espace vectoriel topologique E si pour tout voisinage (de l'origine) U, il existe $\mu_o \in \Lambda$ tel que $x_\mu \in x+U$ si $\mu > \mu_o$. On dit que $(x_\mu)_{\mu \in \Lambda}$ est une suite généralisée de Cauchy si pour tout voisinage U il existe $\mu_o \in \Lambda$ tel que $x_{\mu'}-x_{\mu''} \in U$ pour tout $\mu' > \mu_o$, $\mu'' > \mu_o$. Si toute suite généralisée de Cauchy converge vers un élément de E, on dit que E est complet.

Si E est un e.ℓ.c. dont la topologie est définie par une famille de semi-normes continues Q, alors pour toute suite généralisée $(x_\mu)_{\mu \in \Lambda}$ les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) $\lim\limits_{\mu} x_\mu = x$

(ii) $\lim\limits_{\mu} p(x_\mu - x) = 0$ pour chaque $p \in Q$.

A partir de maintenant et dans le reste de la thèse on supposera $E = E(\tau)$ un e.ℓ.c. complet dont la topologie τ est définie par une famille de semi-normes continues Q.

Un sous-ensemble D est dit dense dans E si chaque $x \in E$ est la limite d'une suite généralisée d'éléments de D.

OPÉRATEURS LINÉAIRES

Soit A un opérateur linéaire de domaine $D(A)$ dense dans E et à valeurs dans E ; A est dit fermé si son graphe $G(A)$ est fermé dans

$E \times E$; c'est-à-dire que tout élément de $\overline{G(A)}$ (l'adhérence topologique de $G(A)$) appartient à $G(A)$.

Nous pouvons démontrer:

THÉORÈME. *Soit* E *un e.l.c. complet et* $A : D(A) \to E$ *un opérateur linéaire; alors* A *est fermé ssi pour toute suite généralisée* $(x_\mu)_{\mu \in \Lambda}$ *dans* $D(A)$ *telle que* $\lim_\mu x_\mu = x$ *et* $\lim_\mu Ax_\mu = y$ *, on a* $x \in D(A)$ *et* $Ax = y$.

DÉMONSTRATION. La condition est évidemment suffisante; montrons qu'elle est nécessaire; pour cela, supposons que A est fermé c'est-à-dire $\overline{G(A)} = G(A)$ et soit $(x_\mu)_{\mu \in \Lambda}$ telle que $\lim_\mu x_\mu = x$ et $\lim_\mu Ax_\mu = y$; il s'agit de montrer que $(x,y) \in \overline{G(A)}$.

Soit $U \times V$ un voisinage arbitraire dans $E \times E$; comme $\lim_\mu x_\mu = x$, il existe $\mu_1 \in \Lambda$ tel que $x_\mu \in x+U$ si $\mu > \mu_1$; de même il exsite $\mu_2 \in \Lambda$ tel que $Ax_\mu \in y+V$ si $\mu > \mu_2$ car $\lim_\mu Ax_\mu = y$. Puisque Λ est un ensemble dirigé, on peut choisir μ_o tel que $\mu_o > \mu_1$ et $\mu_o > \mu_2$; alors si $\mu > \mu_o$, $(x_\mu, Ax_\mu) \in (x,y)+U \times V$. Ce qu'il fallait démontrer.

Nous obtenons le corollaire suivant très facile à démontrer:

COROLLAIRE. Si A est un opérateur linéaire continu sur E , alors A est fermé.

Dans un e.ℓ.c. E , un ensemble X est dit <u>borné</u> s'il est "absorbé" par chaque voisinage; c'est-à-dire, pour chaque voisinage U , il existe $\lambda > 0$ tel que $X \subset \lambda U$. X est dit <u>totalement borné</u> si pour chaque voisinage U , il correspond un ensemble fini Y tel que $X \subset Y+V$.

L'adhérence d'un ensemble totalement borné est aussi totalement borné ([17] Lemme 3, page 49). Il est évident qu'un ensemble totalement borné est borné ([17] Proposition 5, page 49). Un ensemble <u>relativement compact</u> est un ensemble dont l'adhérence est compacte dans E .

Soient E et F deux e.ℓ.c. L'opérateur linéaire $A : E \to F$ est dit <u>compact</u> s'il existe un voisinage U de E et un ensemble compact K de F tels que $A(U) \subset K$. Il est évident que tout opérateur compact est continu; en effet si V est un voisinage quelconque dans F , $A(\lambda U) \subset \lambda K \subset V$ pour tout $\lambda > 0$ suffisamment petit.

<u>*PROPOSITION*</u>. Soit E un espace de Fréchet et A un opérateur linéaire continu sur E ; alors chaque A^k , $k = 2,3,4,\ldots$ est aussi continu sur E .

<u>*DÉMONSTRATION*</u>. Il suffit de montrer que A^2 est continu et d'utiliser le raisonnement par induction sur k ; soit $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite arbitraire d'éléments de E qui converge vers θ ; il suffit de montrer que $(A^2x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge vers θ ([18] Théorème 1.32, page 23). Pour cela, posons $y_n = Ax_n$, $n = 1,2,\ldots$; la suite $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ converge vers θ car A est continu; pour la même raison, la suite $(Ay_n)_{n=1}^{\infty}$ converge vers θ .

Ce qu'il fallait démontrer.

Une famille $(A_\mu)_{\mu \in \Gamma}$ d'opérateurs continus est dite équi-continue sur E si pour toute semi-norme p il existe une semi-norme q telle que

$$p(A_\mu x) \leq q(x)$$

pour tout $x \in E$ et tout $\mu \in \Gamma$.

FONCTIONS À VALEURS DANS UN ESPACE LOCALEMENT CONVEXE

DÉFINITION. La fonction $f : I \to E$ où I est un intervale de l'axe réel est dite continue en $t_o \in I$ si

> pour tout voisinage U , il existe $\delta > 0$ tel que $f(t) \in f(t_o)+U$ pour tout $t \in I$ tel que $|t-t_o| < \delta$.

Cette définition peut être formulée de la façon équivalente suivante:

> pour tout $\varepsilon > 0$ et toute semi-norme p , il existe $\delta > 0$ tel que $p[f(t)-f(t_o)] < \varepsilon$ pour tout $t \in I$ tel que $|t-t_o| < \delta$.

f est dite uniformément continue sur I si

> pour tout voisinage U , il existe $\delta > 0$ tel que $f(t')-f(t'') \in U$ pour tout $t' \in I$, $t'' \in I$ tels que $|t'-t''| < \delta$.

Il est évident que la continuité uniforme sur I implique la continuité en chaque point de I . On peut aussi montrer que si f est continue sur l'intervale fermé et borné I , $f(I)$ est compact dans E .

DÉRIVATION

DÉFINITION. La fonction $f : I \to E$ est dite dérivable au point $t_o \in I$ si

$$\lim_{t \to t_o} \frac{f(t)-f(t_o)}{t-t_o}$$

existe dans E . Dans l'affirmative, on note $f'(t_o)$ cette limite (qui est unique) et on l'appelle la dérivée de la fonction f au point t_o .

Nous pouvons aussi dire de façon équivalente que f est dérivable au point $t_o \in I$ s'il existe $x \in E$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$ et toute semi-norme p il existe $\delta > 0$ tel que

$$p\left[\frac{f(t)-f(t_o)}{t-t_o} - x\right] < \varepsilon$$

si $|t-t_o| < \delta$, $t \in I$; on a alors $x = f'(t_o)$.

PROPOSITION. Si f est dérivable au point t_o , alors f est continue au point t_o .

DÉMONSTRATION. Posons $x = f'(t_o)$; soit p une semi-norme arbitraire et choisissons $\delta \doteq \delta(1,p,t_o)$ tel que

$$p\left[\frac{f(t)-f(t_o)}{t-t_o} - x\right] < 1$$

si $|t-t_o| < \delta$. Comme on a:

$$\begin{aligned} p[f(t)-f(t_o)] &\leq p[f(t)-f(t_o)-(t-t_o)x] + p[(t-t_o)x] \\ &= |t-t_o|\left\{p\left[\frac{f(t)-f(t_o)}{t-t_o} - x\right] + p(x)\right\} \\ &\leq |t-t_o|[1 + p(x)] , \end{aligned}$$

alors $p[f(t)-f(t_o)] < \varepsilon$ si $|t-t_o| < \min(\delta , \frac{\varepsilon}{1+p(x)})$.

Nous pouvons alors démontrer:

<u>THÉORÈME</u>. *Soit* A *un opérateur linéaire fermé; supposons que la fonction* $x(t) : (a,b) \to D(A)$ *est dérivable sur* (a,b) *; si* $Ax(t)$ *est aussi dérivable sur* (a,b) *alors on a:*

$$\frac{d}{dt} Ax(t) = A \frac{dx}{dt} , \quad t \in (a,b) .$$

<u>DÉMONSTRATION</u>.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Ax(t) &= \lim_{s \to 0} \frac{Ax(t+s) - Ax(t)}{s} \\ &= \lim_{s \to 0} A \frac{x(t+s) - x(t)}{s} \\ &= A \cdot \lim_{s \to 0} \frac{x(t+s) - x(t)}{s} \quad \text{car } A \text{ est fermé} \\ &= A \frac{dx}{dt} . \end{aligned}$$

À JEAN N'GUÉRÉKATA

mon père

INTÉGRATION

Soit la fonction $f : [a,b] \to E$ continue et considérons $\pi : a = t_o < t_1 < \ldots < t_n = b$ une partition de $[a,b]$ de pas $|\pi| = \max_{1\le i\le n} (t_i - t_{i-1})$. Soit la somme de Riemann de la fonction f relative à π :

$$\sum(\pi,f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$$

où $t_{i-1} \le \xi_i \le t_i$, $i = 1,\ldots,n$.

DÉFINITION. On dit que f est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a,b]$ si

$$\lim_{|\pi| \to 0} \sum(\pi,f)$$

existe dans E . Dans l'affirmative on note cette limite (qui est unique) par $\int_a^b f(t)dt$ et qu'on appelle l'intégrale (de Riemann) de la fonction f sur $[a,b]$.

Nous allons démontrer le théorème suivant en considérant E^* le dual de E :

THÉORÈME. *Si* $x'(t)$ *existe et est continue sur* $\mathbb{R}$, *alors*

$$x(t)-x(0) = \int_0^t x'(\sigma)d\sigma \ .$$

DÉMONSTRATION. Soit $x^* \in E^*$ arbitraire; étant donnée la continuité de x^* on a par le précédent Théorème:

$$\frac{d}{dt}(x^*x)(t) = x^*\frac{dx}{dt} ;$$

donc

$$\int_0^t (x^*x')(\sigma)d\sigma = \int_0^t \frac{d}{d\sigma}(x^*x)(\sigma)d\sigma$$

$$= (x^*x)(t) - (x^*x)(0)$$

$$= x^*[x(t) - x(0)] .$$

Par ailleurs

$$x^*\int_0^t x'(\sigma)d\sigma = \int_0^t (x^*x')(\sigma)d\sigma ,$$

donc on a

$$x^*[\int_0^t x'(\sigma)d\sigma - x(t) - x(0)] = 0 ;$$

et puisque x^* est arbitraire, on déduit, en vertu d'un corollaire du théorème de Hahn-Banach ([19] Corollaire 1, page 108), que

$$x(t) - x(0) = \int_0^t x'(\sigma)d\sigma .$$

COROLLAIRE. Si $x'(t) \equiv \theta$ sur $\mathbb{R}$, alors $x(t) \equiv$ constante sur $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION. (évidente).

Enfin nous démontrons le:

THÉORÈME. *Si* A *est un opérateur fermé et* $x(t)$ *une fonction continue sur* $\mathbb{R}$ *et à valeurs dans* $D(A)$ *telle que* $\int_0^t Ax(\sigma)d\sigma$ *existe, alors*

$$\int_0^t Ax(\sigma)d\sigma = A\int_0^t x(\sigma)d\sigma \ .$$

DÉMONSTRATION. Soit $\pi : 0 = t_o < t_1 < \ldots < t_n = t$ une partition de $[0,t]$

$$\int_0^t Ax(\sigma)d\sigma = \lim_{|\pi| \to 0} \sum_{i=1}^{n} Ax(\xi_i)\ (t_i - t_{i-1})$$

où $t_{i-1} \leq \xi_i < t_i$, $i = 1,\ldots,n$

$$= A \lim_{|\pi| \to 0} \sum_{i=1}^{n} x(\xi_i)\ (t_i - t_{i-1})$$

$$= A \int_0^t x(\sigma)d\sigma \ .$$

CHAPITRE I

PROBLÈME DE CAUCHY

Considérant dans un espace localement convexe complet E , l'équation différentielle

$$\text{①} \qquad x'(t) = Ax(t) \ , \ (x'(t) = \frac{dx}{dt})$$

où A est un opérateur linéaire de domaine $D(A)$ dense dans E , nous généralisons dans ce chapitre des résultats simples présentés par S.G. KREIN [12] pour le cas Banachique.

Les définitions de "problème de Cauchy bien posé" (voir par exemple [7]), et de "solution affaiblie" sont des extensions naturelles respectives de celles que l'on trouve dans [12]).

1. *PROBLÈME DE CAUCHY BIEN POSÉ*

DÉFINITION 1. On appelle solution de l'équation ① sur l'intervalle $[0,T]$, toute fonction $x(t)$ telle que:

(i) $\forall\ t \in [0,T]$, $x(t) \in D(A)$

(ii) $\forall\ t \in [0,T]$, $x'(t)$ existe et vérifie l'équation ①.

DÉFINITION 2. Le problème de Cauchy

$$② \qquad \begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ \\ x(0) = x_0 \in D(A) \end{cases}$$

est dit bien posé (et on écrit: PCBP, pour alléger l'écriture) sur $[0,T]$ si:

(i) pour tout $x_0 \in D(A)$, il existe une solution unique $x(t)$ sur $[0,T]$ telle que $x(0) = x_0$.

(ii) si la suite généralisée de solutions $(x_\mu(\cdot))_{\mu\in\Lambda}$ est telle que $x_\mu(0) \to \theta$, alors $x_\mu(t) \to \theta$ pour chaque $t \in [0,T]$.

<u>*THÉORÈME 1*</u>. *Si* PCBP *sur* $[0,T]$ *alors on a aussi* PCBP *sur* $[0,T_1]$ *pour tout* $T_1 > 0$.

<u>*DÉMONSTRATION*</u>. Il est clair que si $T_1 \leq T$, il n'y a rien à démontrer. On supposera donc $T_1 > T$. En particulier il suffit de démontrer le théorème pour $T_1 = 2T$.

Soit $x_o \in D(A)$; puisque PCBP sur $[0,T]$, il existe une solution unique $x(t)$ sur $[0,T]$ avec $x(0) = x_o$.

Soit $y(t)$ tel que

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = Ay(t) \qquad 0 \leq t \leq T \\ \\ y(0) = x(T) \in D(A) \end{cases}$$

$y(t)$ est donc uniquement déterminé comme solution; soit la fonction

$$v(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq T \\ y(t-T) & \text{si} \quad T \leq t \leq 2T \, . \end{cases}$$

Alors on a:

a] $v(t)$ est continue sur $[0,2T]$. Il suffit de vérifier la continuité en $t = T$; on a:

$$\lim_{t \downarrow T} v(t) = \lim_{t \downarrow T} y(t-T) = y(0) = x(T) = \lim_{t \uparrow T} x(t) = \lim_{t \uparrow T} v(t)$$

donc $\lim\limits_{t \to T} v(t)$ existe et est égale à $x(T)$;

b] $v'(t)$ existe sur tout l'intervalle $[0,2T]$ et y vérifie (1);
il suffit de le démontrer pour $t = T$:

$$\begin{aligned} \lim_{h \downarrow 0} \frac{v(T+h) - v(T)}{h} &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{y(h) - y(0)}{h} \\ &= y'(0) \\ &= Ay(0) \\ &= Av(T) \\ &= Ax(T) \\ &= \lim_{h \uparrow 0} \frac{x(T+h) - x(T)}{h} \\ &= \lim_{h \uparrow 0} \frac{v(T+h) - v(T)}{h} \end{aligned}$$

i.e. $v'(T) = Av(T)$;

c) Unicité de la solution de (2) sur $[0,2T]$. Pour la démontrer, il suffit de vérifier que toute solution avec donnée initiale nulle est nulle sur tout l'intervale $[0,2T]$; soit $V(t)$ une solution telle que $V(0) = \theta$; alors $V(t)$ s'annule sur $[0,T]$ puisque par hypothèse du théorème, PCBP sur $[0,T]$; on considère maintenant la fonction $Z(t)$ définie par

$$Z(t) = V(T+t) \ , \ 0 \le t \le T \ .$$

Alors il en ressort que

$$Z'(t) = AZ(t) \ , \ 0 \le t \le T$$

$$Z(0) = V(T) = \theta \ .$$

Donc pour la même raison que précédemment, $Z(t) \equiv \theta$ sur $[0,T]$, c'est-à-dire $V(t) \equiv \theta$ sur $[T,2T]$.

d) Les solutions de (2) sur $[0,2T]$ dépendent continûment des données initiales. Cette propriété découle de façon triviale de l'unicité de la solution sur $[0,2T]$.

Le théorème suivant est une conséquence immédiate du précédent; nous en devons la démonstration au Professeur S. ZAIDMAN.

<u>THÉORÈME 2</u>. *Si* PCBP *sur* $[0,T]$, *alors* PCBP *sur* $[0,\infty)$.

DÉMONSTRATION. Le théorème 1 nous permet de dire que PCBP sur $[0,2^nT]$, pour tout $n = 1,2,3,\ldots$ Et par conséquent si $x_o \in D(A)$ est donné, on peut trouver une suite de fonctions $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ avec la propriété que pour chaque n ,

$$\begin{cases} x_n'(t) = Ax_n(t) \ , \ 0 \le t \le 2^nT \\ x_n(0) = x_o \ . \end{cases}$$

Remarquons que l'unicité de la solution sur chaque intervale $[0,2^nT]$ impose l'égalité:

$$x_n(t) = x_{n+1}(t) \ , \ 0 \le t \le 2^nT \ , \ \forall n = 1,2,\ldots$$

Soit la fonction $x(t)$ définie comme suit:

$$x(t) \equiv x_n(t) \quad \text{si} \quad 0 \le t \le 2^nT \ .$$

Alors $x(t)$ est bien définie sur $[0,\infty)$ et à valeurs dans $D(A)$; de plus, $x(t)$ est solution unique de 2 sur $[0,\infty)$. La dépendance continue par rapport aux données initiales découle de l'unicité.

2. *SOLUTION AFFAIBLIE*

En suivant S.G. KREIN [12], nous définissons ainsi qu'il suit (DÉFINITION 3) les solutions affaiblies de l'équation 1; ensuite nous démontrons que si une solution de classe $C^1[0,T]$ et $C^2(0,T]$ existe, alors on peut trouver une solution affaiblie de 1.

<u>*DÉFINITION 3*</u>. La fonction $x(t)$ est dite solution affaiblie de l'équation ① sur l'intervale $[0,T]$ si:

(i) $\forall\ t \in [0,T]$, $x(t) \in D(A)$

(ii) $x(t)$ est continue sur $[0,T]$.

(iii) $x'(t)$ existe et est continue sur $(0,T]$; de plus $x'(t)$ vérifie ① sur $(0,T]$.

Nous démontrons alors le

<u>*THÉORÈME 3*</u>. *Si* A *est un opérateur fermé, et si* $v(t)$ *est une solution de* ①, *continûment différentiable sur* $[0,T]$ *et deux fois continûment différentiable sur* $(0,T]$ *alors la fonction*

$$x(t) = (A-\lambda I)v(t) \ , \ \lambda \in \Phi$$

est une solution affaiblie de ① *sur* $[0,T]$

<u>*DÉMONSTRATION*</u>. Soit $\lambda \in \Phi$ $(\Phi = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R})$ et considérons $v(t)$ une solution vérifiant les hypothèses du théorème; nous montrons que la fonction

$$x(t) = (A-\lambda I)v(t) \ , \ 0 \le t \le T$$

où I est l'opérateur identité sur E est une solution affaiblie de ① sur $[0,T]$ on a:

$$\begin{aligned} x(t) &= Av(t) - \lambda v(t) \\ &= v'(t) - \ v(t) \ , \ 0 \le t \le T \ ; \end{aligned}$$

donc $x(t)$ est continue sur $[0,T]$.

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d^2v}{dt^2} - \lambda \frac{dv}{dt} , \quad 0 < t \le T .$$

Et puisque $\frac{d^2v}{dt^2}$ et $\frac{dv}{dt}$ sont continues sur $(0,T]$, alors $x'(t)$ l'est aussi. Par ailleurs, on a:

$$\begin{aligned} \frac{d^2v}{dt^2} &= \frac{d}{dt} Av(t) \\ &= A \frac{dv}{dt} , \text{ car } A \text{ est fermé} \\ &= A^2v(t) , \quad 0 < t \le T . \end{aligned}$$

Il en résulte que:

$$\begin{aligned} x'(t) &= A^2v(t) - \lambda Av(t) \\ &= A(A-\lambda)v(t) \\ &= Ax(t) , \quad 0 < t \le T . \end{aligned}$$

Ce qui complète la démonstration.

CHAPITRE II

FONCTIONS PRESQUE-PÉRIODIQUES À VALEURS DANS UN ESPACE LOCALEMENT CONVEXE

Dans le présent chapitre, nous discutons quelques propriétés des fonctions presque-périodiques de $\mathbb{R}$ dans E un espace localement convexe complet. La définition que nous utilisons était déjà connue avant ce travail; elle se trouve ainsi formulée, par exemple dans [6] (page 159). Nous obtenons entre autres une généralisation du critère de Bochner (théorème 6) dans un espace de Fréchet; et aussi, que dans un espace de Fréchet, si $f(t)$ est presque-périodique et $F(t) = \int_0^t f(\sigma)d\sigma$ est telle que $\{F(t) \ ; \ t \in \mathbb{R}\}$ est relativement compact, alors $F(t)$ est presque-périodique.

Cette étude n'est nullement exhaustive mais constitue pour nous un exercice de préparation au prochain chapitre qui traite des solutions presque-périodiques de certaines équations différentielles. Les références parmi les plus consultées ont été les suivantes: [1], [2], [4], [5], [6].

1. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

DÉFINITION. Une fonction continue $f : \mathbb{R} \to E$ est dite presque-périodique (On notera: p.p.) , si pour tout voisinage U , il existe un nombre réel $\ell = \ell(U) > 0$ tel que tout intervalle de la droite réelle de longueur ℓ contient au moins un point d'abscisse τ tel que:

$$f(t+\tau) - f(t) \in U$$

pour chaque $t \in \mathbb{R}$.

<u>REMARQUE 1</u>. Etant donné qu'un tel τ dépend du voisinage U , on l'appellera une U-translation de la fonction $f(t)$.

Les trois prochains Théorèmes dont nous donnons les démonstrations simples et élémentaires sont formulés dans [6] page 160. Ils sont valides dans tout espace localement convexe complet E .

<u>THÉORÈME 1</u>. *Toute fonction* p.p. $f : \mathbb{R} \to E$ *est uniformément continue sur* $\mathbb{R}$.

<u>DÉMONSTRATION</u>. Soit U un voisinage arbitraire donné; il s'agit de montrer qu'il existe un nombre $\delta > 0$ tel que

$$f(t) - f(t') \in U \quad \text{si} \quad |t-t'| < \delta \ .$$

Soit V un voisinage symétrique tel que $V + V + V \subset U$.

A cause de la presque-périodicité de f , il existe $\ell = \ell(V)$ correspondant dans la Définition 1. Mais puisque f est uniformément continue sur l'intervale $[-1,\ell+1]$, on peut trouver un nombre δ (disons $0 < \delta < 1$) , tel que

① $$f(t_1) - f(t_2) \in V$$

si t_1 , $t_2 \in [-1,\ell+1]$ et $|t_1-t_2| < \delta$.

Considérons t et t' arbitraires dans $\mathbb{R}$, mais tels que $|t-t'| < \delta$. Alors il existe τ une V-translation de f telle que $t+\tau \in [0,\ell]$ (il suffit de prendre $\tau \in [-t,-t+\ell]$) ; il en résulte que $t'+\tau \in [-1,\ell+1]$; en effet on a:

$$-1 < -\delta \leq t+\tau-\delta < t'+\tau < t+\tau+\delta \leq \ell+\delta < \ell+1$$

on a évidemment

② $$f(t+\tau) - f(t) \in V$$
$$f(t'+\tau) - f(t') \in V$$

car τ est une V-translation de f et aussi

③ $$f(t+\tau) - f(t'+\tau) \in V$$

car $t+\tau$, $t'+\tau \in [-1,\ell+1]$ et $|t-t'| < \delta$. En écrivant $f(t) - f(t')$ comme suit:

$$\begin{aligned} f(t) - f(t') = & f(t) - f(t+\tau) \\ & + f(t+\tau) - f(t'+\tau) \\ & + f(t'+\tau) - f(t') \end{aligned}$$

il résulte de ② et ③ que

$$f(t) - f(t') \in U .$$

<u>THÉORÈME 2</u>. *Si* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *est une suite de fonctions* p.p. *qui converge uniformément sur* $\mathbb{R}$ *vers une fonction* $f(t)$ *, alors celle-ci est aussi* p.p.

<u>DÉMONSTRATION</u>. Notons d'abord que la fonction $f(t)$ est évidemment continue sur $\mathbb{R}$ comme limite uniforme de fonctions continues; en effet, considérons un voisinage U arbitrairement donné et montrons que pour tout $t_o \in \mathbb{R}$ il existe un nombre $\delta > 0$ tel que

$$f(t) - f(t_o) \in U , \text{ si } |t-t_o| < \delta .$$

Soient $t_o \in \mathbb{R}$ donné et V un voisinage symétrique tel que $V + V + V \subset U$. Puisque $f(t)$ est la limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite $(f_n(t))_{n=1}^{\infty}$, il existe un entier positif N tel que si $n > N$, alors

$$\text{①} \qquad f(t) - f_n(t) \in V$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Considérons la fonction $f_{n_o}(t)$ pour un $n_o > N$; celle-ci étant continue, il existe $\delta = \delta(t_o,V)$ tel que

$$\text{②} \qquad f_{n_o}(t) - f_{n_o}(t_o) \in V , \text{ si } |t-t_o| < \delta .$$

En écrivant $f(t) - f(t_o)$, où $|t-t_o| < \delta$, comme suit:

$$\begin{aligned} f(t) - f(t_o) &= f(t) - f_{n_o}(t) \\ &+ f_{n_o}(t) - f_{n_o}(t_o) \\ &+ f_{n_o}(t_o) - f(t_o) \end{aligned}$$

et en tenant compte de ① et ②, on a bien:

$$f(t) - f(t_o) \in U \text{ , si } |t-t_o| < \delta \text{ .}$$

Toujours pour la même fonction $f_{n_o}(t)$ p.p., il existe $\ell = \ell(V)$ tel que tout intervale de $\mathbb{R}$ de longueur ℓ contient un point τ tel que

③ $$f_{n_o}(t+\tau) - f_{n_o}(t) \in V \text{ ,}$$

pour chaque $t \in \mathbb{R}$.

Soit

$$\begin{aligned} f(t+\tau) - f(t) &= f(t+\tau) - f_{n_o}(t+\tau) \\ &+ f_{n_o}(t+\tau) - f_{n_o}(t) \\ &+ f_{n_o}(t) - f(t) \text{ .} \end{aligned}$$

Par ① et ③, nous concluons que

$$f(t+\tau) - f(t) \in U$$

pour chaque $t \in \mathbb{R}$; ce qu'il fallait démontrer.

THÉORÈME 3. *Si* $f(t)$ *est* p.p., *alors* $\{f(t) ; t \in \mathbb{R}\}$ *est totalement borné dans* E .

DÉMONSTRATION. Soit U un voisinage donné. Nous voulons montrer qu'il existe un ensemble fini $X \in E$ tel que:

et puisque t est arbitraire, on conclut que

$$\{f(t)\ ;\ t \in \mathbb{R}\} \subset \bigcup_{j=1}^{\nu} (x_j+U)\ .$$

Ce qu'il fallait démontrer.

REMARQUE 2. Si E est un espace de Fréchet, alors $\{f(t)\ ;\ t \in \mathbb{R}\}$ est relativement compact si $f(t)$ est p.p. Car dans tout espace métrique complet, un sous-ensemble est relativement compact ssi il est totalement borné (voir [19] page 13). On a alors que toute suite $(f(t_n))_{n=1}^{\infty}$ possède une sous-suite convergente.

THÉORÈME 4. *Soit* E *un espace localement convexe complet. Si* $f(t) : \mathbb{R} \to E$ *est* p.p., *alors les fonctions* $\lambda f(t)\,(\lambda \in \Phi)$ *et* $\overline{f}(t) \equiv f(-t)$ *sont aussi* p.p.

DÉMONSTRATION. Il est tout à fait évident que $\lambda f(t)$ est p.p. Voyons la fonction $\overline{f}(t)$; étant donnée la presque-périodicité de $f(t)$, si U est un voisinage donné, il existe $\ell = \ell(U)$ tel que tout intervale de longueur ℓ contient un point τ tel que

$$f(t+\tau) - f(t) \in U$$

pour chaque $t \in \mathbb{R}$.

En posant $s = -t$, on voit que s parcourt $\mathbb{R}$ si t parcourt $\mathbb{R}$, et

$$\overline{f}(s-\tau) - \overline{f}(s) = f(-s+\tau) - f(-s)$$

$$= f(t+\tau) - f(t)$$

donc

$$\overline{f}(s-\tau) - \overline{f}(s) \in U$$

pour chaque $s \in \mathbb{R}$. $\overline{f}(t)$ est p.p. avec $-\tau$ comme U-translation.

2. CRITÈRE DE BOCHNER ET AUTRES PROPRIÉTÉS

Nous commençons par le théorème suivant dont la démonstration est une adaptation de celle du Théorème 6.6 [6] au cas d'espace de Fréchet.

THÉORÈME 5. *Soit* E *un espace de Fréchet et* $f(t) : \mathbb{R} \to E$ *une fonction presque-périodique; alors pour toute suite réelle* $(s'_n)_{n=1}^{\infty}$ *il existe une sous-suite* $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ *telle que la suite* $(f(t+s_n))_{n=1}^{\infty}$ *soit uniformément convergente en* $t \in \mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION. Considérons la suite des translatées de f , soit $(f_{s_n})_{n=1}^{\infty}$ correspondant à la suite $(s_n)_{n=1}$ et soit $S = (r_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite dense dans $\mathbb{R}$.

D'après la Remarque 2, on peut extraire de la suite $(f(r_1+s_n))_{n=1}^{\infty}$ une sous-suite convergente, car $\{f(t) ; t \in \mathbb{R}\}$ est relativement compact dans E .

Appelons $(f_{s_1,n})_{n=1}^{\infty}$ la sous-suite de $(f_{s_n})_{n=1}^{\infty}$ qui converge en η_1. On applique le même argument que ci-dessus à la suite $(f_{s_1,n})_{n=1}^{\infty}$ pour choisir une sous-suite $(f_{s_2,n})_{n=1}^{\infty}$ qui converge en η_2. On continue le processus de la même manière et on considère la suite diagonale $(f_{s_{n,n}})_{n=1}^{\infty}$ qui converge pour chaque η_n dans S. Appelons cette suite $(f_{r_n})_{n=1}^{\infty}$ et montrons qu'elle est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire:

> pour tout voisinage U, il existe $N = N_U$
> tel que si $n, m > N$, on a
> $f(t+r_n) - f(t+r_m) \in U$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Considérons donc un voisinage U arbitraire et soit un voisinage symétrique V tel que $V + V + V + V + V \subset U$.

Soit $\ell = \ell(V)$ correspondant dans la définition de presque-périodicité de la fonction $f(t)$. Etant donnée la continuité uniforme de $f(t)$ sur $\mathbb{R}$ (Théorème 1) il existe $\delta = \delta_V > 0$ tel que

$$\text{①} \qquad f(t) - f(t') \in V$$

pour tout t, t' vérifiant $|t-t'| < \delta$.

Divisons l'intervale $[0,\ell]$ en ν intervales de longueurs plus petites que δ. Ensuite, dans chacun des intervales, on choisit un point de S (ce qui est possible car S est dense dans $\mathbb{R}$) et on forme ainsi l'ensemble $S_o = \{\xi_1,\ldots,\xi_\nu\}$.

S_o étant fini, la suite $(f_{r_n})_{n=1}^{\infty}$ est uniformément convergente sur S_o ; donc il existe $N = N_V$ tel que si $n,m > N$, on a:

$$\text{②} \qquad f(\xi_i+r_n) - f(\xi_i+r_m) \in V$$

pour tout $i = 1,\ldots,\nu$.

Soit $t \in \mathbb{R}$ arbitraire et $\tau \in [-t,-t+\ell]$ tel que

$$f(t+\tau) - f(t) \in V .$$

Remarquons que $t+\tau \in [0,\ell]$; soit ξ_i choisi de façon que $|t+\tau-\xi_i| < \delta$; alors

$$f(t+\tau+r_n) - f(\xi_i+r_n) \in V ,$$

pour tout n (à cause de ①). Donc en prenant $n,m > N$, on a:

$$\text{③} \qquad f(t+r_n) - f(t+r_m) \in U .$$

(Ce qui signifie que la suite $(f(t+r_n))_{n=1}^{\infty}$ est uniformément Cauchy en $t \in \mathbb{R}$) .

En effet pour voir ③, il suffit de considérer

$$\begin{aligned} f(t+r_n) - f(t+r_m) = {} & [f(t+r_n) - f(t+r_n+\tau)] \\ & + [f(t+r_n+\tau) - f(\xi_i+r_n)] \\ & + [f(\xi_i+r_n) - f(\xi_i+r_m)] \\ & + [f(\xi_i+r_m) - f(t+r_m+\tau)] \\ & + [f(t+r_m+\tau) - f(t+r_m)] \end{aligned}$$

et d'appliquer ① et ② selon le cas à chacun des cinq termes du membre de droite.

Nous en arrivons maintenant au critère de Bochner valable dans un espace de Fréchet:

<u>THÉORÈME 6</u>. *Soit* E *un espace de Fréchet; la fonction* $f : \mathbb{R} \to E$ *est* p.p. *ssi pour toute suite réelle* $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ *il existe une sous-suite* $(s'_n)_{n=1}^{\infty}$ *telle que la suite* $(f(t+s_n))_{n=1}^{\infty}$ *converge uniformément en* $t \in \mathbb{R}$.

<u>DÉMONSTRATION</u>. La nécessité de la condition a été démontrée au Théorème 5; il reste à vérifier la suffisance; supposons par contradiction que la fonction $f(t)$ n'est pas presque-périodique; alors il existe un voisinage U tel que pour tout $\ell > 0$, il existe un intervalle de longueur ℓ qui ne contient aucune U-translation de $f(t)$; ce qui peut s'énoncer comme suit:

> il existe un intervalle $[-a,-a+\ell]$ tel que
> pour tout $\tau \in [-a,-a+\ell]$, il existe un
> $t = t_\tau$ tel que

$$f(t+\tau) - f(t) \notin U .$$

Considérons $\tau_1 \in \mathbb{R}$ arbitraire et un intervalle (a_1,b_1) avec $b_1-a_1 > 2|\tau_1|$ qui ne contient aucune U-translation de $f(t)$. Soit maintenant $\tau_2 = \frac{a_1-b_1}{2}$; alors $\tau_2-\tau_1 \in (a_1,b_1)$ et donc $\tau_2-\tau_1$ ne peut être une U-translation de $f(t)$. On considère un autre intervalle

(a_2,b_2) avec $b_2-a_2 > 2(|\tau_1|+|\tau_2|)$, qui ne contient aucune U-translation de $f(t)$. Soit $\tau_3 = \frac{a_2-b_2}{2}$; alors $\tau_3-\tau_1 \in (a_2,b_2)$, $\tau_3-\tau_2 \in (a_2,b_2)$ et donc $\tau_3-\tau_1$ et $\tau_3-\tau_2$ ne peuvent être des U-translations de $f(t)$. On continue le processus de la même manière pour obtenir une suite $(\tau_n)_{n=1}^{\infty}$ telle qu'aucun $\tau_m-\tau_n$ n'est une U-translation de $f(t)$; c'est-à-dire que pour chaque m et chaque n $(m > n)$, il existe $t = t_{mn} \in \mathbb{R}$ tel que

$$\text{(1)} \qquad f(t+\tau_m-\tau_n) - f(t) \notin U .$$

En posant $\sigma = \sigma_{mn} = t-\tau_n$, (1) devient

$$\text{(2)} \qquad f(\sigma+\tau_m) - f(\sigma+\tau_n) \notin U .$$

S'il existe une sous-suite $(\tau'_n)_{n=1}^{\infty} \subset (\tau_n)_{n=1}^{\infty}$ telle que la suite $(f(t+\tau'_n))_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément en t , alors pour tout voisinage V il existe $N = N_V$ tel que si $m,n > N$ (on peut supposer $m > n$) , on a

$$\text{(3)} \qquad f(t+\tau'_m) - f(t+\tau'_n) \in V$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Mais ceci contredit (2); en effet il suffit de prendre $U = V$ et $\sigma_{m,n} = t_{m,n}$ dans (3). La suite $(f(t+\tau_n))_{n=1}^{\infty}$ ne contient donc pas de sous-suite uniformément convergente en t . Le théorème est démontré.

<u>REMARQUE 3.</u> Dans la démonstration de la suffisance de la condition nous n'avons pas utilisé la métrizabilité de l'espace E ; elle est donc

valable dans tout espace localement convexe complet.

THÉORÈME 7. *Soit* E *un espace de Fréchet; si* $f(t)$ *et* $g(t)$ *sont* p.p. *dans* E , *alors* $f(t)+g(t)$ *aussi est* p.p. *dans* E

DÉMONSTRATION. Elle est simple; il suffit d'utiliser le critère de Bochner comme suit: soit $(s''_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite réelle arbitraire; on peut en extraire une sous-suite $(s'_n)_{n=1}^{\infty}$ telle que la suite $(f(t+s'_n))_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément en $t \in \mathbb{R}$; ensuite on procède à une seconde extraction pour avoir $(s_n)_{n=1}^{\infty} \subset (s'_n)_{n=1}^{\infty}$ telle que $(g(t+s_n))_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément en t ; alors la suite $(f(t+s_n)+g(t+s_n))_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément en t . Et donc $f(t)+g(t)$ est p.p.

REMARQUE 4. Il découle du Théorème 7 que la somme finie de fonctions p.p. dans un espace de Fréchet est aussi p.p.

THÉORÈME 8. *Soit* E *un espace de Fréchet. Alors les fonctions* $f_1(t)$, $f_2(t)$ *sont* p.p. *dans* E *ssi la fonction* $f(t) = (f_1(t),f_2(t))$ *est* p.p. *dans l'espace produit* E^2 .

DÉMONSTRATION. Notons d'abord que l'espace E^2 est aussi un espace de Fréchet (voir [17], page 87). Supposons que $f_1(t)$ et $f_2(t)$ sont p.p. dans E . Considérons une suite réelle arbitraire $(s''_n)_{n=1}^{\infty}$. Nous voulons montrer qu'il existe une sous-suite $(r_n)_{n=1}^{\infty} \subset (s''_n)_{n=1}^{\infty}$ telle que la suite $(f(t+r_n))_{n=1}^{\infty}$ soit uniformément convergente en $t \in \mathbb{R}$ (critère de Bochner).

Par le même critère on peut extraire une sous-suite $(s'_n)_{n=1}^{\infty}$ de $(s''_n)_{n=1}^{\infty}$ telle que $(f_1(t+s'_n))_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément en t . Ensuite soit $(s_n)_{n=1}^{\infty} \subset (s'_n)_{n=1}^{\infty}$ telle que $(f_2(t+s_n))_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément en t . Alors $(f(t+s_n))_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément en t .

En effet soit U un voisinage arbitraire dans E^2 ; alors $U \supseteq V_1 \times V_2$ où V_1 et V_2 sont des voisinages dans E . Par ce que nous venons de démontrer:

$$\exists\, N_1 = N_{V_1}, \forall\, m,n > N_1 ,$$

$$f_1(t+s'_n) - f_1(t+s'_m) \in V_1 , \forall\, t \in \mathbb{R}$$

et

$$\exists\, N_2 = N_{V_2} , \forall\, m,n > N_2 ,$$

$$f_2(t+s_n) - f_2(t+s_m) \in V_2 , \forall\, t \in \mathbb{R} .$$

Soit $N = \max(N_1,N_2)$, alors si $m,n > N$ on a bien

$$f_i(t+s_n) - f_i(t+s_m) \in V_i , \forall\, t \in \mathbb{R} , \forall\, i = 1,2$$

c'est-à-dire

$$f(t+s_n) - f(t+s_m) \in U , \forall\, t \in \mathbb{R} .$$

Inversement supposons que $f(t)$ est p.p. Soit V_1 et V_2 des voisinages arbitraires dans E ; on peut supposer sans perte de généralité que

$V_1 = V_2 = V$; alors $U = V^2$ est un voisinage dans E^2 . Maintenant soit $(s'_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite réelle donnée; on en extrait une sous-suite $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ telle que $(f(t+s_n))_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément en t .

Donc il existe $N = N_U$ tel que si $m,n > N$,

$$f(t+s_n) - f(t+s_m) \in U ,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$; ce qui est équivalent à

$$f_i(t+s_n) - f_i(t+s_m) \in V ,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour $i = 1,2$; nous avons montré que $f_1(t)$ et $f_2(t)$ sont p.p.

COROLLAIRE 1. Si $f_1(t)$ et $f_2(t)$ sont presque-périodiques dans l'espace de Fréchet E , alors pour tout voisinage U , $f_1(t)$ et $f_2(t)$ ont des U-translations communes.

DÉMONSTRATION. Soit U un voisinage donné dans E ; par le Théorème 8, la fonction $f(t) = (f_1(t),f_2(t))$ est aussi p.p. Soit alors τ une U^2-translation de $f(t)$; on a:

$$f(t+\tau) - f(t) \in U^2 ,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ ce qui s'écrit ainsi

$$f_i(t+\tau) - f_i(t) \in U ,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, $i = 1,2$, c'est-à-dire que τ est une U-translation de $f_1(t)$ et $f_2(t)$.

<u>REMARQUE 5.</u> Le Théorème 8 et le Corollaire 1 s'appliquent aisément au cas de n fonctions à valeurs dans un espace de Fréchet E .

3. *FONCTIONS FAIBLEMENT PRESQUE-PÉRIODIQUES; INTÉGRATION DES FONCTIONS PRESQUE-PÉRIODIQUES*

Soit E un espace localement convexe complet.

<u>DÉFINITION.</u> La fonction $f(t) : \mathbb{R} \to E$ est dite faiblement presque-périodique (on notera F. p.p.) dans E si la fonction numérique $(x^*f)(t)$ est presque-périodique pour chaque $x^* \in E^*$.

<u>REMARQUE 6.</u>

a) Toute fonction p.p. est aussi F.p.p.

b) Si $f(t)$ est F.p.p. alors $f(t)$ est faiblement continue et faiblement bornée sur $\mathbb{R}$.

Nous avons le

<u>THÉORÈME 9.</u> *Soit* E *un espace localement convexe complet; soit* $f(t)$ *une fonction* F.p.p. *et continue sur* $\mathbb{R}$ *; supposons que* $\{F(t) ; t \in \mathbb{R}\}$ *est faiblement borné où* $F(t) = \int_0^t f(\sigma)d\sigma$ *; alors* $F(t)$ *est* F.p.p.

Avant de démontrer le Théorème, nous faisons remarquer que l'hypothèse de la continuité de la fonction $f(t)$ n'est présente que pour nous assurer l'existence de l'intégrale $\int_0^t f(\sigma)d\sigma$ telle que définie au chapitre 0 ; de plus, dans les applications au chapitre III, toutes les intégrantes sont continues sur $\mathbb{R}$. Ce qui justifie pour nous cette hypothèse.

DÉMONSTRATION. Soit $x^* \in E^*$ arbitraire; $(x^*f)(t)$ est une fonction numérique p.p. Par continuité de x^* , on a $(x^*F)(t) = \int_0^t (x^*f)(\sigma)d\sigma$, qui est bornée par hypothèse. Le Théorème 6.20 [6] nous permet de dire alors que $(x^*F)(t)$ est presque-périodique; ce qu'il fallait démontrer.

THÉORÈME 10. *Soit* E *un espace de Fréchet et* $f : \mathbb{R} \to E$ *une fonction donnée; alors* $f(t)$ *est* p.p. *ssi* $f(t)$ *est* F.p.p. *et que de plus* $\{f(t) \; ; \; t \in \mathbb{R}\}$ *est relativement compact.*

DÉMONSTRATION. Si $f(t)$ est p.p. , alors par la Remarque 6 $f(t)$ est F.p.p. ; tandis que la Remarque 2 nous permet de dire que $\{f(t) \; ; \; t \in \mathbb{R}\}$ est relativement compact. Il nous reste à démontrer la suffisance de la condition.

D'abord nous allons montrer, par contradiction, que $f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Supposons alors qu'il existe t_0 un point de discontinuité de $f(t)$. Nous pouvons dans ce cas trouver un voisinage U et deux suites réelles $(s'_{n_1})_{n=1}^{\infty}$ et $(s'_{n_2})_{n=1}^{\infty}$ tels que:

$$\lim_{n \to \infty} s'_{n_1} = 0 = \lim_{n \to \infty} s'_{n_2}$$

et

(1) $$f(t_o+s'_{n_1}) - f(t_o+s'_{n_2}) \notin U$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la compacité relative de $\{f(t) ; t \in \mathbb{R}\}$, on peut extraire des sous-suites $(s_{n_1})_{n=1}^{\infty} \subset (s'_{n_1})_{n=1}^{\infty}$ et $(s_{n_2})_{n=1}^{\infty} \subset (s'_{n_2})_{n=1}^{\infty}$ telles que:

$$\lim_{n \to \infty} f(t_o+s_{n_1}) = a_1 \in E$$

$$\lim_{n \to \infty} f(t_o+s_{n_2}) = a_2 \in E .$$

Il résulte alors de (1) que $a_1-a_2 \notin U$ et par suite $a_1-a_2 \neq \theta$.

Par le Théorème de Hahn-Banach ([19] Corollaire 1, page 108), il existe $x^* \in E^*$ tel que

$$x^*(a_1-a_2) \neq 0 ,$$

donc

(2) $$x^*(a_1) \neq x^*(a_2) .$$

Par continuité de x^* on a:

$$\begin{aligned} x^*(a_1) &= \lim_{n \to \infty} x^*f(t_o+s_{n_1}) \\ &\overset{(1)}{=} \lim_{n \to \infty} x^*f(t_o+s_{n_2}) \\ &= x^*(a_2) \end{aligned}$$

(nous avons utilisé la continuité faible de $f(t)$ dans l'égalité (1)). Nous contredisons ②; la fonction $f(t)$ est donc continue sur $\mathbb{R}$.

Nous utiliserons le critère de Bochner pour montrer la presque-périodicité de $f(t)$. Mais d'abord voyons le

LEMME 1. Soit E un espace de Fréchet et considérons $\phi : \mathbb{R} \to E$ une fonction p.p. Soit une suite réelle $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ telle que $\lim_{n \to \infty} \phi(s_n+\eta_k)$ existe pour tout $k = 1,2,\ldots$ où $(\eta_k)_{k=1}^{\infty}$ est une suite dense dans $\mathbb{R}$.

Alors la suite $(\phi(t+s_n))_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément en $t \in \mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION. Supposons par contradiction que $(\phi(t+s_n))_{n=1}^{\infty}$ ne converge pas uniformément en t . Alors il existe un voisinage U tel que pour tout $N = 1,2,\ldots$ il existe $n_N, m_N > N$ et $t_N \in \mathbb{R}$ tels que

① $$\phi(t_N+s_{n_N}) - \phi(t_N+s_{m_N}) \notin U .$$

Le critère de Bochner nous permet d'extraire deux sous-suites $(s'_{n_N}) \subset (s_{n_N})$ et $(s'_{m_N}) \subset (s_{m_N})$ telles que

$$\lim_{N \to \infty} \phi(t+s'_{n_N}) = g_1(t) \quad \text{uniformément en } t \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{N \to \infty} \phi(t+s'_{m_N}) = g_2(t) \quad \text{uniformément en } t \in \mathbb{R} .$$

Soit V un voisinage symétrique tel que $V + V + V \subset U$. Alors il existe $N_o = N_{o_V}$ tel que si $N > N_o$,

$$\phi(t_N+s'_{n_N}) - g_1(t_N) \in V$$

$$\phi(t_N+s'_{m_N}) - g_2(t_N) \in V .$$

Nous concluons que $g_1(t_N) - g_2(t_N) \notin V$ sinon, en écrivant

$$\begin{aligned}\phi(t_N+s'_{n_N}) - \phi(t_N+s'_{m_N}) = \phi(t_N+s'_{n_N}) &- g_1(t_N)\\ &+ g_1(t_N) - g_2(t_N)\\ &+ g_2(t_N) - \phi(t_N+s'_{m_N})\end{aligned}$$

nous voyons que $\phi(t_N+s'_{n_N}) - \phi(t_N+s'_{m_N}) \in U$ ce qui contredit 1.

Nous avons donc trouvé un voisinage V tel que pour tout N assez grand, il existe $t_N \in \mathbb{R}$ tel que:

$$g_1(t_N) - g_2(t_N) \notin V .$$

Mais ceci est impossible; en effet il suffit de prendre une sous-suite $(\xi_k)_{k=1}^{\infty} \subset (\eta_k)_{k=1}^{\infty}$ telle que $\xi_k \to t_N$; et puisque

$$\lim_{N\to\infty} \phi(\xi_k+s'_{n_N}) = \lim_{N\to\infty} \phi(\xi_k+s'_{m_N})$$

pour chaque k , autrement dit

$$g_1(\xi_k) = g_2(\xi_k)$$

pour chaque k , alors par continuité de $g_1(t)$ et $g_2(t)$, on doit avoir $g_1(t_N) = g_2(t_N)$, donc $g_1(t_N) - g_2(t_N)$ doit appartenir à tout voisinage. Ceci achève la démonstration du Lemme 1.

Reprenons celle du Théorème 10. Soit $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite réelle donnée et considérons $(\eta_r)_{r=1}^{\infty}$ la suite des nombres rationnels.

Etant donné que $\{f(t) \; ; \; t \in \mathbb{R}\}$ est relativement compact, on peut extraire de $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ une sous-suite, qu'on notera encore de la même façon, telle que, pour chaque r ,

① $$\lim_{n \to \infty} f(\eta_r+h_n) = x_r \text{ existe dans } E \, .$$

Démontrons maintenant que la suite $(f(\eta_r+h_n))_{n=1}^{\infty}$ est uniformément convergente par rapport à r . Supposons le contraire; alors il existe un voisinage U et trois sous-suites:

$$(\xi_r)_{r=1}^{\infty} \subset (\eta_r)_{r=1}^{\infty}$$

$$(h'_r)_{r=1}^{\infty} \subset (h_r)_{r=1}^{\infty}$$

$$(h''_r)_{r=1}^{\infty} \subset (h_r)_{r=1}^{\infty}$$

tels que

② $$f(\xi_r+h'_r) - f(\xi_r+h''_r) \notin U \, .$$

Par la compacité relative de $\{f(t) \; ; \; t \in \mathbb{R}\}$ nous pouvons tout de suite supposer que:

③ $$\lim_{r \to \infty} f(\xi_r+h'_r) = b' \in E$$

$$\lim_{r \to \infty} f(\xi_r+h''_r) = b'' \in E$$

et donc, à cause de ②,

④ $$b' - b'' \notin U .$$

En vertu du même théorème de Hahn-Banach déjà cité dans la démonstration du Lemme 1, soit $x^* \in E^*$ tel que

⑤ $$x^*(b') \neq x^*(b'') .$$

Comme par hypothèse $f(t)$ est F.p.p. , la fonction numérique $(x^*f)(t)$ est p.p. et donc uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Considérons la suite des fonctions numériques $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ définies par:

$$\varphi_n(t) = (x^*f)(t+h_n) \ , \ n = 1,2,\ldots$$

En écrivant

$$\varphi_n(t+\tau) - \varphi_n(t) = x^*f(t+\tau+h_n) - x^*f(t+h_n)$$

$n = 1,2,\ldots$, on voit que chaque $\varphi_n(t)$ est p.p. Par ailleurs, étant donnée la continuité uniforme de $x^*f(t)$ sur $\mathbb{R}$, on déduit que la suite $(\varphi_n(t))_{n=1}^{\infty}$ est équi-uniformément continue sur $\mathbb{R}$. En effet soit $\varepsilon > 0$ donné; il existe $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ tel que

$$|x^*f(t_1+h_n) - x^*f(t_2+h_n)| < \varepsilon$$

si $|t_1-t_2| < \delta$; or on a:

$$|\varphi_n(t_1) - \varphi_n(t_2)| = |x^*f(t_1+h_n) - x^*f(t_2+h_n)|$$

pour tout $n = 1,2,\ldots$; autrement dit

$$|\varphi_n(t_1) - \varphi_n(t_2)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |t_1-t_2| < \delta$$

et pour tout $n = 1,2,\ldots$. Pour chaque r , on a, à cause de (1) :

$$\lim_{n \to \infty} x^*f(\eta_r+h_n) = x^*(x_r) \ .$$

Donc, par le lemme 1, $(x^*f(t+h_n))_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément en t .

Considérons maintenant les suites $(\xi_r+h'_r)_{r=1}^{\infty}$ et $(\xi_r+h''_r)_{r=1}^{\infty}$. Le critère de Bochner nous permet d'extraire deux sous-suites (que nous noterons de la même façon), telles que les suites

$$(x^*f(t+\xi_r+h'_r))_{r=1}^{\infty} \text{ et } (x^*f(t+\xi_r+h''_r))_{r=1}^{\infty}$$

convergent uniformément en $t \in \mathbb{R}$. Démontrons maintenant que

(6) $$\lim_{r \to \infty} x^*f(t+\xi_r+h'_r) = \lim_{r \to \infty} x^*f(t+\xi_r+h''_r) \ .$$

Pour cela, soit l'inégalité suivante:

(7) $$\begin{aligned} &|x^*f(t+\xi_r+h'_r) - x^*f(t+\xi_r+h''_r))| \\ &\qquad \leq |x^*f(t+\xi_r+h'_r) - x^*f(t+\xi_r+h_r)| \\ &\qquad + |x^*f(t+\xi_r+h_r) - x^*f(t+\xi_r+h''_r)| \end{aligned}$$

valable pour tout r .

Soit $\varepsilon > 0$ donné; comme $(x^*f(t+h_r))_{r=1}^{\infty}$ converge uniformément en t, on peut déterminer η_ε de façon que pour $r,s > \eta_\varepsilon$ on a:

$$|x^*f(t+h_s) - x^*f(t+h_r)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$; on aura alors pour $r,s > \eta_\varepsilon$:

$$⑧ \qquad |x^*f(t+\xi_r+h_s) - x^*f(t+\xi_r+h_r)| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Mais puisque $(h'_r)_{r=1}^{\infty} \subset (h_r)_{r=1}^{\infty}$ et $(h''_r)_{r=1}^{\infty} \subset (h_r)_{r=1}^{\infty}$ si on prend $r > \eta_\varepsilon$, on aura:

$$|x^*f(t+\xi_r+h'_r) - x^*f(t+\xi_r+h_r)| < \frac{\varepsilon}{2} ,$$

$$|x^*f(t+\xi_r+h''_r) - x^*f(t+\xi_r+h_r)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

par suite, à cause de l'inégalité ⑦,

$$|x^*f(t+\xi_r+h'_r) - x^*f(t+\xi_r+h''_r)| < \varepsilon$$

ceci pour tout $t \in \mathbb{R}$. ⑥ est alors démontré.

Si on prend $t = 0$, alors par ③ on a:

$$\begin{aligned} x^*(b') &= \lim_{r\to\infty} x^*f(\xi_r+h'_r) \\ &= \lim_{r\to\infty} x^*f(\xi_r+h''_r) \\ &= x^*(b'') , \end{aligned}$$

ce qui contredit ⑤ et démontre que la suite $(f(\eta_r+h_r))_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément par rapport à r .

Donc si U est un voisinage donné, il existe $N = N_U$ tel que si $i,j > N$, on a:

(9) $$f(\eta_r+h_i) - f(\eta_r+h_j) \in U$$

pour tout r .

Enfin si $t \in \mathbb{R}$ arbitraire, on prend une sous-suite de $(\eta_r)_{r=1}$ qui converge vers t et, en utilisant la continuité de f et la relation (9), on obtient, pour $i,j > N$,

$$f(t+h_i) - f(t+h_j) \in U .$$

La presque-périodicité de f est ainsi démontrée.

<u>THÉORÈME 11</u>. *Si* $f(t)$ *est une fonction* p.p. *dans un espace de Fréchet* E *et que* $\{F(t) \; ; \; t \in \mathbb{R}\}$, *où* $F(t) = \int_0^t f(\sigma)d\sigma$, *est relativement compact, alors* $F(t)$ *est* p.p.

<u>DÉMONSTRATION</u>. Elle est directe par les deux précédents théorèmes; en effet, $\{F(t) \; ; \; t \in \mathbb{R}\}$ est borné puisque relativement compact, et donc faiblement borné; par le théorème 9, la fonction $F(t)$ est faiblement presque-périodique; on conclut en utilisant le théorème 10.

Nous finissons le chapitre par le théorème suivant dont le cas banachique est démontré dans [2] (théorème VIII, page 6).

<u>THÉORÈME 12.</u> *Soit* E *un espace localement convexe complet. Si* $f(t)$ *est* p.p. *dans* E *et sa dérivée* $f'(t)$ *uniformément continue sur* $\mathbb{R}$ *, alors* $f'(t)$ *est aussi* p.p. *dans* E .

<u>DÉMONSTRATION.</u> Nous considérons comme dans [2] la suite de fonctions presque-périodiques $(n(f(t+\frac{1}{n}) - f(t)))_{n=1}^{\infty}$ et montrons qu'elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f'(t)$; la conclusion est faite ensuite en vertu du Théorème 2 du présent chapitre.

Soit $U = U(\varepsilon\ ;\ p_i\quad 1 \leq i \leq n)$ un voisinage arbitraire; il s'agit de montrer qu'il existe un entier positif $N = N_U$ tel que

$$f'(t) - n(f(t+\frac{1}{n}) - f(t)) \in U$$

pour tout t , dès que $n > N$.

Par la continuité uniforme de $f'(t)$, nous pouvons choisir $\delta = \delta_U > 0$ de façon que

$$f'(t_1) - f'(t_2) \in U$$

pour tout t_1,t_2 vérifiant $|t_1-t_2| < \delta$. Or on peut écrire:

$$f'(t) - n(f(t+\frac{1}{n}) - f(t)) = n\int_0^{1/n} [f'(t) - f'(t+\sigma)]d\sigma\ .$$

Donc en choisissant $N = N_U > \frac{1}{\delta}$, dès que $n > N$, on aura:

$$p_i[f'(t) - n(f(t+\frac{1}{n}) - f(t))] \leq n\int_0^{1/n} p_i[f'(t)-f'(t+\sigma)]d\sigma$$

$$< \varepsilon$$

<u>THÉORÈME 12</u>. *Soit* E *un espace localement convexe complet. Si* $f(t)$ *est* p.p. *dans* E *et sa dérivée* $f'(t)$ *uniformément continue sur* $\mathbb{R}$, *alors* $f'(t)$ *est aussi* p.p. *dans* E .

<u>DÉMONSTRATION</u>. Nous considérons comme dans [2] la suite de fonctions presque-périodiques $(n(f(t+\frac{1}{n}) - f(t)))_{n=1}^{\infty}$ et montrons qu'elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f'(t)$; la conclusion est faite ensuite en vertu du théorème 2 du présent chapitre.

Soit $U = U(\varepsilon \; ; \; p_i \; , 1 \leq i \leq n)$ un voisinage arbitraire; il s'agit de montrer qu'il existe un entier positif $N = N_U$ tel que

$$f'(t) - n(f(t+\frac{1}{n}) - f(t)) \in U$$

pour tout t , dès que $n > N$.

Par la continuité uniforme de $f'(t)$, nous pouvons choisir $\delta = \delta_U > 0$ de façon que

$$f'(t_1) - f'(t_2) \in U$$

pour tout t_1, t_2 vérifiant $|t_1 - t_2| < \delta$. Or on peut écrire:

$$f'(t) - n(f(t+\frac{1}{n}) - f(t)) = n\int_0^{1/n} [f'(t) - f'(t+\sigma)]d\sigma \; .$$

Donc en choisissant $N = N_U > \frac{1}{\delta}$, dès que $n > N$, on aura:

$$\begin{aligned} p_i[f'(t) - n(f(t+\frac{1}{n}) - f(t))] &\leq n\int_0^{1/n} p_i[f'(t)-f'(t+\sigma)]d\sigma \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

pour toute semi-norme p_i et pour tout $t \in \mathbb{R}$ ce qu'il fallait démontrer.

$$I = \frac{e^{(t-\tau-s)A}y(\tau+s)-e^{(t-\tau)A}y(\tau+s)}{s}$$

et

$$J = \frac{e^{(t-\tau)A}y(\tau+s)-e^{(t-\tau)A}y(\tau)}{s} .$$

Puisque $e^{(t-\tau)A}$ est continu sur E et que

$$\lim_{s \to 0} \frac{y(\tau+s)-y(\tau)}{s} = y'(\tau) ,$$

alors on a:

$$\begin{aligned} \lim_{s \to 0} J &= e^{(t-\tau)A}y'(\tau) \\ &= e^{(t-\tau)A}Ay(\tau) \\ &= Ae^{(t-\tau)}y(\tau) . \end{aligned}$$

Montrons que $\lim\limits_{s \to 0} I = -Ae^{(t-\tau)A}y(\tau)$, ce qui donnerait alors

$$\begin{aligned} v'(\tau) = \lim_{s \to 0} \frac{v(\tau+s)-v(\tau)}{s} &= -Ae^{(t-\tau)A}y(\tau) \\ &+ Ae^{(t-\tau)A}y(\tau) \\ &= \theta ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I = Ae^{(t-\tau)A}y(\tau) &= \frac{e^{(t-\tau-s)A}y(\tau+s)-e^{(t-\tau)A}y(\tau+s)}{s} + Ae^{(t+\tau)A}y(\tau) \\ &= e^{(t-\tau)A}[\frac{e^{-sA}-I}{s}\ y(\tau+s) + Ay(\tau)] \end{aligned}$$

$$= e^{(t-\tau)A}[(e^{-sA}-I)(\frac{y(\tau+s)-y(\tau)}{s})$$

$$+ \frac{e^{-sA}-I}{s} y(\tau) + Ay(\tau)] .$$

Utilisant les propriétés de $\{e^{tA} ; t \in \mathbb{R}\}$ on obtient:

(1) $$\lim_{s \to 0} \frac{e^{-sA}-I}{s} y(\tau) = -Ay(\tau)$$

(voir [19], Corollaire 3, page 245); on a aussi:

LEMME 1.

(2) $$\lim_{s \to 0} (e^{-sA}-I)(\frac{y(\tau+s)-y(\tau)}{s}) = \theta .$$

DÉMONSTRATION DU LEMME. Remarquons d'abord que le groupe $\{e^{tA} ; t \in \mathbb{R}\}$ est équi-continu sur les sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}$; et par conséquent si on suppose $|t| \leq 1$, alors pour toute semi-norme p il existe une semi-norme q telle que

$$p(e^{tA}x) \leq q(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in E .$$

Maintenant soit

$$(e^{-sA}-I)(\frac{y(\tau+s)-y(\tau)}{s}) = (e^{-sA}-I)(\frac{y(\tau+s)-y(\tau)}{s} - y'(\tau))$$

$$+ (e^{-sA}-I)y'(\tau) .$$

Soit p une semi-norme arbitraire; alors il existe une semi-norme q telle que, pour $|s| \leq 1$

$$(3) \qquad p[(e^{-sA}-I)(\frac{y(\tau+s)-y(\tau)}{s})] \leq q[\frac{y(\tau+s)-y(\tau)}{s} - y'(\tau)]$$

$$+ p[\frac{y(\tau+s)-y(\tau)}{s} - y'(\tau)]$$

$$+ p[(e^{-sA}-I)y'(\tau)] \quad ;$$

utilisant le fait que $y'(t)$ existe sur $\mathbb{R}$ et que $\lim_{s \to 0} (e^{-sA}-I)y'(\tau)=\theta$, on peut rendre le membre de droite de (3) arbitrairement petit lorsque s tend vers 0 ; ceci démontre le lemme.

En combinant (1) et (2), on obtient que

$$\lim_{s \to 0} I + Ae^{(t-)A}y(\tau) = \theta \ .$$

On conclut alors que $v'(\tau) \equiv \theta$ pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, ce qui veut dire que la fonction $v(\tau) \equiv$ constante.

DÉFINITION. L'espace de Fréchet E est dit parfait si pour toute fonction $f(t) : \mathbb{R} \to E$ telle que:

(i) $\{f(t) \ ; \ t \in \mathbb{R}\}$ est borné dans E

(ii) $f'(t)$ est p.p. dans E

on a:

$$f(t) \text{ p.p. dans } E \ .$$

Nous démontrons maintenant le

THÉORÈME 1. Soit E un espace de Fréchet parfait; supposons que:

(i) A est un opérateur linéaire compact

(ii) $\{A^k \ ; \ k = 1,2,\dots\}$ est équi-continu

(iii) Pour toute semi-norme p il existe une semi-norme q telle que:

$$p[e^{tA}x] \leq q(x)$$

pour tout $x \in E$ et tout $t \in \mathbb{R}$.

Alors toute solution $x(t)$ de l'équation

$$x'(t) = Ax(t) \ , \ -\infty < t < \infty$$

est p.p. dans E .

DÉMONSTRATION. Comme $x(t) = e^{tA}x(0)$, alors $x(t)$ est bornée dans E . L'espace E étant un espace parfait, il suffit donc de montrer que $x'(t)$ est p.p.

L'opérateur A étant compact, alors $\{Ax(t) \ ; \ t \in \mathbb{R}\}$ est relativement compact; il en sera de même pour $\{x'(t) \ ; \ t \in \mathbb{R}\}$. Soit $(s'_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite réelle arbitraire; on peut en extraire une sous-suite $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ telle que la suite $(x'(s_n))_{n=1}^{\infty}$ soit de Cauchy dans E . Or on a:

$$\begin{aligned} x'(t+s_n) &= Ax(t+s_n) \\ &= Ae^{(t+s_n)A}x(0) \\ &= Ae^{tA}e^{s_nA}x(0) \end{aligned}$$

$$= Ae^{tA}\, x(s_n)$$

$$= e^{tA}\, Ax(s_n)$$

$$= e^{tA}\, x'(s_n)\ .$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n = 1,2,\ldots$. Si p est une semi-norme donnée, il existe une semi-norme q , d'après (iii), telle que

$$p[x'(t+s_n)-x'(t+s_m)] = p[e^{tA}(x'(s_n)-x'(s_m))]$$

$$\leq q[x'(s_n)-x'(s_m)]$$

pour tout t et tout $m,n \in \mathbb{N}$. On en déduit que la suite $(x'(t+s_n))_{n=1}^{\infty}$ est de Cauchy uniforme en t ; on applique le critère de Bochner pour conclure de la presque-périodicité de $x'(t)$.

2. *LE CAS NON HOMOGÈNE* $(\frac{d}{dt} - A)x(t) = f(t)$

Nous considérons d'abord l'équation non homogène

(1) $$x'(t) = Ax(t) + f(t)\ ,\ -\infty < t < \infty$$

où A est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ dense dans un espace de Fréchet arbitraire E . La fonction $f(t) : \mathbb{R} \to E$ sera toujours supposée presque-périodique dans E .

Mais rappelons quelques définitions utiles (voir [19]).

DÉFINITION 2. On dit que la famille d'opérateurs linéaires continus $\{T(t)\ ;\ t \in \mathbb{R}\}$ est un groupe équi-continu de classe C_o si

(i) $T(t_1+t_2)x = T(t_1)T(t_2)x$, $T(0)x = x$ pour tout $x \in E$ et tout $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

(ii) Pour toute semi-norme p , il existe une semi-norme q telle que $p[T(t)x] \leq q(x)$ pour tout $x \in E$ et tout $t \in \mathbb{R}$.

(iii) $\lim\limits_{t \to t_o} T(t)x = T(t_o)x$ pour tout $x \in E$ et tout $t_o \in \mathbb{R}$.

DÉFINITION 3. Soit $\{T(t)\ ;\ t \in \mathbb{R}\}$ un groupe équi-continu de classe C_o ; on définit le générateur infinitésimal A de $T(t)$ par:

$$Ax = \lim_{\eta \to 0} \frac{T(\eta)x-x}{\eta}\ ;$$

c'est-à-dire A est l'opérateur linéaire de domaine
$D(A) = \{x \in E\ ;\ \lim\limits_{\eta \to 0} \frac{T(\eta)x-x}{\eta}$ existe dans $E\}$ et pour tout $x \in D(A)$,
$Ax = \lim\limits_{\eta \to 0} \frac{T(\eta)x-x}{\eta}$.

REMARQUE 1. On peut montrer que

$$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$$

pour tout $x \in D(A)$ et donc qu'en particulier A commute avec $T(t)$ sur $D(A)$. (Voir [19] pour le cas semi-groupal).

Dans le reste de ce paragraphe, nous supposerons que A est le générateur infinitésimal d'un groupe équi-continu de classe C_o, $\{T(t)\ ;\ t \in \mathbb{R}\}$

Nous allons maintenant démontrer un certain nombre de lemmes.

LEMME 2. Soit E un espace localement convexe complet. La fonction $T(t-\sigma)f(\sigma) : \mathbb{R} \to E$ est continue pour chaque t si $f(\sigma)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION. Il s'agit de montrer que $\lim\limits_{s \to 0} T(t-\sigma-s)f(\sigma+s)$ existe et est égale à $T(t-\sigma)f(\sigma)$. Soit l'égalité suivante:

$$[T(t-\sigma-s)f(\sigma+s) - T(t-\sigma)f(\sigma)] = [T(t-\sigma-s)f(\sigma+s) - T(t-\sigma-s)f(\sigma)]$$

$$+ [T(t-\sigma-s)f(\sigma) - T(t-\sigma)f(\sigma)]$$

Par la propriété (iii) de la Définition 2, on a

$$\lim_{s \to 0} T(t-\sigma-s)f(\sigma) = T(t-\sigma)f(\sigma) .$$

Si p est une semi-norme arbitraire, alors par la propriété (ii) de la Définition 2, il existe une semi-norme q telle que

$$p[T(t-\sigma-s)(f(\sigma+s) - f(\sigma))] \leq q[f(\sigma+s) - f(\sigma)] .$$

on utilise maintenant la continuité de la fonction $f(\sigma)$ pour déduire que lorsque s tend vers 0, on peut rendre le terme $q[f(\sigma+s) - f(\sigma)]$ arbitrairement petit. La démonstration est ainsi achevée.

Nous sommes alors en mesure de démontrer le lemme suivant qui nous permet de représenter les solutions de l'équation 1. La technique utilisée est la même que dans [21].

LEMME 3. Soit E un espace localement convexe complet. Toute solution de l'équation (1) s'écrit sous la forme

$$x(t) = T(t)x(0) + \int_0^t T(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma \ .$$

DÉMONSTRATION. Le lemme 1 garantit l'existence de toutes les intégrales que nous utiliserons. Appliquons $T(t-\sigma)$ de chaque côté de (1); on obtient:

$$T(t-\sigma)x'(\sigma) = T(t-\sigma)Ax(\sigma) + T(t-\sigma)f(\sigma)$$

on intègre ensuite de 0 à t :

$$(1) \qquad \int_0^t T(t-\sigma)x'(\sigma)d\sigma = \int_0^t T(t-\sigma)Ax(\sigma)d\sigma + \int_0^t T(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma \ .$$

Or

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\sigma} T(t-\sigma)x(\sigma) &= \lim_{s \to 0} \frac{T(t-\sigma-s)x(\sigma+s)-T(t-\sigma)x(\sigma)}{s} \\
&= \lim_{s \to 0} \frac{T(t-\sigma-s)x(\sigma+s)-T(t-\sigma)x(\sigma+s)}{s} \\
&+ \lim_{s \to 0} \frac{T(t-\sigma)x(\sigma+s)-T(t-\sigma)x(\sigma)}{s} \\
&= \lim_{s \to 0} T(t-\sigma) \frac{T(-s)x(\sigma+s)-x(\sigma+s)}{s} \\
&+ \lim_{s \to 0} T(t-\sigma) \frac{x(\sigma+s)-x(\sigma)}{s}
\end{aligned}$$

$$= T(t-\sigma)[\lim_{s \to 0} \frac{T(-s)-I}{s} x(\sigma+s)$$

$$+ \lim_{s \to 0} \frac{x(\sigma+s)-x(\sigma)}{s}]$$

$$= T(t-\sigma)[-Ax(\sigma)+x'(\sigma)] .$$

En effet on a évidemment $x'(\sigma) = \lim_{s \to 0} \frac{x(\sigma+s)-x(\sigma)}{s}$; d'un autre côté soit

$$\frac{T(-s)-I}{s} x(\sigma+s) = (T(-s)-I)(\frac{x(\sigma+s)-x(\sigma)}{s}) + \frac{T(-s)-I}{s} x(\sigma) .$$

Il est clair que

$$\lim_{s \to 0} \frac{T(-s)-I}{s} x(\sigma) = -Ax(\sigma) ,$$

car A est le générateur infinitésimal du groupe $\{T(t) ; t \in \mathbb{R}\}$. Par ailleurs, on peut démontrer, exactement comme le Lemme 1, le résultat suivant:

SOUS-LEMME.

$$\lim_{s \to 0} (T(-s)-I) \frac{x(\sigma+s)-x(\sigma)}{s} = \theta .$$

Par suite, on obtient

$$\lim_{s \to 0} \frac{T(-s)-I}{s} x(\sigma+s) = -Ax(\sigma) .$$

D'où

$$T(t-\sigma)x'(\sigma) = \frac{d}{d\sigma}T(t-\sigma)x(\sigma) + T(t-\sigma)Ax(\sigma) .$$

En intégrant de 0 à t , on obtient:

$$(2) \qquad \int_0^t T(t-\sigma)x'(\sigma)d\sigma = x(t)-T(t)x(0) + \int_0^t T(t-\sigma)Ax(\sigma)d\sigma$$

et en combinant (1) et (2), on obtient la formule désirée.

<u>*LEMME 4*</u>. Soit E un espace de Fréchet. Si $\{T(t)x \; ; \; t \in \mathbb{R}\}$ est relativement compact pour tout $x \in E$ et $\{f(t) \; ; \; t \in \mathbb{R}\}$ est relativement compact, alors $\{T(t)f(t); t \in \mathbb{R}\}$ est aussi relativement compact.

<u>*DÉMONSTRATION*</u>. Soit $(t''_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite réelle arbitraire donnée; alors par l'hypothèse sur $f(t)$, il existe une sous-suite $(t'_n)_{n=1}^{\infty} \subset (t''_n)_{n=1}^{\infty}$ telle que $\lim\limits_{n \to \infty} f(t'_n)$ existe dans E ; soit x cette limite.

Faisons une seconde extraction $(t_n)_{n=1}^{\infty} \subset (t'_n)_{n=1}^{\infty}$ de façon que la suite $(T(t_n)x)_{n=1}^{\infty}$ soit de Cauchy dans E , ce qui est possible à cause de la compacité relative de $\{T(t)x \; ; \; t \in \mathbb{R}\}$.

Nous allons montrer que $(T(t_n)f(t_n))_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy, ce qui achèverait la démonstration du lemme; écrivons

$$\begin{aligned} T(t_n)f(t_n)-T(t_m)f(t_m) &= [T(t_n)-T(t_m)][f(t_n)-x] \\ &\quad + [(T(t_n)-T(t_m))x] \\ &\quad + T(t_m)[f(t_n)-f(t_m)] . \end{aligned}$$

Soit p une semi-norme arbitraire; on a l'inégalité suivante:

$$p[T(t_n)f(t_n)-T(t_m)f(t_m)] \leq p[[T(t_n)-T(t_m)][f(t_n)-x]]$$

$$+ p[(T(t_n)-T(t_m))x]$$

$$+ p[T(t_m)][f(t_n)-f(t_m)]] \ .$$

Par équi-continuité de $\{T(t) \ ; \ t \in \mathbb{R}\}$, il existe une semi-norme q telle que

$$p[T(t_m)[f(t_n)-f(t_m)]] \leq q[f(t_n)-f(t_m)]$$

et

$$p[[T(t_n)-T(t_m)][f(t_n)-x]] \leq 2q[f(t_n)-x] \ .$$

On peut choisir m et n assez grands tels que:

$$q[f(t_n)-f(t_m)] < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$q[f(t_n)-x] < \frac{\varepsilon}{6}$$

$$p[(T(t_n)-T(t_m))x] < \frac{\varepsilon}{3}$$

ce qui implique que

$$p[T(t_n)f(t_n)-T(t_m)f(t_m)] < \varepsilon \ .$$

La démonstration est achevée.

Maintenant voyons le

LEMME 5. Soit E un espace de Fréchet et, considérons $\{T(t)\ ;\ t \in \mathbb{R}\}$ un groupe équi-continu de classe C_0 tel que $T(t)x : \mathbb{R} \to E$ est presque-périodique pour tout $x \in E$. Supposons que $f(t) : \mathbb{R} \to E$ est presque-périodique; alors la fonction

$$T(t)f(t) : \mathbb{R} \to E$$

est presque-périodique.

DÉMONSTRATION. Soit $U = U(\varepsilon\ ;\ p_i\ ,\ 1 \le i \le n)$ un voisinage arbitraire donné; puisque $\{T(t)\ ;\ t \in \mathbb{R}\}$ est équi-continu, à chaque semi-norme p_i, il correspond une semi-norme q_i telle que

$$p_i[T(t)x] \le q_i(x) \tag{1}$$

pour tout $x \in E$ et tout $t \in \mathbb{R}$.

Considérons le voisinage symétrique

$$V = V(\tfrac{\varepsilon}{4}\ ;\ p_i, q_i\ ,\ 1 \le i \le n)\ ;\ V+V+V+V \subset U .$$

Puisque $\{f(t)\ ;\ t \in \mathbb{R}\}$ est totalement borné (Théorème 3 du chapitre II), il existe $t_1, \ldots, t_\nu$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a:

$$f(t) \in \bigcup_{k=1}^{\nu} (f(t_k)+V) .$$

Considérons maintenant les fonctions presque-périodiques suivantes:

$$f(t)\ ,\ T(t)f(t_k)\ ,\ k = 1, \ldots, \nu .$$

Alors par le Corollaire 1 du chapitre II, elles ont les mêmes V-translations; nous pouvons donc dire qu'il existe $\ell = \ell(V) > 0$ tel que tout intervale de longueur ℓ contient un point τ tel que:

$$\text{(2)}\qquad \begin{aligned} & f(t+\tau)-f(t) \in V \\ & T(t+\tau)f(t_k)-T(t)f(t_k) \in V\ ,\ k = 1,\dots,\nu \end{aligned}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Considérons $t \in \mathbb{R}$ arbitraire; alors il existe $k(1 \leq k \leq \nu)$ tel que

$$\text{(3)}\qquad f(t) \in f(t_k)+V\ .$$

Ecrivons:

$$\begin{aligned} T(t+\tau)f(t+\tau)-T(t)f(t) &= T(t+\tau)[f(t+\tau)-f(t)] \\ &+ T(t+\tau)[f(t)-f(t_k)] \\ &+ T(t+\tau)f(t_k)-T(t)f(t_k) \\ &+ T(t)[f(t_k)-f(t)]\ . \end{aligned}$$

Soit l'inégalité suivante valable pour toute semi-norme p_i :

$$\begin{aligned} p_i[T(t+\tau)f(t+\tau)-T(t)f(t)] &\leq p_i[T(t+\tau)[f(t+\tau)-f(t)]] \\ &+ p_i[T(t+\tau)[f(t)-f(t_k)]] \end{aligned}$$

$$+ p_i[T(t+\tau)f(t_k)-T(t)f(t_k)]$$

$$+ p_i[T(t)[f(t_k)-f(t)]]$$

en utilisant (1) on majore le membre de droite par:

$$q_i[f(t+\tau)-f(t)] + q_i[f(t)-f(t_k)] + p_i[T(t+\tau)f(t_k)-T(t)f(t_k)]$$

$$+ q_i[f(t_k)-f(t)] < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

par (2) et (3).

Nous avons donc montré que

$$T(t+\tau)f(t+\tau)-T(t)f(t) \in U$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui est la presque-périodicité pour la fonction $T(t)f(t)$.

<u>THÉORÈME 2</u>. *Soit* E *un espace de Fréchet. Supposons que* $x(t)$ *est une solution à trajectoire relativement compacte de l'équation*

$$x'(t) = Ax(t)+f(t) \quad , \quad -\infty < t < \infty$$

où A *est générateur infinitésimal d'un groupe équi-continu de classe* $C_0\{T(t)\ ;\ t \in \mathbb{R}\}$ *tel que* $T(t)x : \mathbb{R} \to E$ *est* p.p. *pour chaque* $x \in E$, *et* $f(t)$ *une fonction* p.p.

Alors $x(t)$ *est* p.p.

<u>*DÉMONSTRATION*</u>. D'après le lemme 3, $x(t)$ s'écrit:

$$x(t) = T(t)x(0) + \int_0^t T(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma \ .$$

Comme $T(t)x(0)$ est p.p. , il suffit de montrer que la fonction

$$\begin{aligned} v(t) &\equiv \int_0^t T(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma \\ &= x(t)-T(t)x(0) \end{aligned}$$

est p.p. $\{v(t) \ ; \ t \in \mathbb{R}\}$ est relativement compact puisque $\{x(t) \ ; \ t \in \mathbb{R}\}$ et $\{T(t)x(0) \ ; \ t \in \mathbb{R}\}$ le sont. Par ailleurs on a:

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t T(t)T(-\sigma)f(\sigma)d\sigma \\ &= T(t)\int_0^t T(-\sigma)f(\sigma)d\sigma \end{aligned}$$

donc $T(-t)v(t) = \int_0^t T(-\sigma)f(\sigma)d\sigma$.

Par le Théorème 4 du chapitre II, $T(-t)x$ est p.p. pour tout $x \in E$, donc $\{T(-t)x \ ; \ t \in \mathbb{R}\}$ est relativement compact pour tout $x \in E$ (voir Remarque 2 du chapitre II). Par le Lemme 4, $\{T(-t)v(t) \ ; \ t \in \mathbb{R}\}$ et donc $\{\int_0^t T(-\sigma)f(\sigma)d\sigma \ ; \ t \in \mathbb{R}\}$ est relativement compact. Le Lemme 5 nous permet de dire que la fonction $T(-t)f(t)$ est p.p. , donc par le Théorème 11 du Chapitre II, $\int_0^t T(-\sigma)f(\sigma)d\sigma$ est p.p.

On applique à nouveau le Lemme 5 pour conclure que $\int_0^t T(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma$ est p.p.

Le Théorème est démontré.

<u>THÉORÈME 3.</u> *Soit* E *un espace de Fréchet. Les solutions à trajectoires relativement compactes de l'équation*

$$x'(t) = Ax(t) \ , \ -\infty < t < \infty$$

où A *est le générateur infinitésimal d'un groupe équi-continu de classe* $C_0\{T(t) \ ; \ t \in \mathbb{R}\}$ *sont précisément les solutions presque-périodiques.*

<u>DÉMONSTRATION</u>. Nous savons déjà (Remarque 2, chapitre II) que si $x(t)$ est une solution p.p. , alors elle est à trajectoire relativement compacte. Inversement soit $x(t)$ une solution telle que $\{x(t) \ ; \ t \in \mathbb{R}\}$ est relativement compacte; de toute suite réelle $(s_n')_{n=1}^{\infty}$ on peut extraire une sous-suite $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ telle que la suite $(x(s_n))_{n=1}^{\infty}$ soit de Cauchy dans E ; or on a:

$$\begin{aligned} x(t+s_n) &= T(t+s_n)x(0) \\ &= T(t)T(s_n)x(0) \\ &= T(t)x(s_n) \end{aligned}$$

pour tout n ; par suite:

$$x(t+s_n)-x(t \ s_m) = T(t)[x(s_n)-x(s_m)] \ .$$

Soit p une semi-norme arbitraire; par équicontinuité de $T(t)$, il existe une semi-norme q telle que

$$\begin{aligned} p[x(t+s_n)-x(t+s_m)] &= p[T(t)[x(s_n)-x(s_m)]] \\ &\leq q[x(s_n)-x(s_m)] \end{aligned}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$; ce qui montre que la suite $(x(t+s_n))_{n=1}^{\infty}$ est de Cauchy uniforme en t ; le critère de Bochner nous permet alors de dire que $x(t)$ est p.p.

3. INÉGALITÉ ABSTRAITE ET PRESQUE-PÉRIODICITÉ DANS LES ESPACES DE HILBERT

Nous considérons ici l'équation différentielle

$$x'(t) = Ax(t) \ , \ -\infty < t < \infty$$

dans un espace de Hilbert H muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ et de la norme $\|\cdot\|$; A est un opérateur linéaire de domaine $D(A)$ dense dans H .

Il est bien connu (voir [21] Théorème 2.1 ou [2]) que si A est un opérateur antisymétrique, alors toute solution à trajectoire relativement compacte est p.p. dans H . Nous démontrons ici un résultat analogue pour le cas où $A = A_+ + A_-$ avec A un opérateur symétrique et A_- un opérateur antisymétrique.

<u>THÉORÈME 4</u>. Supposons que $A = A_+ + A_-$ où

(i) A_+ est symétrique,

(ii) A_- est antisymétrique,

(iii) $\forall\, x \in D(A)$, $\mathrm{Re}(A_+x,A_-x) \geq -c\|A_+x\|^2$ où c est une constante telle que $c \leq 1$.

Alors toute solution à trajectoire relativement compacte de l'équation

$$x'(t) = Ax(t) \ , \ -\infty < t < \infty$$

est p.p. dans H .

DÉMONSTRATION. Considérons $y(t)$ une solution arbitraire non identiquement nulle et bornée dans H . Soit la fonction numérique

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \|y(t)\|^2 \\ &= (y(t),y(t)) \ , \ t \in \mathbb{R} \ ; \end{aligned}$$

$\phi(t)$ est aussi bornée sur $\mathbb{R}$. On a:

$$\begin{aligned} \phi'(t) = \frac{d}{dt}\phi(t) &= \frac{d}{dt}(y(t),y(t)) \\ &= (y'(t),y(t)) + (y(t),y'(t)) \\ &= (Ay(t),y(t)) + (y(t),Ay(t)) \\ &= (A_+y(t),y(t)) + (A_-y(t),y(t)) \\ &+ (y(t),A_+y(t)) + (y(t),A_-y(t)) \\ &= 2(A_+y(t),y(t)) \end{aligned}$$

à cause de (i) et (ii) .

Rappelons le résultat suivant: (voir [23],Sublema, page 56): si B est un opérateur linéaire symétrique de domaine $D(B) \subset H$ et $x(t)$ une solution de l'équation $x'(t) = Bx(t)$ alors la fonction

$b(t) = (Bx(t),x(t))$ est continûment différentiable et sa dérivée est égale à $2\,\mathrm{Re}(Bx(t),x'(t))$.

Appliqué ici cela donne:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(A_+y(t),y(t)) &= 2\,\mathrm{Re}(A_+y(t),y'(t))\\ &= 2\,\mathrm{Re}(A_+y(t),Ay(t))\\ &= 2\,\mathrm{Re}[(A_+y(t),A_+y(t))\\ &\quad + (A_+y(t),A_-y(t))]\\ &= 2\,\mathrm{Re}[\|A_+y(t)\|^2+(A_+y(t),A_-y(t))]\\ &= 2[\|A_+y(t)\|^2+\mathrm{Re}(A_+y(t),A_-y(t))]\ .\end{aligned}$$

Par suite on a:

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\phi(t) = \phi''(t) &= 4[\|A_+y(t)\|^2+\mathrm{Re}(A_+y(t),A_-y(t))]\\ &\geq 4(1-c)\|A_+y(t)\|^2\ ,\ \text{par (iii)}\end{aligned}$$

$\phi(t)$ est donc une fonction convexe de t . Etant bornée sur $\mathbb{R}$, elle est nécessairement constante. Nous pouvons donc dire:

$$\phi(t) = \phi(0)\ ,\ \text{pour tout}\ \ t \in \mathbb{R}\ ,$$

c'est-à-dire:

$$\|y(t)\|^2 = \|y(0)\|^2\ ,\ \text{pour tout}\ \ t \in \mathbb{R}\ . \tag{1}$$

Supposons maintenant que $y(t)$ est une solution à trajectoire relativement compacte dans H ; alors $y(t)$ est bornée et vérifie l'égalité (1).

Soit $s \in \mathbb{R}$ quelconque et considérons la fonction tranlatée.

$$y_s(t) = x(t+s) \quad , \quad -\infty < t < \infty \ .$$

Alors

$$y_s'(t) = Ay_s(t) \quad , \quad -\infty < t < \infty \ .$$

Donc si s_1 et s_2 sont donnés, on a:

$$(y_{s_1}(t)-y_{s_2}(t))' = A(y_{s_1}(t)-y_{s_2}(t)) \quad , \quad -\infty < t < \infty$$

et par suite

$$\|y_{s_1}(t)-y_{s_2}(t)\|^2 = \|y_{s_1}(0)-y_{s_2}(0)\|^2$$

ou encore

$$\|x(t+s_1)-x(t+s_2)\|^2 = \|x(s_1)-x(s_2)\|^2 \ .$$

On finit la démonstration en utilisant le critère de Bochner: soit $(s_n')_{n=1}^{\infty}$ une suite réelle donnée; comme $\{x(t) \ ; \ t \in \mathbb{R}\}$ est relativement compact, on extrait une sous-suite $(s_n)_{n=1}^{\infty} \subset (s_n')_{n=1}^{\infty}$ telle que $(x(s_n))_{n=1}^{\infty}$ soit de Cauchy. On a:

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t+s_n)-x(t+s_m)\|^2 = \|x(s_n)-x(s_m)\|^2 \ .$$

Ce qui montre que la suite des translatées $(x(t+s_n))_{n=1}^{\infty}$ est de Cauchy uniforme en t , d'où la presque-périodicité de $x(t)$.

CONCLUSION

Un outil essentiel dans l'étude des solutions presque-périodiques d'équations différentielles a été dans cette thèse le critère de Bochner que nous avons pu établir dans les espaces de Fréchet. Il semble intéressant, selon S. ZAIDMAN, de refaire en partie ou entièrement le présent travail, en utilisant la définition de presque-périodicité dans les espaces vectoriels topologiques proposée par S. BOCHNER et J. Von NEUMAN dans leur important mémoire [5] (Définition 1.4) et de comparer les résultats. Cet intérêt serait grand si on pouvait arriver par ce biais à démontrer les Théorèmes 1, 2 et 3 du Chapitre III sans l'hypothèse de la métrisabilité de l'espace.

Quant au Théorème 4 du Chapitre III, son intérêt réside dans le fait que le résultat bien connu pour le cas où l'opérateur A est antisymétrique ([21] Théorème 3.1) peut désormais être considéré comme un Corollaire simple; en effet on peut alors écrire $A = \theta+A$ en considérant θ l'opérateur nul comme opérateur symétrique; l'hypothèse $Re(\theta x,Ax) \geq -c\|\theta x\|^2$ est bien vérifiée dans ce cas.

REMERCIEMENTS

Qu'il me soit permis de remercier mon directeur le Professeur S. ZAIDMAN pour m'avoir guidé au cours de ce travail; je dois au Professeur A. LASCU beaucoup de reconnaissance pour avoir été la première personne à me parler d'équations différentielles.

Je ne saurais manquer de gratitude envers le Professeur P. BERTHIAUME, Directeur du département de Mathématiques et de Statistique pour sa bienveillante sollicitude.

Je dois remercier mon pays à travers son Ministère de l'Education Nationale pour l'octroi d'une bourse couvrant la période de mes études de Doctorat.

Enfin merci à Mademoiselle Thérèse OUELLET pour l'excellent travail de dactylographie que voici.

RÉFÉRENCES

[1] AMERIO, L., Funzioni debolmente quasi-periodiche, Rend. Sem. Mat. Padova, 30 (1960).

[2] AMERIO, L. and PROUSE, G., Almost-periodic functions and functional equations. Van Nostrand 1971.

[3] BESICOVITCH, A.S., Almost-periodic functions, Dover Public. Inc. 1954.

[4] BOCHNER, S. Continuous mappings of almost-automorphic and almost-periodic functions, Proc. Nat. Acad. Sc., U.S.A., Vol. 52 (1964).

[5] BOCHNER, S. and von NEUMANN, J., Almost periodic functions in groups Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 37 (1935), 21-50.

[6] CORDUNEANU, C., Almost-periodic functions, Interscience publishers 1968.

[7] FATTORINI, H.O., Ordinary differential equations in linear topological spaces, I, Journal of differential equations 5, (1968), 72-105.

[8] FINK, A.M., Almost periodic differential equations, Springer Verlag, 1974.

[9] FRECHET, M., Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques, Rev. Scientifique, 79 (1941), 341-354.

[10] GROTHENDIECK, A., Espaces vectoriels topologiques, Seconde Edition, Sociedade de Mat. de Sao Paulo, 1958.

[11] HILLE, E. and PHILIPS, R.S., Functional Analysis and Semi-groups, A.M.S. colloquium publications, vol. 31, (1957).

[12] KREIN, S.G., Linear differential equations in Banach space, Transl. of Math. Monographs, Vol. 29 (1971).

[13] LADAS, G. and LAKSHMIKANTHAM, V., Abstract differential equations, Academic Press (1972).

[14] MIYADERA, I., Semi-groups of operators in Fréchet space and applications to partial differential equations, Math. Inst., Tokyo Metro Univ. (1958), 162-183.

[15] NEUMANN von, J., Almost periodic functions in a group, Trans. Amer. Math. Soc., Vol 36 (1934), 445-492.

[16] NEUMANN von, J., On complete topological spaces, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 37 (1935), 1-20.

[17] ROBERTSON, A.P. and ROBERTSON, W., Topological vector spaces, Cambridge at the University Press, 1973.

[18] RUDIN, W., Functional Analysis, Mc Graw-Hill Book Company, 1973.

[19] YOSIDA, K., Functional Analysis, Springer Verlag, 1968.

[20] ZAIDMAN, S., Some remarks on almost periodicity, Atti della Academia delle scienze di Torino, Vol. 106 (1971-72).

[21] ZAIDMAN, S., Solutions presque-périodiques des équations différentielles abstraites, L'enseignement math., II^{e} série Tome XXIV asc. 1-2, Janvier-Juin (1978), 87-110.

[22] ZAIDMAN, S., Almost-automorphic solutions of some abstract evolution equations, Instituto Lombardo di Scienze e lettere Estratto dai Rendiconti, classe di Scienze (A) Vol. 104 (1970).

[23] ZAIDMAN, S., Abstract differential equations, Pitman Advanced Publishing Program, 1979.