

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

FACULTE DES SCIENCES

THESE DE DOCTORAT
DE 3^{eme} CYCLE EN MATHÉMATIQUES

"POLYGONE DE NEWTON ET ORDRE
DE LA DISTRIBUTION $1/f$ "

soutenue le 27 Juillet 1990 par:

Seydou Nourou Kane DIALLO

Devant le jury:

Président:	M.	Doudou Sakhir THIAM
Examineurs	MM.	Chérif BADJI Galaye DIA Edmond FEDIDA Patrick SARGOS

ANNEE UNIVERSITAIRE 1989-1990

JE DEDIE CE TRAVAIL

A MA TRES CHERE MAMAN ADIARA RA

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur Patrick SARGOS pour m'avoir proposé ce sujet, suivi et orienté mes recherches avec beaucoup de pédagogie, de disponibilité et dans une ambiance amicale.

Je remercie très sincèrement Monsieur le Professeur Roger GAY et Monsieur le Professeur Alain YGER qui n'ont jamais mesuré leur temps lors de mon séjour à Bordeaux pour m'expliquer l'intérêt du sujet et les applications pratiques qui en découlent.

Monsieur le Professeur Sakhir THIAM m'a fait l'honneur de présider le Jury, je lui en suis très reconnaissant.

Je remercie Messieurs les Professeurs C. BADJI, G. DIA E. FEDIDA pour l'intérêt qu'ils portent à ce travail et pour avoir bien voulu être Membres du Jury.

Madame Soda NDIAYE a assuré la frappe avec beaucoup de soin. Je la remercie.

Je me garderai d'oublier les collègues du département de Mathématiques qui n'ont cessé de m'encourager.

Que mes amis, qui m'ont toujours soutenu, trouvent ici ma profonde gratitude. Je citerai entre autres Sogui DIARISSO, Ousmane DIOP, Alioune NDIAYE, Moustapha NDIAYE.

P O L Y G O N E D E N E W T O N

E T O R D R E D E L A D I S T R I B U T I O N 1 / f

§ 0 INTRODUCTION

Le problème de la division des distributions, posé par Laurent SHWARTZ [8], résolu par HÖRMANDER [6] pour les polynômes et par LOJASIEWIEZ [7] pour les fonctions analytiques, s'énonce ainsi :

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{E}$ une fonction analytique réelle, S une distribution sur Ω .

Peut-on trouver une distribution T sur Ω qui vérifie l'équation

$$(0.1) \quad f \cdot T = S$$

Ce qui revient à dire que $T(f\phi) = S(\phi)$ pour toute fonction-test ϕ à support dans Ω .

Il a été démontré par ATIYAH [2] que, dans le cas important $S = 1$ le problème peut-être résolu à l'aide du problème de GELFAND [5] à savoir le prolongement méromorphe de la distribution $|f|^s$. Des méthodes concrètes de résolution des singularités de f peuvent alors être appliquées au problème de la division et on peut espérer obtenir, dans certains cas des résultats plus précis que la simple existence de solutions de (0.1).

Par exemple, l'un des problèmes les plus naturels est de majorer l'ordre de la solution d'ATIYAH de l'équation

$$(0.2) \quad f \cdot T = 1$$

Nous résoudrons entièrement ce problème dans la situation particulière suivante : Ω est un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^2 , f est à valeurs positives, admet un minimum strict à l'origine et est non dégénérée par rapport à son polygone de Newton [9], [1] ; de telles fonctions ont déjà été étudiées dans [10].

La méthode peut-être étendue à une situation beaucoup plus générale [4], avec une légère modification des résultats.

§ 1 ENONCE DES RESULTATS

Soient Ω un voisinage ouvert de $(0, 0)$ dans \mathbb{R}^2 ,
 $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction analytique réelle nulle à l'origine et
admettant un minimum strict en ce point. Nous nous intéressons à
l'ordre des distributions T , définies sur Ω , qui sont solutions
de l'équation

$$(1.1) \quad f T \equiv 1$$

(cf [2]) Nous construisons, à partir du polygone de Newton
de f , un entier $\mu(f) \geq 1$ qui vérifie les propriétés suivantes.

Théorème 1 : Si f est non dégénérée par rapport à son
polygone de Newton [9], alors, il existe une distribution T ,
solution de (1.1) dont l'ordre est $\mu(f)$.

Théorème 2 : Toute solution de (1.1) est d'ordre $\geq \mu(f)$.

Si f est dégénérée par rapport à son polygone de Newton,
le théorème 1 est faux. Un contre exemple est donné au § 2.5 .

La méthode utilisée est celle de [3], et la démonstration
revient à minimiser le nombre des intégrations par parties annoncées
dans le lemme 3.1 de [3] .

Les définitions et la construction de $\mu(f)$ sont données
au §2. La démonstration du théorème 1 fait l'objet du §3.
Celle du théorème 2, plus facile, est exposée au §4.

.../...

§ 2 PRELIMINAIRES

2.1. - Notations

Les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^2 sont notés $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ et on pose $\underline{1} = (1, 1)$, $\underline{0} = (0, 0)$.

La notation $f(x) \ll g(x)$ ($x \in X$) signifie qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $f(x) \leq c g(x) \forall x \in X$.

Le produit scalaire dans \mathbb{R}^2 est noté $\langle \lambda, \alpha \rangle = \sum_{i=1}^2 \lambda_i \alpha_i$ (où $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ et $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$).

Enfin $\mathcal{D}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions C^∞ à support compact contenu dans Ω ; $\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω et $f \cdot \mathcal{D}(\Omega)$ est l'idéal engendré par f .

Le symbole ■ à la fin d'un énoncé signifie que la démonstration ne présente pas de difficultés et a été omise.

2.2. - Fonction non dégénérée

Etant donnée la fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ analytique, réelle admettant le développement en série entière

$$f(x_1, x_2) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{ij} x_1^i x_2^j, \text{ on appelle polygone de Newton de } f$$

l'ensemble

$$(2.1) \quad \mathcal{E}(f) = \text{conv}(\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 / a_{ij} \neq 0\}) + \mathbb{R}_+^2$$

(Conv(A) désigne l'enveloppe convexe de A ; $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$).

Pour chaque face τ de $\mathcal{E}(f)$, le polynome quasi homogène associé à f est

$$(2.2) \quad f_\tau(x_1, x_2) = \sum_{(i,j) \in \tau \cap \mathbb{N}^2} a_{ij} x_1^i x_2^j$$

Nous dirons que f est non dégénérée par rapport à son polygone de Newton si, pour chaque face bornée τ de $\mathcal{E}(f)$, le gradient f'_τ ne s'annule pas en dehors des axes de coordonnées.

Exemple : $f(x, y) = x^2 + 2\theta xy + y^2$ est non dégénérée si et seulement si $\theta \neq -1$; elle admet un minimum strict si et seulement si $\theta > -1$.

2.3. - Une construction géométrique de $\mu(f)$

Soit F une face compacte de $\mathcal{L}(f)$. (Une telle face existe si f est nulle à l'origine et admet en ce point un minimum strict).

Soit D la droite affine engendrée par $F - 1$; alors D coupe chacun des axes de coordonnées. Soit t_i l'abscisse du point d'intersection de D avec le $i^{\text{ème}}$ axe de coordonnées, on désigne par $\mu_i(F)$ l'entier immédiatement supérieur à t_i autrement dit :

$$(2.3) \quad \mu_i(F) \text{ entier et } \mu_i(F) - 1 < t_i < \mu_i(F).$$

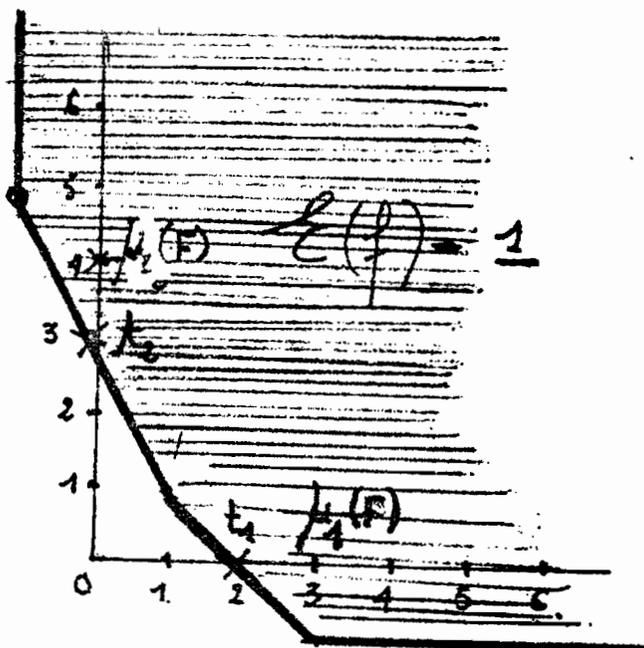
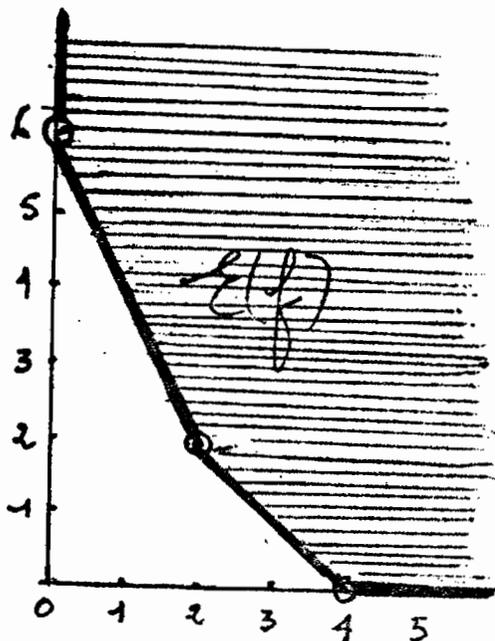
On pose alors pour toute face F de $\mathcal{L}(f)$.

$$(2.4) \quad \begin{cases} \mu(F) = \max\{\mu_1(F), \mu_2(F)\} & \text{si } F \text{ bornée} \\ \mu(F) = 0 & \text{si } F \text{ non bornée} \end{cases}$$

Soit enfin

$$(2.5) \quad \mu(f) = \max \mu(F) ; \text{ le maximum portant sur l'ensemble des faces de } \mathcal{L}(f).$$

Exemple : si $f(x, y) = x^4 + y^6 + x^2 y^2$, alors $\mu(f) = 4$
(cf figure ci-dessous)



2.4. - Une caractérisation de $\mu(f)$

Soit F une face de $\mathcal{L}(f)$. Nous appellerons covecteur associé à F le vecteur non nul $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, orthogonal à F , tel que p.g.c.d. $(\lambda_1, \lambda_2) = 1$.

Si F est bornée, alors $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 1, 2$.

Lemme 2.1 : Soit F une face bornée de $\mathcal{L}(f)$ de covecteur $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ et $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ un sommet de F . Alors $\mu(F)$ est le plus petit entier K tel que l'on ait

$$(2.6) \quad \ell = (p, q) \in \mathbb{N}^2 \text{ et } p+q = K \implies \langle \lambda, \ell \rangle \geq \langle \lambda, \alpha - \underline{1} \rangle + 1.$$

Remarque : Comme f admet un minimum strict, $\mathcal{L}(f)$ possède un sommet sur chaque axe de coordonnées. Les deux faces non bornées de $\mathcal{L}(f)$ sont donc contenues dans les axes de coordonnées et leurs covecteurs sont $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. Pour ces faces, l'analogie de (2.6) s'écrit

$$(2.7) \quad \langle \lambda, \alpha - \underline{1} \rangle + 1 = 0.$$

2.5. - Un contre exemple

Si f est dégénérée, alors le théorème 1 est faux. Plus précisément, il existe f_k , admettant un minimum strict à l'origine, tel que $\mu(f_k) = 1$ et tel que toute solution de (1.1) soit d'ordre $\geq N_k$ avec $\lim_{k \rightarrow +\infty} N_k = +\infty$

En effet, posons $f_k(x, y) = (x - y)^2 + x^{2k}$

D'après la construction géométrique du §2.3, on a $\mu(f_k) = 1$.

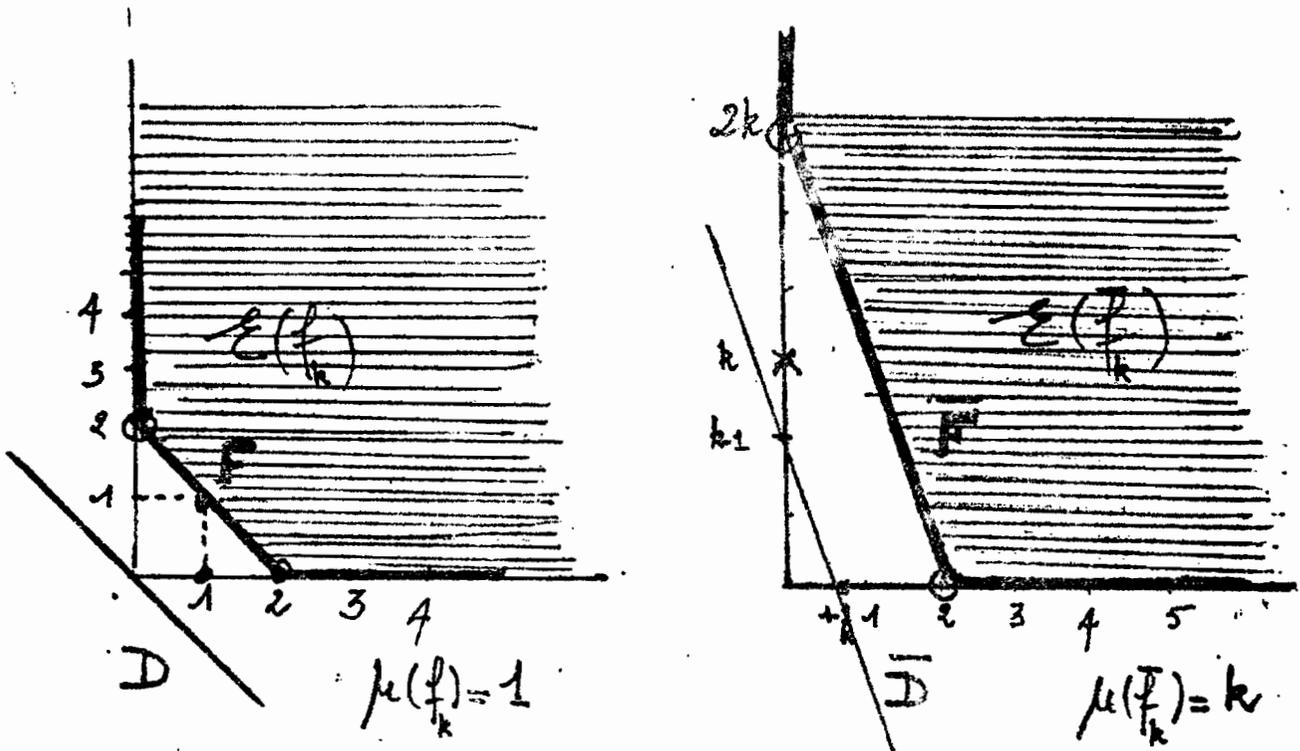
Faisons maintenant le changement de variables suivant

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x \end{cases} \quad \text{et posons } \bar{f}_k(u, v) = u^2 + v^{2k}$$

$$\bar{f}_k(u, v) = f_k(x, y).$$

On a alors $\mu(\bar{f}_k) = k$, ce qui fournit le contre exemple cherché d'après le Théorème 2.

.../...



§ 3 DEMONSTRATION DU THEOREME 1

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction analytique réelle admettant un minimum strict à l'origine, non dégénérée par rapport à son polygone de Newton, nous allons construire une distribution T sur Ω d'ordre $< \mu(f)$ vérifiant (1.1) c'est-à-dire vérifiant

$$(3.1) \quad T(\phi) = \int_{\Omega} \frac{\phi(x, y)}{f(x, y)} dx dy \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

La méthode de [3] utilisant un découpage et des partitions de l'unité s'applique à notre problème en vertu du principe suivant.

Lemme 3.1 : Soit $(\sigma_i)_{i \in I}$ une famille finie de mesures sur Ω

telles que $\sum_{i \in I} \sigma_i$ soit égale à la mesure de Lebesgue sur Ω

Considérons l'équation

$$(3.2) \quad f T = \sigma_i$$

Supposons que pour chaque i , il existe $T_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$ solution

de (3.2). Alors $T = \sum_{i \in I} T_i$ est solution de (1.1) dans Ω .

3.1. - Découpages

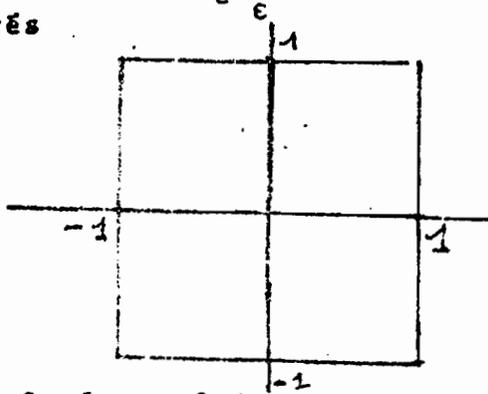
Un découpage d'une partie mesurable A de \mathbb{R}^2 est une partition de A à des ensembles négligeables près (cf [3] §2.1).

a) Découpage de $[-1, 1]^2$

Pour tout $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (\pm 1, \pm 1)$ on pose

$$C_\varepsilon = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \varepsilon_i x_i \leq 1 \quad i = 1, 2\}.$$

La famille (C_ε) forme un découpage de $[-1, 1]^2$ en quatre carrés



Par le lemme 3.1 nous sommes ramenés à résoudre, pour chaque ε , l'équation

$$(3.3) \quad T(\phi) = \int_{C_\varepsilon} \frac{\phi(x_1, x_2)}{T(x_1, x_2)} dx_1 dx_2 \quad \phi \in \mathcal{L}(\Omega)$$

Par symétrie, nous nous restreindrons au cas où $C_\varepsilon = [0, 1]^2$.

b) Découpage de $[0, 1]^2$ par polarité

Désignons par F_0, F_1, \dots, F_R les faces de $\mathcal{L}(f)$ rangées par pente croissante (de $-\infty$ à 0) et par $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_R$ leurs covecteurs respectifs. Pour chaque $r = 1, \dots, R$ soit

$$\Gamma_r = \mathbb{R}_+ \lambda_{r-1} + \mathbb{R}_+ \lambda_r \quad \text{le cône convexe engendré par } \lambda_{r-1} \text{ et } \lambda_r.$$

Alors la famille $(\Gamma_r)_{1 \leq r \leq R}$ forme un découpage de \mathbb{R}_+^2

Considérons l'application

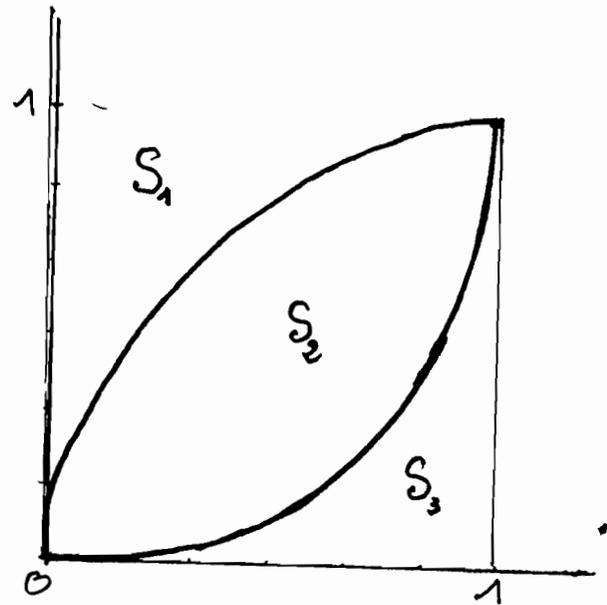
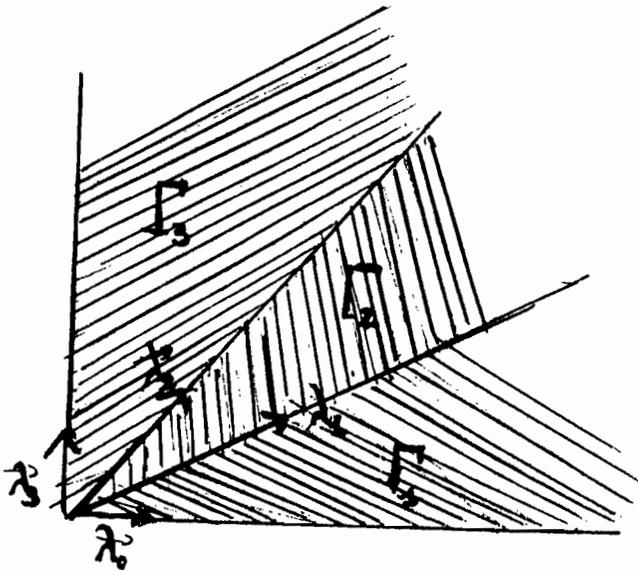
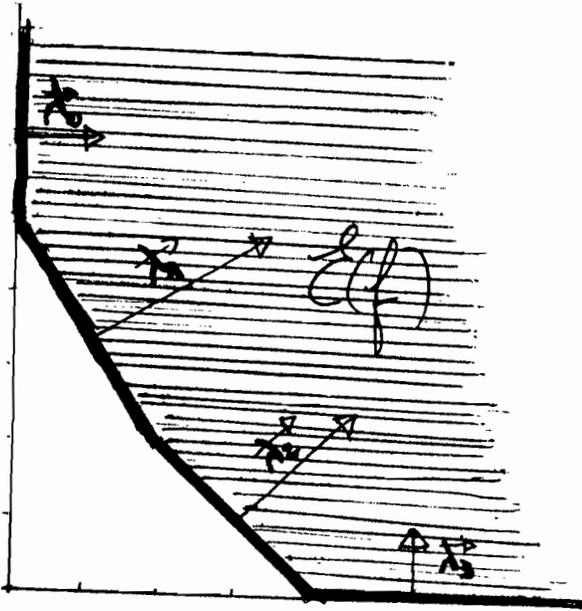
$$\mathcal{L} : [0, 1]^2 \xrightarrow{\nu} \mathbb{R}_+^2$$

$$(x_1, x_2) \longrightarrow (-\log x_1, -\log x_2)$$

Alors la famille

$$(3.4) \quad (S_r)_{1 \leq r \leq R} = (\mathcal{L}^{-1}(\Gamma_r))_{1 \leq r \leq R}$$

forme un découpage de $[0, 1]^2$.



Soient F et G deux faces adjacentes de $\mathcal{L}(f)$, de covecteurs respectifs λ et γ et soit $S = \mathcal{L}^{-1}(\mathbb{R}_+\lambda + \mathbb{R}_+\gamma)$. La démonstration du théorème 1 se ramène à celle du

.../...

Lemme 3.2. : Soit S un élément du découpage (3.4).

Alors il existe une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ d'ordre $\leq \max\{\mu(F), \mu(G)\}$ telle que l'on ait

$$(3.5) \quad T(\phi) = \int_S \frac{\phi(x, y)}{f(x, y)} dx dy \quad \phi \in f \cdot \mathcal{D}(\Omega).$$

En effet, en appliquant le lemme 3.2 à chaque élément du découpage ci-dessus, on obtient grâce au lemme 3.1 une solution T dont l'ordre est $\leq \mu(f)$. Mais le théorème 2 (dont la démonstration est indépendante) implique que cette solution est en fait d'ordre $\mu(f)$.

A partir d'ici, on fixe F et G et par conséquent aussi λ, γ et S .

3.2. - Le Changement de variable ω associé à F et G

On considère l'application

$$(3.6) \quad \omega : [0, 1]^2 \xrightarrow{\sim} [0, 1]^2$$

$$(u, v) \longrightarrow (x, y) = (u^{\lambda_1} v^{\gamma_1}, u^{\lambda_2} v^{\gamma_2})$$

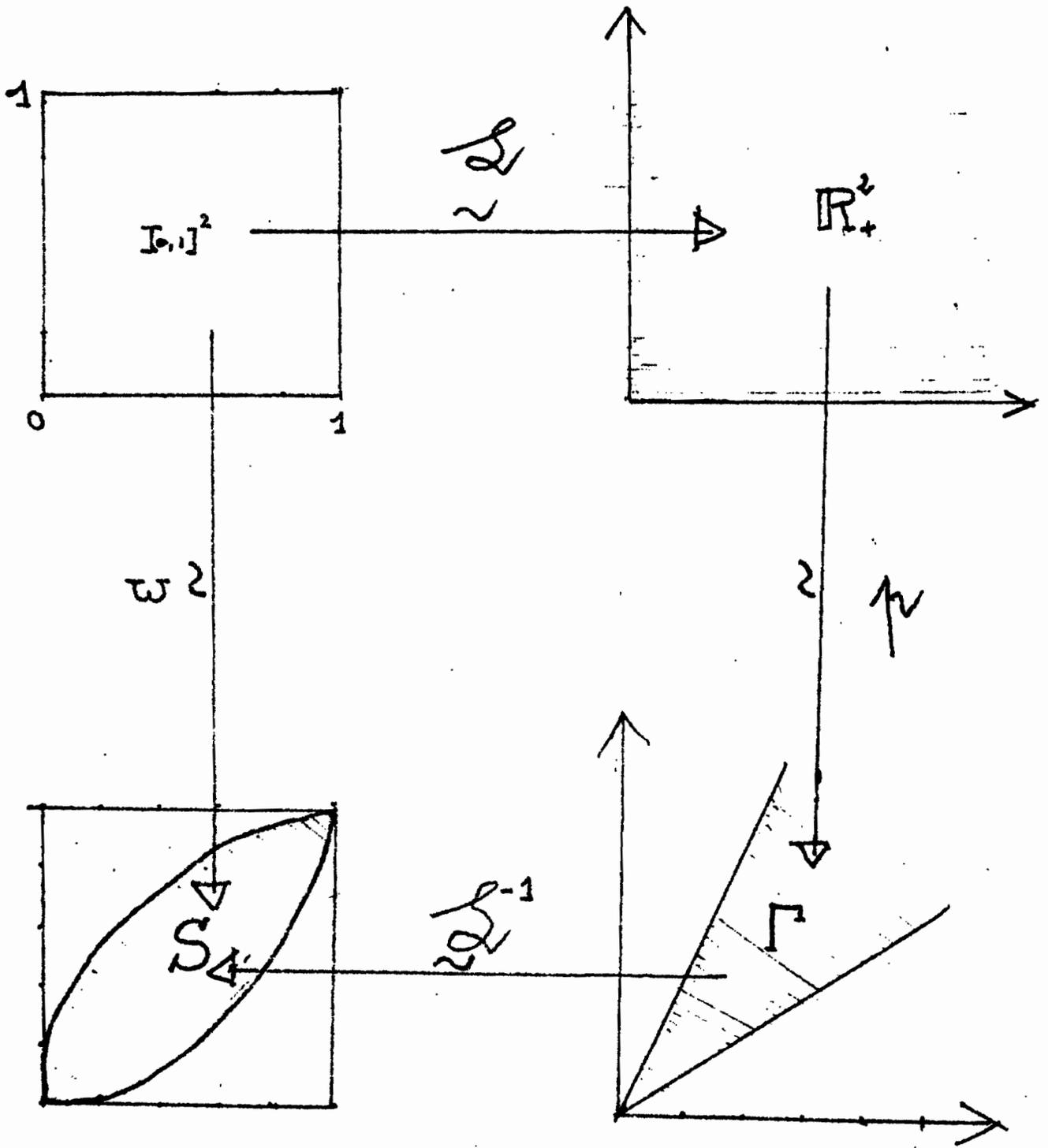
La restriction de ω à $]0, 1[^2$ peut-être définie par le diagramme

$$(3.7) \quad \begin{array}{ccc}]0, 1[^2 & \xrightarrow{\omega} & \mathbb{R}_+^2 \\ \omega \downarrow & & \downarrow p \\ S & \xleftarrow{\omega^{-1}} & \Gamma \end{array}$$

où p est l'application $p : \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+^2$

$$(t_1, t_2) \longrightarrow t_1^\lambda + t_2^\gamma$$

.../...



Les propriétés de l'application ω peuvent être résumées comme suit

Lemme 3.3 : Soit α le sommet commun à F et G ;

$m = \langle \lambda, \alpha \rangle$ et $n = \langle \gamma, \alpha \rangle$. Alors il existe une fonction analytique réelle f^* définie dans un voisinage W de $\omega^{-1}(\underline{0})$ telle que l'on ait les deux propriétés suivantes :

$$(3.8) \quad f \circ \omega (u, v) = u^m v^n f^*(u, v) \quad (u, v) \in W \cap [0, 1]^2$$

$$(3.9) \quad \text{si } (u_0, v_0) \in \omega^{-1}(\underline{0}) \text{ alors } f^*(u_0, v_0) \neq 0$$

Démonstration

Posant $f(x, y) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \cap \mathcal{L}(f)} a_{ij} x^i y^j$ on a

$$f \circ \omega (u, v) = \sum_{i,j} a_{ij} u^{\langle \lambda, (i,j) \rangle} v^{\langle \gamma, (i,j) \rangle}$$

mais pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2 \cap \mathcal{L}(f)$, on a $\langle \lambda, (i, j) \rangle \geq m$ et $\langle \gamma, (i, j) \rangle \geq n$, par convexité.

On vérifie alors que la série entière

$$f^*(u, v) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \cap \mathcal{L}(f)} a_{ij} u^{\langle \lambda, (i,j) \rangle - m} v^{\langle \gamma, (i,j) \rangle - n}$$

converge au voisinage de $\omega^{-1}(\underline{0})$; ce qui prouve (3.8).

Pour montrer (3.9), on utilise le lemme 9 du §8 de [1] qui caractérise l'hypothèse de non dégénérescence en termes de f^* . Cela peut se résumer ainsi.

Soit $(u_0, v_0) \in \omega^{-1}(\underline{0})$. Notons que $f^*(\underline{0}) = a_{\alpha_1 \alpha_2} \neq 0$ avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$.

Supposons que $f^*(u_0, v_0) = 0$; alors nécessairement $u_0 = 0$ et $v_0 \neq 0$ ou $u_0 \neq 0$ et $v_0 = 0$. Si on prend $u_0 = 0$ et $v_0 \neq 0$, la fonction $v \rightarrow f^*(0, v)$, à valeurs positives, admet un minimum en v_0 , ce qui implique que $\partial_2 f^*(u_0, v_0)$ est nul. Ce dernier point contredit l'hypothèse de non dégénérescence (cf [1]).

C.Q.F.D.

.../...

D'après (3.7), la formule de changement de variables appliquée à l'intégrale (3.5) s'écrit :

$$(3.10) \quad \int_S \frac{\phi(x, y)}{f(x, y)} dx dy = \Delta \int_{[0, 1]^2} \frac{\phi(u, v)}{f^*(u, v)} u^{-v_1} v^{-v_2} du dv$$

où on a posé $\Delta = |\det(\lambda, \gamma)|$ et

$$(3.11) \quad \begin{cases} v_1 = \langle \lambda, \alpha - \underline{1} \rangle + 1 \\ v_2 = \langle \gamma, \alpha - \underline{1} \rangle + 1 \end{cases}$$

3.3. - Utilisation d'une partition de l'Unité

A l'aide de la formule (3.10) et d'une partition de l'unité, on peut ramener la démonstration du lemme 3.2 au résultat suivant :

Lemme 3.4 : Pour chaque $(u_0, v_0) \in \omega^{-1}(\underline{0})$, il existe un voisinage ouvert U de (u_0, v_0) , $U \subset W$ tel que, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(U)$, la forme linéaire L définie sur $f. \mathcal{D}(\Omega)$ par

$$(3.12) \quad L(\phi) = \int_{[0, 1]^2} \phi(\omega(u, v)) \frac{\phi(u, v)}{f^*(u, v)} u^{-v_1} v^{-v_2} du dv$$

se prolonge en une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ d'ordre $\leq \max\{\mu(F), \mu(G)\}$.

Le lemme 3.2 se déduit du lemme 3.4 comme suit : pour chaque $(u_0, v_0) \in \omega^{-1}(\underline{0})$, soit U comme dans le lemme 3.4.

Extrayons de cet ensemble d'ouverts un recouvrement fini

U_1, \dots, U_N de $\omega^{-1}(\underline{0})$ et posons $W_1 = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_N$.

Choisissons un voisinage compact W_0 de $\omega^{-1}(\underline{0})$, $W_0 \subset W_1$.

Construisons une famille ρ_1, \dots, ρ_N ; $\rho_i \in \mathcal{D}(U_i)$ pour $i=1, \dots, N$

telle que $\sum_i \rho_i \equiv 1$ sur W_0 . Notons $L_i(\phi)$ l'intégrale (3.12)

correspondant à ρ_i . Par le lemme 5.2 de [3], il existe un voisinage V de $\underline{0}$ dans \mathbb{R}^2 tel que $\omega^{-1}(V) \subset W_0$.

Si $\phi \in f. \mathcal{D}(V)$ on a $\int_S \frac{\phi(x, y)}{f(x, y)} dx dy = \sum_{i=1}^N L_i(\phi)$ d'après (3.10).

On conclut avec le lemme 3.1.

Il nous reste à démontrer le lemme 3.4.

.../...

3.4. - Démonstration du lemme 3.4

Nous devons envisager les trois cas suivants :

$(u_0, v_0) = \underline{0}$, $u_0 = 0$ et $v_0 \neq 0$, $u_0 \neq 0$ et $v_0 = 0$.

Nous nous contenterons d'étudier le premier cas, les deux autres étant plus simples. Nous supposons donc $(u_0, v_0) = \underline{0}$.

a) Construction de U

Nous choisissons U assez petit pour que f^* ne s'annule pas dans U et tel que

(3.13) $U \subset]-\infty, 1[\times]-\infty, 1[$

(dans le cas $u_0 = 0$ et $v_0 \neq 0$, l'analogie de (3.13) aurait été

$U \subset]-\infty, 1[\times \mathbb{R}$)

Nous allons montrer que L peut-être prolongée en une distribution sur Ω d'ordre $\leq \max\{\mu(F), \mu(G)\}$.

b) La formule d'intégration par parties

Établissons les conventions suivantes :

- θ désigne un élément de $\mathcal{D}(U)$ non nécessairement le même à chaque écriture.
- $B(t)$ désigne une fonction égale à $a + b \log t$ (a, b réels) non nécessairement la même à chaque écriture.

Par exemple, $\partial_j \theta(u, v)$ s'écrit encore $\theta(u, v)$ et $t^{-\beta+1} B(t)$ est une primitive de $t^{-\beta} B(t)$.

Avec ces notations, la formule d'intégration par parties par rapport à u ou par rapport à v admet l'écriture simplifiée suivante :

Lemme 3.5 : Soient $\ell = (p, q)$ $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, $\phi \in f. \mathcal{D}(\Omega)$
 alors on a

$$\int_{[0,1]^2} \partial_1^p \partial_2^q \phi(\omega(u,v)) \theta(u,v) u^{-v_1 + \langle \lambda, \ell \rangle + k_1} B_1(u) v^{-v_2 + \langle \gamma, \ell \rangle + k_2} B_2(v) du dv =$$

$$\int_{[0,1]^2} \partial_1^{p+1} \partial_2^q \phi[\omega(u,v)] \theta(u,v) u^{-v_1 + \langle \lambda, \ell + e_1 \rangle + k_1} B_1(u) v^{-v_2 + \langle \gamma, \ell \rangle + k_2} B_2(v) du dv +$$

$$\int_{[0,1]^2} \partial_1^p \partial_2^{q+1} \phi(\omega(u,v)) \theta(u,v) u^{-v_1 + \langle \lambda, \ell + e_2 \rangle + k_1} B_1(u) v^{-v_2 + \langle \gamma, \ell \rangle + k_2} B_2(v) du dv$$

$$+ \int_{[0,1]^2} \partial_1^p \partial_2^q \phi[\omega(u,v)] \theta(u,v) u^{-v_1 + \langle \lambda, \ell \rangle + k_1 + 1} B_1(u) v^{-v_2 + \langle \gamma, \ell \rangle + k_2} B_2(v) du dv$$

$$= \int_{[0,1]^2} \partial_1^{p+1} \partial_2^q \phi[\omega(u,v)] \theta(u,v) u^{-v_1 + \langle \lambda, \ell \rangle + k_1} B_1(u) v^{-v_2 + \langle \gamma, \ell + e_1 \rangle + k_2} B_2(v) du dv +$$

$$+ \int_{[0,1]^2} \partial_1^p \partial_2^{q+1} \phi[\omega(u,v)] \theta(u,v) u^{-v_1 + \langle \lambda, \ell \rangle + k_1} B_1(u) v^{-v_2 + \langle \gamma, \ell + e_2 \rangle + k_2} B_2(v) du dv +$$

$$\int_{[0,1]^2} \partial_1^p \partial_2^q \phi[\omega(u,v)] \theta(u,v) u^{-v_1 + \langle \lambda, \ell \rangle + k_1} B_1(u) v^{-v_2 + \langle \gamma, \ell \rangle + k_2 + 1} B_2(v) du dv$$

$$+ \int_{[0,1]^2}$$

La première égalité est obtenue en intégrant par parties par rapport à u : on prend une primitive de la fonction

$$u \longrightarrow u^{-v_1 + \langle \lambda, \ell \rangle + k_1} B_1(u) \text{ et on dérive la fonction}$$

$$u \longrightarrow \partial_1^p \partial_2^q \phi[\omega(u,v)] \theta(u,v).$$

La seconde égalité est obtenue en utilisant le même procédé par rapport à v .

Les termes aux bords sont nuls d'après (3.13) et d'après le résultat suivant :

Lemme 3.6 : Soit $\phi \in f. \mathcal{D}(\Omega)$ et $\ell = (p, q) \in \mathbb{N}^2$, alors la

fonction $(u,v) \longrightarrow \partial_1^p \partial_2^q \phi(\omega(u,v)) u^{-v_1 + \langle \lambda, \ell \rangle} v^{-v_2 + \langle \gamma, \ell \rangle}$
 est bornée dans $[0,1]^2$.

Démonstration du lemme 3.6.

Posons $\phi = f\psi$. Le calcul de $\partial_1^p \partial_2^q f\psi$ par la formule de Leibnitz nous ramène à la majoration

$$\partial_1^p \partial_2^q f(\omega(u, v)) \ll u^{v_1 - \langle \lambda, \ell \rangle} v^{v_2 - \langle \gamma, \ell \rangle} \quad ((u, v) \in [0, 1]^2).$$

Ecrivons $\partial_1^p \partial_2^q f(x, y) = \sum_{(t,s) \in \mathbb{N}^2 \cap \mathcal{L}(f)} C_{t,s} x^t y^s$ avec t, s

tels que $C_{t,s} \neq 0$ donc $\partial_1^{p+t} \partial_2^{q+s} f(0,0) \neq 0$ par conséquent

$(p+t, q+s) \in \mathcal{L}(f)$ alors

$$\langle \lambda, (p+t, q+s) \rangle \geq m \geq v_1$$

$$\langle \gamma, (p+t, q+s) \rangle \geq n \geq v_2$$

Dans l'expression

$$\partial_1^p \partial_2^q f(\omega(u, v)) = \sum_{(t,s) \in \mathbb{N}^2 \cap \mathcal{L}(f)} C_{t,s} u^{\langle \lambda, (t,s) \rangle} v^{\langle \gamma, (t,s) \rangle}$$

on peut mettre en facteurs le terme $u^{v_1 - \langle \lambda, \ell \rangle} v^{v_2 - \langle \gamma, \ell \rangle}$ ce qui prouve le lemme 3.6 et avec lui le lemme 3.5.

C) Intégrations par parties successives lorsque $v_1 > 0$ et $v_2 > 0$

L'hypothèse $v_1 > 0$ et $v_2 > 0$ implique que les faces F et G sont bornées. On peut donc caractériser $\mu(F)$ et $\mu(G)$ à l'aide du lemme 2.1. Nous avons donc

$$(3.14) \begin{cases} \ell = (p, q) \in \mathbb{N}^2 & \text{et } p+q \geq \mu(F) \implies \langle \lambda, \ell \rangle \geq v_1 \\ \ell = (p, q) \in \mathbb{N}^2 & \text{et } p+q \geq \mu(G) \implies \langle \gamma, \ell \rangle \geq v_2 \end{cases}$$

Nous appliquons maintenant le lemme 3.5 en intégrant par parties l'intégrale (3.13) par rapport à u . Nous obtenons

$$\begin{aligned} L(\phi) &= \int_{[0,1]^2} \partial_1 \phi[\omega(u,v)] \theta(u,v) u^{-v_1+1} v^{v_2} B(u) du dv + \\ &+ \int_{[0,1]^2} \partial_2 \phi[\omega(u,v)] \theta(u,v) u^{-v_1} v^{-v_2+1} B(v) du dv + \\ &+ \int_{[0,1]^2} \phi[\omega(u,v)] \theta(u,v) u^{-v_1+1} v^{-v_2} B(u) du dv. \end{aligned}$$

Nous allons à nouveau intégrer par parties par rapport à u ceux des termes ci-dessus dont l'exposant de u est < 0 et nous laissons tels quels les autres termes.

.../...

Au bout de cette deuxième opération, nous avons obtenu $L(\phi)$ sous la forme d'une somme d'au plus 3^2 termes.

A nouveau, nous intégrons par parties par rapport à u tous les termes dont l'exposant de u est < 0 sans modifier les autres et ainsi de suite.

Au bout de v_1 opérations, nous aurons montré que $L(\phi)$ est égale à la somme d'au plus 3^{v_1} termes de la forme

$$(3.15) \int_{[0,1]^2} \partial_1^{p_1} \partial_2^{q_1} \phi(\omega(u,v)) \theta(u,v) u^{-v_1 + \langle \lambda, \ell_1 \rangle + k_1} B_1(u) v^{-v_2 + \langle \gamma, \ell_2 \rangle + k_2} du dv$$

avec $k_1 \in \mathbb{N}$ $\ell_1 = (p_1, q_1) \in \mathbb{N}^2$ $k_1 \leq v_1$, $p_1 + q_1 \leq \mu(\lambda)$, $\langle \lambda, \ell_1 \rangle + k_1 \geq v_1$

La deuxième inégalité est due au fait que l'exposant de u augmente au moins de 1 à chaque opération, jusqu'à ce qu'il soit positif.

On recommence maintenant le même procédé avec la variable v . Parmi tous les termes de (3.15), on laisse tels quels ceux dont l'exposant de v est ≥ 0 et on intègre par parties par rapport à v les autres et ainsi de suite.

Au bout de v_2 opérations, nous aurons exprimé $L(\phi)$ comme somme d'au plus $3^{v_1 + v_2}$ opérations de la forme

$$(3.16) \int_{[0,1]^2} \partial_1^{p_1 + p_2} \partial_2^{q_1 + q_2} \phi(\omega(u,v)) \theta(u,v) u^{-v_1 + \langle \lambda, \ell_1 + \ell_2 \rangle + k_1} B_1(u) v^{-v_2 + \langle \lambda, \ell_1 + \ell_2 \rangle + k_2} B_2(v) du dv$$

avec k_1 et k_2 entiers $\ell_2 = (p_2, q_2) \in \mathbb{N}^2$, $k_1 \leq v_1$, $k_2 \leq v_2$

$$\langle \lambda, \ell_1 + \ell_2 \rangle + k_2 \geq v_2.$$

.../...

En particulier les exposants de u et v sont positifs et $p_1 + p_2 + q_1 + q_2 \leq \max\{\mu(F), \mu(G)\}$.

L'expression (3.16) montre que L , définie initialement pour $\phi \in f \mathcal{D}(\Omega)$ se prolonge en une distribution sur \mathbb{R}^2 d'ordre $\leq \max\{\mu(F), \mu(G)\}$.

d) Si $v_1 = 0$ (ou si $v_2 = 0$) le même procédé reste valable : on intègre par parties seulement par rapport à v (ou par rapport à u).

Le Théorème 1 est entièrement démontré.

§ 4 - DEMONSTRATION DU THEOREME 2

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction analytique, réelle admettant à l'origine un minimum strict, ce qui implique $\mu(f) > 0$.

Le théorème 2 est une conséquence du résultat suivant :

Lemme 4.1. : Il existe une suite de fonctions $\phi_k \in f \cdot \mathcal{D}(\Omega)$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$(4.1) \quad \phi_k \geq 0$$

$$(4.2) \quad \partial_1^p \partial_2^q \phi_k(x_1, x_2) \ll 1 \quad ((p, q) \in \mathbb{N}^2 \text{ et } p + q < \mu(f) ; \\ k \in \mathbb{N}, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2)$$

$$(4.3) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \int \frac{\phi_k(x_1, x_2)}{f(x_1, x_2)} dx_1 dx_2 = +\infty.$$

Démonstration du lemme 4.1 :

Soit F une face de $\mathcal{E}(f)$ telle que $\mu(F) = \mu(f)$. Comme $\mu(f) > 0$, F est compacte et il existe $j, (1 \leq j \leq 2)$ tel que $\mu_j(F) = \mu(F)$. Prenons par exemple $j = 1$.

Soit alors $N = \mu(f) - 1$

Posons

$$\rho_k(t) = \begin{cases} t^N e^{-\frac{1}{kt}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

.../...

(4.4) $\phi_k(x_1, x_2) = \rho_k(x_1) \chi(x_1, x_2)$ avec

$\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\chi(x_1, x_2) \equiv 1$ au voisinage de $\underline{0}$, $0 \leq \chi \leq 1$.

La vérification de (4.1) et (4.2) est aisée. Pour voir que ϕ_k est dans $f \cdot \mathcal{D}(\Omega)$, on peut utiliser l'inégalité de LOJASIEWICZ ([7], §17) qui montre que $\frac{1}{f}$ est à croissance modérée au voisinage de $\underline{0}$ alors que ϕ_k est à décroissance rapide ainsi que toutes ses dérivées.

Il nous reste à établir (4.3).

Soient λ le covecteur associé à α et α un sommet de F . Choisissons G la face adjacente à F ayant pour sommet α et de covecteur γ . Le cône $\Gamma = \mathbb{R}_+ \lambda + \mathbb{R}_+ \gamma$ est alors d'intérieur non vide.

Posons $v_1 = \langle \lambda, \alpha - 1 \rangle + 1$ et $v_2 = \langle \gamma, \alpha - 1 \rangle + 1$.

A l'aide du changement de variable ω (cf §3.2) on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^2} \frac{\phi_k(x_1, x_2)}{f(x_1, x_2)} dx_1 dx_2 &\geq \int_{\mathcal{L}^{-1}(\Gamma)} \frac{\phi_k(x_1, x_2)}{f(x_1, x_2)} dx_1 dx_2 \\ &= \Delta \int_{[0,1]^2} \frac{\phi_k(\omega(u, v))}{f^{\#}(u, v)} u^{-v_1} v^{-v_2} du dv \\ &>> \int_{[0,1]^2} \phi_k(\omega(\tilde{u}, \tilde{v})) u^{-v_1} du dv \quad (k \geq 1) \end{aligned}$$

En posant $t = u^{\lambda_1} v^{\gamma_1}$ et à l'aide d'inégalités faciles, on voit que cette dernière intégrale est

$$>> \int_0^1 e^{-\frac{1}{kt}} t^N - (v_1 - 1) / \lambda_1 \frac{dt}{t}$$

Mais d'après (2.3), l'exposant $N - (v_1 - 1) / \lambda_1$ est < 0 . Ce qui prouve (4.3) : le lemme 4.1 est démontré et avec lui le théorème 2.

B I B L I O G R A P H I E

- [1] - V. ARNOLD, A. VARCHENKO, S. GOUSEIN-ZADE :
"Singularité des applications différentiables"
Tome 2, Editions Mir, Moscou.
- [2] - M. F. ATIYAH : "Resolution of singularities and division of
distributions", Comm. pure Appl. Math., Vol 23
145-150 (1970).
- [3] - J. DENEFF et P. SARGOS : "Polyedre de Newton et distribution f_+^s "
Journal d'Analyse Mathématique, Vol. 53, 201-218 (1989).
- [4] - S.N. DIALLO et P. SARGOS : "Sur l'ordre de la distribution $\frac{1}{x}$ "
en préparation.
- [5] - I. M. GUELFAND et G. E. CHILOV : "Les distributions" DUNOD
- [6] - L. HÖRMANDER : "On the division of distributions by polynomials"
Ark. Mat., Vol 3, 1958, p. 555-568.
- [7] - S. LOJASIEWICZ : "Sur le problème de la division"
Studia Math., Vol 18, 1959, p. 87-136.
- [8] - L. SCHWARTZ : "Theorie des distributions", Hermann - Paris (1959)
- [9] - A. N. VARCHENKO : "Newton polyhedra and estimation of oscillating
integrals", Funkts-Analyz., Vol. 10,
N°3, 13-38 (1976).
- [10] - V. A. VASILIEV : "Asymptotic behaviour of exponential integrals,
Newtons diagram and classification of minimal points"
Funkts. Analys. Vol. 13, N°4, 1-12 (1979).
