THÈSE

DE DOCTORAT DE TROISIÈME CYCLE DE MATHÉMATIQUES PURES

présentée

A L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE
DE GRENOBLE

par

Emmanuel AYASSOU

VARIETES PRESQUE γ - KAEHLERIENNES

Soutenue le 25 mai 1973 devant la commission d'examen

C.CHABAUTY Président

J. KLEIN
J.L. KOSZUL Examinateurs

TABLE DES MATIERES

	Pages
INTRODUCTION	1
Chapitre I - VARIETES γ-COMPLEXES	3
1. Extensions quadratiques du corps $\mathbb{R}$ des réels	3
2. Champs de vecteurs γ-complexes	4
3. Formes γ-complexes	5
4. Variétés presque γ-complexes	6
Chapitre II - CONNEXIONS PRESQUE γ-COMPLEXES	9
1. Repères adaptés	9
2. Connexions presque γ-complexes	10
3. Construction	14
Chapitre III - STRUCTURES PRESQUE γ-HERMITIENNES	16
1. Définition et existence	16
2. Repères presque γ-hermitiens adaptés	19
3. Connexion presque γ-hermitienne	22
Chapitre IV - STRUCTURES PRESQUE γ-KAEHLERIENNES	24
1. Forme de Kaehler	24
2. Variété γ-kaehlérienne en coordonnées locales	29
3. Sur les formes J-harmoniques	32
BIBLIOGRAPHIE	40

-oo0oo-

INTRODUCTION

Il paraît intéressant de pouvoir regrouper les résultats obtenus pour les structures presque tangentes, presque complexes, et presque produit dans un seul et unique formalisme. L'introduction des structures γ-complexes en offre une possibilité. Monsieur J. Grifone dans son travail de troisième cycle a défini les variétés γ-complexes ainsi que les champs de vecteurs et les formes γ-complexes. Le but de ce travail est de donner une suite à son oeuvre et d'étudier en particulier les notions de connexion sur les variétés presque γ-complexes.

Le premier chapitre est consacré aux rappels sur les champs de vecteurs et les formes γ-complexes, ainsi qu'à la définition d'une structure γ-complexe et presque γ-complexe.

Dans le second chapitre, nous définissons d'abord la notion de repère adapté en un point d'une variété presque γ-complexe ; nous introduisons ensuite les connexions presque γ-complexes comme étant des connexions linéaires sur le fibré principal défini par les repères adaptés. Nous démontrons qu'une telle connexion peut être caractérisée par le fait que la différentielle absolue du tenseur J définissant la structure presque γ-complexe est nulle. La définition des tenseurs de courbure, de torsion et de Ricci demeurant la même que dans le cas réel, nous ne la donnons pas explicitement mais indiquons quand cela paraît intéressant quelques propriétés de celles-ci.

Nous définissons au troisième chapitre une structure presque γ-hermitienne comme étant la donnée d'un triplet (M_{2n}, J, g) où M_{2n}

.../...

est une variété différentiable réelle de dimension paire $2n$; J un tenseur de type $(1,1)$ définissant sur M_{2n} une structure presque γ-complexe et g un tenseur de type $(0,2)$, non dégénéré en tout point de M_{2n} satisfaisant à la condition : $i_J g = 0$. Nous introduisons les repères presque γ-hermitiens adaptés et définissons les connexions presque γ-hermitiennes comme des connexions linéaires sur le fibré principal des repères presque γ-hermitiens adaptés. Nous démontrons qu'une telle connexion peut être caractérisée par le fait que la différentielle absolue des deux tenseurs J et g est nulle.

Au quatrième chapitre, nous généralisons la définition de la forme de Kähler Ω pour les structures presque γ-hermitiennes et indiquons quelques propriétés de Ω . Entre autre, nous établissons l'équivalence entre le fait que la forme de Kähler est fermée et que la connexion canonique associée à la métrique g est une connexion presque γ-hermitienne.

La plupart des résultats de ce travail ne sont connus que pour $\gamma = -1$ (structures presque complexes).

Comment saurais-je exprimer ma profonde et respectueuse gratitude à Monsieur le Professeur J. KLEIN pour avoir accepté de diriger mon travail et pour le soutien qu'il n'a cessé de m'apporter pour sa réalisation.

Je suis reconnaissant à Messieurs les Professeurs C. CHABAUTY et J.L. KOSZUL pour l'honneur qu'ils me font en présidant le jury et en en faisant partie.

Définition.

Un champ de vecteurs $X \in T$ sera dit de type $(1,0)$ (resp. de type $(0,1)$) si :

$$\bar{S}X = 0 \qquad \text{(resp. } SX = 0)$$

où S et $\bar{S}$ sont les 1-formes vectorielles définies sur T par :

$$S = \frac{1}{2}(J+jI)$$

$$\bar{S} = \frac{1}{2}(J-jI) \quad .$$

On note $T^{1,0}$ le $\mathfrak{A}$-module des champs de vecteurs de type $(1,0)$ et $T^{0,1}$ celui des champs de type $(0,1)$.

Remarquons que :

a) Si $X \in T^{1,0}$ alors $\bar{X} \in T^{0,1}$

b) Dans le cas $\gamma = 0$, $T^{1,0} \cap T^{0,1} \neq \{0\}$

c) $[T^{0,1}, T^{0,1}] \subset T^{0,1}$ si et seulement si $N_J = 0$.

Définition.

Etant donné $\omega \in A^{p+q}$ $(p \leq n, q \leq n)$, on dit que ω est de type (p^*,q) (resp. de type (p,q^*) si $q \neq 0$) et on note $\omega \in A^{p^*,q}$ (resp. $\omega \in A^{p,q^*}$) si :

$$\omega(X_1, X_2, \ldots, X_{p+q}) = 0$$

chaque fois que la suite $(X_1, \ldots, X_{p+q})$ comporte plus de q éléments de type $(0,1)$ (resp. plus de p éléments de type $(1,0)$).

Proposition.

1) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $\omega \in A^{p^*,0}$

b) $i_{\bar{S}}\omega = 0$

c) $i_S\omega = pj\omega$

d) $i_J\omega = pj\omega$.

2) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $\omega \in A^{o,q^*}$

b) $i_S\omega = 0$

c) $i_{\bar{S}}\omega = -qj\omega$

d) $i_{J}\omega = -qj\omega$.

La différentiation extérieure des formes γ-complexes est un endomorphisme d du F-module A qui possède les propriétés suivantes :

a) $dA^p \subset A^{p+1}$

b) $d(\alpha\wedge\beta) = d\alpha\wedge\beta + (-1)^p\alpha\wedge d\beta$ si $\alpha \in A^p$;

c) $d^2 = 0$

d) $d\bar{\alpha} = \overline{d\alpha}$

e) $(df)X = X.f$ pour tout f dans F et tout X dans T

f) $$d\omega(X_1,X_2,\ldots,X_{p+1}) = \sum_{i=1}^{i=p+1} (-1)^{i+1} X_i\omega(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_{p+1}) +$$

$$+ \sum_{1\leq i<j\leq p+1} (-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_{p+1}) .$$

CHAPITRE II

CONNEXIONS PRESQUE γ-COMPLEXES

1. REPERES ADAPTES.

Définition.

Etant donné une structure presque γ-complexe (M_{2n},J), on appelle repère adapté d'origine $p \in M$, une base $(e_\alpha, e_{\alpha*})$ $(\alpha = 1,\dots,n,$ $\alpha* = n+\alpha)$ de $T_p(M)$ telle que $e_{\alpha*} = J_p(e_\alpha)$.

Existence des repères adaptés.

Cas $\gamma = 0$.

Il suffit de prendre n vecteurs linéairement indépendants (e_α) dans un complémentaire du noyau de J_p et de poser $e_{\alpha*} = J_p(e_\alpha)$. Les vecteurs $(e_\alpha, e_{\alpha*})$ sont linéairement indépendants ; en effet :

$\Sigma\lambda^\alpha e_\alpha + \Sigma\lambda^{\alpha*}e_{\alpha*} = 0$ entraîne $\Sigma\lambda^{\alpha*}e_{\alpha*} = 0$ soit $J_p(\Sigma\lambda^{\alpha*}e_\alpha) = 0$ c'est-à-dire $\Sigma\lambda^{\alpha*}e_\alpha \in \ker J_p$; mais par hypothèse les e_α n'appartiennent pas à $\ker J_p$, donc $\Sigma\lambda^{\alpha*}e_\alpha = 0$; d'où $\lambda^{\alpha*} = 0$.

Cas $\gamma = 1$.

Désignons par (E^+_α) une base de l'espace T^+_p des vecteurs propres correspondant à la valeur propre +1 et par (E^-_α) une base de T^-_p, espace des vecteurs propres correspondant à la valeur propre -1.

On pose :

$$e_\alpha = E^+_\alpha + E^-_\alpha$$
$$e_{\alpha*} = E^+_\alpha - E^-_\alpha .$$

Cas $\gamma = -1$.

Semblable au cas $\gamma = 1$, à la différence que T_p^+ désigne l'espace des vecteurs propres associés à la valeur propre $+j$ et T_p^- l'espace des vecteurs propres associés à la valeur propre $-j$. On pose :

$$e_\alpha = E_\alpha^+ + E_\alpha^-$$
$$e_{\alpha*} = j(E_\alpha^+ - E_\alpha^-) .$$

Proposition II.1.

L'ensemble $\mathfrak{B}(M)$ de tous les repères adaptés a une structure de fibré principal de groupe structural L^γ

$$L^\gamma = \{\begin{pmatrix} B & \gamma C \\ C & B \end{pmatrix} \in GL(2n, \mathfrak{U})\} .$$

Démonstration : Il suffit de voir que $\mathfrak{B}(M)$ est un sous-fibré du fibré des repères linéaires γ-complexe de M .

2. CONNEXIONS PRESQUE γ-COMPLEXES.

Définition.

On appelle connexion presque γ-complexe sur (M_{2n}, J) toute connexion linéaire sur le fibré des repères adaptés.

Proposition II.2.

Soit Γ une connexion linéaire γ-complexe sur M et D sa dérivation absolue. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1) Γ est une connexion presque γ-complexe.
2) $DJ = 0$.

Démonstration : Etant donné un recouvrement de M_{2n} par des voisinages ouverts U_ϵ , munis de sections locales du fibré des repères adaptés, une connexion presque γ-complexe peut être définie par la donnée dans chaque U_ϵ d'une 1-forme ω_{U_ϵ} à valeurs dans l'algèbre de Lie de L^γ . Une telle forme peut être représentée en tout point $p \in M$ par une matrice (π^j_i) d'ordre 2n , dont les éléments sont des 1-formes. On aura donc localement :

$$\pi_{U_\epsilon} = \left(\begin{array}{c|c} \pi^\alpha_\beta & \pi^{\alpha*}_\beta = \gamma\pi^\alpha_{\beta*} \\ \hline \pi^\alpha_{\beta*} & \pi^{\alpha*}_{\beta*} = \pi^\alpha_\beta \end{array}\right) \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & \gamma I \\ I & 0 \end{pmatrix} .$$

Par suite :

$$\begin{aligned} DJ^\alpha_\beta &= dJ^\alpha_\beta + \pi^\alpha_\rho J^\rho_\beta + \pi^\alpha_{\rho*} J^{\rho*}_\beta - \pi^\rho_\beta J^\alpha_\rho - \pi^{\rho*}_\beta J^\alpha_{\rho*} \\ &= \pi^\alpha_{\rho*} J^{\rho*}_\beta - \pi^{\rho*}_\beta J^\alpha_{\rho*} = \gamma\, \pi^\alpha_{\rho*}\delta^{\rho*}_{\beta*} - \gamma\pi^\rho_{\beta*}\delta^\alpha_\rho \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DJ^{\alpha*}_{\beta*} &= dJ^{\alpha*}_{\beta*} + \pi^{\alpha*}_\rho J^\rho_{\beta*} + \pi^{\alpha*}_{\rho*} J^{\rho*}_{\beta*} - \pi^\rho_{\beta*} J^{\alpha*}_\rho - \pi^{\rho*}_{\beta*} J^{\alpha*}_{\rho*} \\ &= \pi^{\alpha*}_\rho J^\rho_{\beta*} - \pi^\rho_{\beta*} J^{\alpha*}_\rho = \gamma\pi^\alpha_{\rho*}\delta^{\rho*}_{\beta*} - \gamma\pi^\rho_{\beta*}\delta^\alpha_\rho \\ &= \gamma(\pi^\alpha_{\beta*} - \pi^\alpha_{\beta*}) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DJ^\alpha_{\beta*} &= dJ^\alpha_{\beta*} + \pi^\alpha_\rho J^\rho_{\beta*} + \pi^\alpha_{\rho*} J^{\rho*}_{\beta*} - \pi^\rho_{\beta*} J^\alpha_\rho - \pi^{\rho*}_{\beta*} J^\alpha_{\rho*} \\ &= \pi^\alpha_\rho J^\rho_{\beta*} - \pi^{\rho*}_{\beta*} J^\alpha_{\rho*} = \pi^\alpha_\rho \delta^\rho_\beta - \pi^{\rho*}_{\beta*}\delta^{\alpha*}_{\rho*} \\ &= \pi^\alpha_\beta - \pi^{\alpha*}_{\beta*} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DJ^{\alpha*}_\beta &= dJ^{\alpha*}_\beta + \pi^{\alpha*}_\rho J^\rho_\beta + \pi^{\alpha*}_{\rho*} J^{\rho*}_\beta - \pi^\rho_\beta J^{\alpha*}_\rho - \pi^{\rho*}_\beta \delta^{\alpha*}_{\rho*} \\ &= \pi^{\alpha*}_{\rho*} J^{\rho*}_\beta - \pi^\rho_\beta J^{\alpha*}_\rho = \gamma(\pi^{\alpha*}_{\rho*}\delta^{\rho*}_{\beta*} - \pi^\rho_\beta\delta^\alpha_\rho) \\ &= \gamma(\pi^{\alpha*}_{\beta*} - \pi^\alpha_\beta) = 0 \quad . \end{aligned}$$

Inversement, si on se donne des 1-formes à valeurs dans l'algèbre de Lie de $GL(2n,A)$ correspondant à une connexion sur M_{2n} telle que $DJ = 0$, alors on a :

$$\pi_{U_\varepsilon} = \begin{pmatrix} \pi^{\alpha}_{\beta} & \pi^{\alpha^*}_{\beta} = \gamma\pi^{\alpha}_{\beta^*} \\ \pi^{\alpha}_{\beta^*} & \pi^{\alpha^*}_{\beta^*} = \pi^{\alpha}_{\beta} \end{pmatrix} .$$

Donc, ces formes prennent leurs valeurs dans l'algèbre de Lie de L^{γ} et sont des formes d'une connexion presque γ-complexe.

Proposition II.3.

Etant donné une variété différentiable réelle M_{2n} et une connexion linéaire γ-complexe Γ sur M_{2n}, les affirmations suivantes sont équivalentes :

1) Γ est une connexion presque γ-complexe d'une structure presque γ-complexe sur M_{2n}.

2) Le groupe d'holonomie de Γ en tout point est sous-groupe de L^{γ}.

Démonstration : 1) $\Rightarrow$ 2) : évident.

2) $\Rightarrow$ 1) : Supposons qu'au point $p \in M_{2n}$, il existe un repère R_p pour lequel le groupe d'holonomie soit sous-groupe ψ_{R_p} de L^{γ}. Les éléments de ψ_{R_p} sont donc de la forme $\begin{pmatrix} B & \gamma C \\ C & B \end{pmatrix}$.

Considérons le tenseur $t(p)$ en p, de type $(1,1)$ défini dans la base R_p par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \gamma I \\ I & 0 \end{pmatrix}$. Ce tenseur est invariant par le groupe ψ_{R_p} car pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} B & \gamma C \\ C & B \end{pmatrix}$ nous avons :

$$A^{-1}JA = J \quad \text{si} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & \gamma I \\ I & 0 \end{pmatrix} .$$

D'après le théorème suivant, il existe sur M_{2n} un tenseur (qu'on notera J) dont la dérivée absolue est nulle et ce tenseur vérifie $J^2 = \gamma I$.

Lemme (voir [8] page 113).

Tout champ de tenseurs à dérivée covariante nulle sur une variété différentiable M détermine en tout point $p \in M$ un tenseur invariant par ψ_{R_p}.

Inversement, de tout tenseur en p , invariant par ψ_{R_p} , on déduit par transport un champ de tenseur défini sur M et à dérivée covariante nulle.

La connexion Γ est donc telle que $DJ = 0$, d'après la proposition II.2, c'est une connexion presque γ-complexe.

Proposition II.4.

Soit $\mathcal{T}$ et R la torsion et la courbure d'une connexion presque γ-complexe Γ sur (M_{2n},J) ; on a :

1) $\mathcal{T}(JZ,JW) - J\mathcal{T}(JZ,W) - J\mathcal{T}(Z,JW) + \gamma\mathcal{T}(Z,W) = -N_J(Z,W)$

2) $R(Z,W)\circ J = J\circ R(Z,W)$.

Démonstration :

1) En remplaçant $\mathcal{T}(U,V)$ par sa valeur

$$\mathcal{T}(U,V) = D_U V - D_V U - [U,V]$$

on a quels que soient Z et W dans T :

$$\mathcal{T}(JZ,JW) - J\mathcal{T}(JZ,W) - J\mathcal{T}(Z,JW) + \gamma\mathcal{T}(Z,W) =$$

$$- [JZ,JW] + J[JZ,W] + J[Z,JW] - \gamma[Z,W] + D_{JZ}JW - JD_{JZ}W + JD_{JW}Z$$
$$+ \gamma D_Z W - JD_Z JW - \gamma D_W Z + JD_W JZ - D_{JW}JZ$$

$$= -N_J(Z,W) + (D_{JZ}J)W - (D_{JW}J)Z - J(D_Z J)W + J(D_W J)Z$$
$$= -N_J(Z,W) \ .$$

2) $$R(Z,W)JU = D_Z D_W JU - D_W D_Z JU - D_{[Z,W]}JU$$
$$= JD_Z D_W U - JD_W D_Z U - JD_{[Z,W]}U$$
$$= JR(Z,W)U \ .$$

3. CONSTRUCTION DES CONNEXIONS PRESQUE γ-COMPLEXES DANS LE CAS $\gamma \neq 0$.

Sur l'ensemble $\mathcal{K}$ des applications bilinéaires de $T\times T$ dans T . On définit les projecteurs conjugués ρ et ρ' par :

$$\rho L(Z,W) = \frac{1}{2}(L(Z,W) + \gamma J L(Z,JW))$$

$$\rho' L(Z,W) = \frac{1}{2}(L(Z,W) - \gamma J L(Z,JW))$$

on vérifie que :

a) $\rho+\rho' =$ identité

b) $\rho\circ\rho' = \rho'\circ\rho = 0$

c) $\rho\circ\rho = \rho$ et $\rho'\circ\rho' = \rho'$.

Lemme 1.

Etant donné un élément $L_o \in \mathcal{K}$, une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $\rho L = L_o$ (resp. $\rho' L = L_o$) admette une solution en L est que L_o satisfasse à la relation : $\rho' L_o = 0$ (resp. $\rho L_o = 0$) .

La solution générale de l'équation est alors $L = L_o + \rho' L_1$ (resp. $L = L_o + \rho L_1$) où L_1 est un élément arbitraire de $\mathcal{K}$.

Démonstration : Supposons que L_2 soit solution de l'équation $\rho L = L_o$, $\rho L_2 = L_o$ entraîne $\rho'\rho L_2 = \rho' L_o$ soit $\rho' L_o = 0$

Inversement, si L_o est tel que $\rho' L_o = 0$; alors puisque $\rho+\rho' =$ identité on a (identité $-\rho)L_o = 0$ soit $\rho L_o = L_o$. L'équation $\rho L = L_o$ devient alors $\rho L = \rho L_o$ soit $\rho(L-L_o) = 0$, c'est-à-dire $\rho L' = 0$ si $L' = L-L_o$; mais $\rho' L' = L'$ entraîne $L = L_o + \rho' L'$.

Lemme 2.

En posant $D_Z W = \mathring{D}_Z W + L(Z,W)$ avec $L \in \mathcal{K}$ les affirmations suivantes sont équivalentes :

1) $(D_Z J)W = 0$

2) $\rho' L(Z,W) = \frac{1}{2}\gamma J(\mathring{D}_Z J)W$ pour tous Z et W dans T .

Démonstration :

$$(D_Z J)W = \overset{\circ}{D}_Z JW + L(Z,JW) - J\overset{\circ}{D}_Z W - JL(Z,W)$$

$$= 0 \Leftrightarrow (\overset{\circ}{D}_Z J)W = JL(Z,W) - L(Z,JW)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\gamma J(\overset{\circ}{D}_Z J)W) = \frac{1}{2}[L(Z,W)-\gamma JL(Z,JW)]$$

$$= \rho' L(Z,W) .$$

Remarque.

Dans le cas général

$$(D_Z J)W = 0 \Leftrightarrow (\overset{\circ}{D}_Z J)W = JL(Z,W) - L(Z,JW) .$$

Proposition II.5.

Dans le cas $\gamma = \pm 1$, (M_{2n},J) admet une connexion presque γ-complexe dont la torsion $\mathcal{T}$ vérifie :

$$\gamma N_J + 4\mathcal{T} = 0 .$$

Démonstration : On considère une connexion $\overset{\circ}{D}$ symétrique (c'est-à-dire dont la torsion $\overset{\circ}{\mathcal{T}}$ est nulle) et on pose :

$$L(Z,W) = \frac{\gamma}{4}[(\overset{\circ}{D}_{JW}J)Z + J(\overset{\circ}{D}_W J)Z + 2J(\overset{\circ}{D}_Z J)W] .$$

Il faut vérifier que $\rho' L(Z,W) = \frac{1}{2}\gamma J(\overset{\circ}{D}_Z J)W$

$$\begin{aligned} \rho' L(Z,W) &= \frac{1}{2}(L(Z,W) - \gamma JL(Z,JW)) \\ &= \frac{\gamma}{8}((\overset{\circ}{D}_{JW}J)Z + J(\overset{\circ}{D}_W J)Z + 2J(\overset{\circ}{D}_Z J)W - \gamma J(\overset{\circ}{D}_{J^2W}J)Z \\ &\qquad - \gamma J^2(\overset{\circ}{D}_{JW}J)Z - 2\gamma J^2(\overset{\circ}{D}_Z J)JW) \\ &= \frac{\gamma}{2}J(\overset{\circ}{D}_Z J)W . \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(Z,W) &= L(Z,W) - L(W,Z) \\ &= \frac{\gamma}{4}((\overset{\circ}{D}_{JW}J)Z + J(\overset{\circ}{D}_W J)Z + 2J(\overset{\circ}{D}_Z J)W - (\overset{\circ}{D}_{JZ}J)W - J(\overset{\circ}{D}_Z J)W - 2J(\overset{\circ}{D}_W J)Z) \\ &= \frac{\gamma}{4}((\overset{\circ}{D}_{JW}J)Z - (\overset{\circ}{D}_{JZ}J)W - J(\overset{\circ}{D}_W J)Z + J(\overset{\circ}{D}_Z J)W) \\ &= -\frac{\gamma}{4} N_J(Z,W) . \end{aligned}$$

CHAPITRE III

STRUCTURES PRESQUE γ-HERMITIENNES

1. DEFINITIONS ET EXISTENCE.

On appelle métrique pseudo-riemannienne sur une variété presque γ-complexe (M_{2n}, J), une forme bilinéaire g sur le F-module T des champs de vecteurs γ-complexes qui vérifie les conditions suivantes :

a) $\bar{g} = g$;

b) g est symétrique c'est-à-dire $g(X,Y) = g(Y,X)$ pour tous X, Y dans T ;

c) Pour tout X dans T, l'application $\ell : Y \to \ell(Y) = g(X,Y)$ de T dans le module des 1-formes est bijective.

La métrique g est dite γ-hermitienne si $i_J g = 0$. On appelle structure presque γ-hermitienne un triplet (M_{2n}, J, g), où g est une métrique γ-hermitienne et (M_{2n}, J) une structure presque γ-complexe.

<u>Proposition III.1.</u>

1) <u>Si</u> g <u>est une métrique</u> γ-<u>hermitienne alors</u> :

a) $g(X,JX) = 0$ <u>pour tout</u> X <u>dans</u> T.

b) $g(X,Y) = 0$ <u>si</u> X <u>et</u> Y <u>sont du même type</u>.

2) <u>Si</u> g <u>est une métrique pseudo-riemannienne sur</u> (M_{2n}, J) <u>alors</u> :

$$i_J g = 0 \Leftrightarrow g(JX,Y) + g(X,JY) = 0 \text{ pour tous } X,Y \text{ dans } T$$

$$\Rightarrow g(JX,JY) + \gamma g(X,Y) = 0 \text{ pour tous } X \text{ et } Y \text{ dans } T.$$

Démonstration : Seule l'assertion 1-b) demande une justification :

- dans le cas $\gamma \neq 0$; supposons que X et Y soient tels que $JX = jX$; $JY = jY$, alors $0 = g(JX,Y) + g(X,JY) = 2jg(X,Y)$ entraîne $g(X,Y) = 0$.

- dans le cas $\gamma = 0$; posons $X = X_1 + jX_2$; $Y = Y_1 + jY_2$ où X_1 , X_2 , Y_1 , Y_2 sont des champs de vecteurs réels.

$$JX = jX \Leftrightarrow X = JX_2 + jX_2$$

$$JY = jY \Leftrightarrow Y = JY_2 + jY_2 \ ;$$

par suite :

$$\begin{aligned} g(X,Y) &= g(JX_2,JY_2) + \gamma g(X_2,Y_2) + j(g(JX_2,Y_2) + g(X_2,JY_2)) \\ &= 0 \ . \end{aligned}$$

Existence d'une métrique γ-hermitienne.

Si $\tilde{g}$ est une métrique γ-hermitienne définie sur le module des champs de vecteurs réels sur M , on en déduit une métrique γ-hermitienne g définie sur le module des champs de vecteurs γ-complexes en posant :

$$g(X_1+jX_2,Y_1+jY_2) = \tilde{g}(X_1,Y_1) + \gamma\tilde{g}(X_2,Y_2) + j\tilde{g}(X_1,Y_2) + j\tilde{g}(X_2,Y_1)$$

quels que soient les champs de vecteurs réels X_1 , X_2 , Y_1 , Y_2 .

Il reste donc à construire $\tilde{g}$.

a) Cas $\gamma \neq 0$.

Si h est une métrique pseudo-riemannienne sur M , le tenseur $\tilde{g}$ défini par :

$$\tilde{g}(X,Y) = h(X,Y) - \gamma h(JX,JY)$$

est une métrique γ-hermitienne.

b) Cas $\gamma = 0$.

Lemme 1.

Si h est une forme bilinéaire symétrique sur $T_{\mathbb{R}}$, non dégénérée sur $\ker J$, alors la forme $\psi(X,Y) = h(JX,Y) - h(X,JY)$ est antisymétrique et non dégénérée sur $T_{\mathbb{R}}$.

En effet, dire que $\psi(X,Y) = 0$ pour tout Y dans $T_{\mathbb{R}}$ équivaut à $h(JX,Y) - h(X,JY) = 0$ pour tout Y dans $T_{\mathbb{R}}$ ce qui entraîne $h(JX,Y) = 0$ pour tout Y dans $\ker J$; par suite $JX = 0$. Mais $JX = 0$ équivaut à X appartient à $\ker J$; ce qui entraîne $h(X,JY) = 0$ pour tout $Y \in T_{\mathbb{R}}$. D'où $X = 0$.

Lemme 2.

Si k est une forme bilinéaire antisymétrique et non dégénérée sur $\ker J$, alors la forme $\tilde{g}(X,Y) = k(X,JY) + k(Y,JX)$ est une métrique γ-hermitienne .

On démontre que $\tilde{g}$ est non dégénérée d'une façon analogue au lemme 1.

Remarque :

Dans le cas $\gamma = 0$ toute variété réelle M , munie d'une structure presque γ-hermitienne a pour dimension réelle un multiple de 4 .

En effet, la matrice de la métrique g , dans un repère adapté (e_α, e_{α^*}) est de la forme :

$$G = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 \\ -G_2 & -\gamma G_1 \end{pmatrix}$$

avec ${}^tG_1 = G_1$; ${}^tG_2 = -G_2$.

Par suite, si $\gamma = 0$, $\det(G) = (\det(G_2))^2$ n'est différent de zéro que si la matrice G_2 est d'ordre pair.

2. REPERES PRESQUE γ-HERMITIENS ADAPTES.

Soit (M_{2n}, J, g) une structure presque γ-hermitienne avec $n = 2m$ et soit $G_o = \begin{pmatrix} 0 & K \\ -K & 0 \end{pmatrix}$ avec $K = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_m \\ \hline -I_m & 0 \end{array}\right)$; I_m = matrice unité d'ordre m .

Définition.

On appelle repère presque γ-hermitien d'origine $p \in M_{2n}$, un repère (e_α, e_{α^*}) d'origine p , adapté dans lequel la matrice de g est G_o .

Existence des repères presque γ-hermitiens adaptés.

Lemme.

Dans le cas $\gamma \neq 0$, désignons par T^+ l'espace propre associé à la valeur propre 1 si $\gamma = 1$ ou j si $\gamma = -1$ et par T^- l'espace propre associé à la valeur propre -1 si $\gamma = 1$ ou $-j$ si $\gamma = -1$. On a : $g(Z,W) = 0$ si Z et W appartiennent tous deux à T^+ ou tous deux à T^- .

Démonstration :

Cas $\gamma = 1$. Si $Z \in T^+$, $W \in T^+$ on a : $JZ = Z$ et $JW = W$; par suite : $g(Z,W) = g(JZ,JW) = -g(Z,W)$ d'où $g(Z,W) = 0$. De même si $Z \in T^-$ et $W \in T^{-1}$ on a : $JZ = -Z$, $JW = -W$, $g(Z,W) = g(JZ,JW) = -g(Z,W)$ d'où $g(Z,W) = 0$.

Cas $\gamma = -1$. Dire que Z et W appartiennent à T^+ ou à T^- signifie qu'ils sont du même type ; d'où le résultat.

a) Cas $\gamma = 1$.

Soit (E^+_α) une base de T^+ et (E^-_α) une base de T^- . On pose $u_1 = \sum \xi^\alpha_1 E^+_\alpha$ et on cherche à déterminer les ξ^α_1 tel que l'on ait

$g(u_1, E_\beta^-) = \delta_{1\beta}$.

La résolution donne lieu à un système de Cramer d'ordre n qui admet une solution unique.

De la même façon, on peut déterminer $u_2, u_3, \dots, u_n$ tels que $g(u_\alpha, E_\beta^-) = \delta_{\alpha\beta}$.

Enfin, on pose pour α tel que $1 \le \alpha \le m$

$$e_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_\alpha + E_{\alpha+m}^-)$$

$$e_{\alpha+m} = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_{\alpha+m} - E_\alpha^-) \quad .$$

Pour tous α et β avec $1 \le \alpha \le m$, $1 \le \beta \le m$

$$\begin{aligned} g(e_\alpha, e_\beta) &= \frac{1}{2} g(u_\alpha + E_{\alpha+m}^-, u_\beta + E_{\beta+m}^-) \\ &= \frac{1}{2} g(u_\alpha, E_{\beta+m}^-) + \frac{1}{2} g(E_{\alpha+m}^-, u_\beta) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(e_\alpha, e_{\beta*}) &= \frac{1}{2} g(u_\alpha + E_{\alpha+m}^-, Ju_\beta + JE_{\beta+m}^-) \\ &= \frac{1}{2} g(u_\alpha + E_{\alpha+m}^-, u_\beta - E_{\beta+m}^-) \\ &= -\frac{1}{2} g(u_\alpha, E_{\beta+m}^-) + g(E_{\alpha+m}^-, u_\beta) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(e_\alpha, e_{(\beta+m)_*}) &= \frac{1}{2} g(u_\alpha + E_{\alpha+m}^- , Ju_{\beta+m} - JE_\beta^-) \\ &= \frac{1}{2} g(u_\alpha + E_{\alpha+m}^- , u_{\beta+m} + E_\beta^-) \\ &= \frac{1}{2} g(u_\alpha, E_\beta^-) + \frac{1}{2} g(E_{\alpha+m}^-, u_{\beta+m}) \\ &= \delta_{\alpha,\beta} \end{aligned}$$

$$g(e_{\beta+m}, e_{\alpha*}) = \frac{1}{2} g(u_{\beta+m} - E^-_\beta \ , \ Ju_\alpha + JE^-_{\alpha+m})$$

$$= \frac{1}{2} g(u_{\beta+m} - E^-_\beta \ , \ u_\alpha - E^-_{\alpha+m})$$

$$= -\frac{1}{2} g(u_{\beta+m}, E^-_{\alpha+m}) - \frac{1}{2} g(E^-_\beta, u_\alpha)$$

$$= -\delta_{\beta\alpha} \quad .$$

Ainsi la matrice de g dans la base $(e_\alpha, e_{\alpha*})$ est G_o .

b) Cas $\gamma = -1$. Méthode semblable à la précédente.

On désigne par (E^+_α) et (E^-_α) des bases de T^+ et T^- respectivement. On construit (u_α) une base de T^+ telle que $g(u_\alpha, E^-_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$ et on pose :

$$\left.\begin{aligned} e_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}} (u_\alpha + E^-_{\alpha+m}) \\ e_{\alpha+m} &= \frac{-i}{\sqrt{2}} (u_{\alpha+m} - E^-_\alpha) \end{aligned}\right\} \qquad \text{pour} \quad 1 \leq \alpha \leq m \quad .$$

c) Cas $\gamma = 0$.

Il s'agit de trouver une matrice inversible P de la forme $P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & A \end{pmatrix}$ telle que l'on ait ${}^t pGp = G_o$ où G est la matrice de g dans une base adaptée quelconque. G est donc de la forme : $G = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 \\ -G_2 & 0 \end{pmatrix}$ avec ${}^tG_1 = G_1$, ${}^tG_2 = -G_2$. L'équation ${}^t pGp = G_o$ équivaut au système $\begin{cases} {}^tAG_2A = K \\ {}^tAG_1A - {}^tBG_2A + {}^tAG_2B = 0 \end{cases}$. L'équation ${}^tAG_2A = K$ admet des solutions. D'autre part, en posant $D = G_2A$ et $C = {}^tAG_1A$, la deuxième équation devient :

$${}^tBD + {}^tDB = C$$

ce qui équivaut à :

$$Z + {}^tZ = C \qquad \text{si} \qquad Z = {}^tBD$$

équation qui admet une infinité de solutions si C est symétrique (ce qui est le cas).

Définition.

Une matrice carrée d'ordre $2n$, U , sera dite orthogonale par rapport à la métrique g si ${}^{t}UG_{o}U = G_{o}$.

Remarque :

Si U est orthogonale par rapport à g on a $(\det U)^{2} = 1$ car $\det G_{o} = 1$.

Proposition.

Etant donné une structure presque γ-hermitienne, les matrices de passage d'une base presque γ-hermitienne à une autre sont des matrices orthogonales par rapport à la métrique.

Proposition.

L'ensemble G_{H} des matrices orthogonales est un sous-groupe de Lie de L^{γ} .

Démonstration : Si ${}^{t}UG_{o}U = G_{o}$ et ${}^{t}VG_{o}V = G_{o}$, alors :

$$ {}^{t}(UV)G_{o}(UV) = {}^{t}V({}^{t}UG_{o}U)V = {}^{t}VG_{o}V = G_{o} $$

${}^{t}(U^{-1})G_{o}U^{-1} = G_{o}$ par multiplication de la première relation par U^{-1} à droite et par ${}^{t}U^{-1}$ à gauche.

3. CONNEXION PRESQUE γ-HERMITIENNE.

L'ensemble E_{H} des repères presque γ-hermitiens a une structure de fibré principal de groupe structural G_{H} , appelé fibré des repères p.γ.h.

Définition.

On appelle connexion presque γ-hermitienne sur (M_{2n},J,g) une connexion sur le fibré des repères p.γ.h.

Théorème.

Etant donné sur M_{2n} une connexion linéaire γ-complexe Γ, de dérivation absolue $\mathcal{D}$, les affirmations suivantes sont équivalentes :

a) Γ est une connexion p.γ.h.

b) $DJ = 0$ et $Dg = 0$.

Démonstration : On sait que l'algèbre de Lie de G_H est

$$\mathfrak{g}_H = \left\{U = \begin{pmatrix} A & \gamma B \\ B & A \end{pmatrix} ;\ {}^tUG_o + G_oU = 0\right\} \quad \text{or}$$

$$0 = {}^tUG_o + G_oU \Leftrightarrow \begin{cases} KA + {}^tAK = 0 \\ KB - {}^tBK = 0 \end{cases} .$$

$$Dg_{ij} = -\sum_k (u_i^k g_{kj} + u_j^k g_{ik})$$

$$Dg_{\alpha\beta} = -\sum_{k=1}^{2n} (u_\alpha^k g_{k\beta} + u_\beta^k g_{\alpha k}) = -\sum_{k=n+1}^{2n} (u_\alpha^k g_{k\beta} + u_\beta^k g_{\alpha k})$$

$$= 0 \Leftrightarrow -(AK + K^tA) = 0$$

$$Dg_{\alpha\beta^*} = -\sum_k (u_\alpha^k g_{k\beta^*} + u_{\beta^*}^k g_{\alpha k}) = -\sum_{k=1}^{n} u_\alpha^k g_{k\beta^*} - \sum_{k=n+1}^{2n} g_{\alpha k} u_{\beta^*}^k$$

$$= 0 \Leftrightarrow -(AK + K^tA) = 0$$

$$Dg_{\alpha^*\beta^*} = -\sum (u_{\alpha^*}^k g_{k\beta^*} + u_{\beta^*}^k g_{\alpha^* k}) = -\sum_{k=1}^{n} (u_{\alpha^*}^k g_{k\beta^*} + g_{\alpha^* k} u_{\beta^*}^k)$$

$$= 0 \Leftrightarrow -(BK - K^tB) = 0$$

CHAPITRE IV

STRUCTURES PRESQUE γ-KAEHLERIENNES

1. FORME DE KAEHLER.

Définition.

Etant donné une structure p.γ.h. , (M_{2n}, J, g) , on appelle forme de Kaehler, la forme $\Omega(Z,W)$ définie par :

$$\Omega(Z,W) = g(Z,JW) .$$

La structure (M_{2n}, J, g) est dite presque γ-kaehlérienne (p.γ.k.) si $d\Omega = 0$. Elle est dite γ-kaehlérienne si $d\Omega = 0$ et $N_J = 0$.

Propriétés de la forme de Kaehler.

Propriétés immédiates :

a) $\Omega(Z,W) + \Omega(W,Z) = 0$

b) $i_J\Omega = 0$

c) $\Omega(JZ,JW) + \gamma\Omega(Z,W) = 0$

Proposition IV.1.

Etant donné une structure p.γ.h. (M_{2n}, J, g) il existe une connexion linéaire Γ et une seule de dérivation covariante D satisfaisant aux conditions :

a) $Dg = 0$

b) $\mathcal{T} = 0$.

Elle satisfait en outre à la condition $\overline{D_Z W} = D_{\overline{Z}} \overline{W}$.

La démonstration est analogue au cas réel.

Proposition IV.2.

D étant la dérivation covariante de la connexion riemannienne associée à g , on a pour tous éléments X,Y,Z de T :

a) $3d\Omega(X,Y,Z) = g((D_X J)Z,Y) + g((D_Z J)Y,X) + g((D_Y J)X,Z)$

b) $g((D_X J)Y,Z) + g((D_X J)Z,Y) = 0$

c) $g((D_X J)JY,Z) = g((D_X J)Y,JZ)$

d) $-2\gamma g((D_X J)Y,Z) = 3d\Omega(X,JY,JZ) + 3\gamma d\Omega(X,Y,Z) + g(N_J(Y,Z),JX)$

Démonstration :

a) $$3d\Omega(X,Y,Z) = Xg(Y,JZ) + Yg(Z,JX) + Zg(X,JY) - g([X,Y],JZ) - g([Z,X],JY) - g([Y,Z],JX)$$

et en utilisant les relations

$$Ug(V,W) = g(D_U V,W) + g(V,D_U W)$$
$$[U,V] = D_U V - D_V U$$

on obtient le résultat.

b) $g(JY,Z) + g(Y,JZ) = 0 \Rightarrow Xg(JY,Z) + Xg(Y,JZ) = 0 \Rightarrow$

$$g(D_X JY,Z) + g(JY,D_X Z) + g(D_X Y,JZ) + g(Y,D_X JZ) = 0$$

soit

$$g(D_X JY - JD_X Y,Z) + g(D_X JZ-JD_X Z,Y) = 0 .$$

c) $(D_X J)JY = D_X J^2 Y - JD_X JY = -J(D_X JY - JD_X Y) = -J(D_X J)Y$.

Donc

$$g((D_X J)JY,Z) = -g(J(D_X J)Y,Z) = g((D_X J)Y,JZ) .$$

d) $N_J(Y,Z) = (D_{JY} J)Z - (D_{JZ} J)Y + J(D_Z J)Y - J(D_Y J)Z$

$$2g(N_J(Y,Z),JX) = 2\{g((D_{JY} J)Z,JX) - g((D_{JZ} J)Y,JX) - \gamma g((D_Z J)Y,X) + \gamma g((D_Y J)Z,X)\}$$

$$6\gamma d\Omega(X,Y,Z) = 2\gamma\{g((D_XJ)Z,Y) + g((D_ZJ)Y,X) + g((D_YJ)X,Z)\}$$

$$6d\Omega(X,JY,JZ) = 2\{g((D_XJ)JZ,JY) + g((D_{JZ}J)JY,X) + g((D_{JY}J)X,JZ)\} .$$

D'où le résultat en tenant compte des formules b) et c) .

Proposition IV.3.

Si D est la dérivation covariante de la connexion riemannienne associée à la métrique g d'une structure p.γ.h. : (M_{2n},J,g) , dans le cas $\gamma = 0$ on a :

$$2g((D_{JZ}J)X,Y) = 3d\Omega(JX,Y,Z) + 3d\Omega(X,JY,Z) + g(N_J(Y,Z),X) + g(N_J(Z,X),Y) .$$

Démonstration : Il suffit de développer le second membre en utilisant les formules de la proposition (IV.2).

Proposition IV.4.

Si D est la dérivation covariante de la connexion riemannienne associée à la métrique g d'une structure p.γ.h. : (M_{2n},J,g) , dans le cas $\gamma = 0$ on a :

$$(d\Omega = 0, N_J=0) \Rightarrow D_{JX}J = 0 \quad \text{et} \quad (D_XJ)JY = 0 \quad \text{pour tous } X \text{ et } Y \text{ dans } T .$$

Démonstration :

1) $D_{JX}J = 0$ résulte de la proposition (IV.3) et du fait que g est non dégénérée.

2) $0 = d\Omega(X,Y,JZ) = g((D_XJ)Y,JZ) + g((D_YJ)JZ,X)$ car $g((D_{JZ}J)X,Y) = 0$ donc

$$g((D_XJ)Y,JZ) + g((D_YJ)JZ,X) = 0 . \qquad (a)$$

En faisant des permutations circulaires de X,Y,Z , la relation (a) donne :

$$g((D_YJ)Z,JX) + g((D_ZJ)JX,Y) = 0 \qquad (b)$$

$$g((D_ZJ)X,JY) + g((D_XJ)JY,Z) = 0 . \qquad (c)$$

En retranchant membre à membre (b) et (c) , on obtient :

$$g((D_XJ)JY,Z) - g((D_YJ)Z,JX) = 0 \qquad (d)$$

et en comparant les relations (a) et (d) on obtient :

$$g((D_X J)JY, Z) = 0$$

ce qui entraîne $(D_X J)JY = 0$ pour tous X et Y dans T .

Théorème.

Si D est la dérivation covariante de la connexion riemannienne associée à la métrique g de la structure p.γ.h. : (M_{2n}, J, g) , les affirmations suivantes sont équivalentes :

1) $D_X J = 0$ pour tout $X \in T$

2) $D_X \Omega = 0$ pour tout $X \in T$

3) $d\Omega = 0$, $N_J = 0$ et $(D_X J)Y = 0$ pour tout X et Y dans un sous-module supplémentaire de $\operatorname{Im} J$ dans T .

Démonstration :

1) $\Leftrightarrow$ 2) .

$$\begin{aligned} D_X\Omega(Y,Z) &= X\Omega(Y,Z) - \Omega(D_X Y, Z) - \Omega(Y, D_X Z) \\ &= Xg(Y,JZ) - g(D_X Y, JZ) - g(Y, JD_X Z) \\ &= g(D_X Y, JZ) + g(Y, D_X JZ) - g(D_X Y, JZ) - g(Y, JD_X Z) \\ &= g((D_X J)Z, Y) \end{aligned}$$

d'où le résultat, puisque g est non dégénérée.

1) $\Leftrightarrow$ 3) . Dans les cas $\gamma = 1$ et $\gamma = -1$, c'est une conséquence des formules a) et d) de la proposition IV.2.

Examinons le cas $\gamma = 0$. 1) entraîne 3) d'après la formule a) proposition IV.2. Et d'après la proposition IV.4, $d\Omega = 0$ et $N_J = 0$ entraîne $D_{JX} J = 0$ et $(D_X J)JY = 0$ pour tous X et Y dans T .

Proposition IV.5.

Soit D la dérivation covariante de la connexion riemannienne de la structure p.γ.h. : (M_{2n}, J, g) , le tenseur K défini par :

$$K(X,Y,Z,W) = g(R(Z,W)Y,X)$$

possède les propriétés suivantes :

1) $K(X,Y,Z,W) = -K(Y,X,Z,W) = -K(X,Y,W,Z)$

2) $K(X,Y,Z,W) = K(Z,W,X,Y)$

3) $K(X,Y,Z,W) + K(X,Z,W,Y) + K(X,W,Y,Z) = 0$

4) $K(JX,JY,Z,W) = K(X,Y,JZ,JW) = -\gamma K(X,Y,Z,W)$ pour tous X,Y,Z,W dans T.

Démonstration : La démonstration des relations 1), 2), 3) est analogue au cas réel des variétés riemanniennes (voir par exemple [4] page 69). D'autre part :

$$K(JX,JY,Z,W) = g(R(Z,W)JY,JX) = g(JR(Z,W)Y,JX) = -\gamma g(R(Z,W)Y,X)$$

$$K(X,Y,JZ,JW) = K(JZ,JW,X,Y) = -\gamma g(R(X,Y)W,Z) = -\gamma K(Z,W,X,Y) .$$

Proposition IV.6.

Soit (M_{2n},J,g) une structure p.γ.h. . Le tenseur de courbure R de la connexion riemannienne associée à g vérifie les relations :

1) $R(JX,Y) + R(X,JY) = 0$

2) $R(X,Y) = 0$ si X et Y sont du même type.

Démonstration :

1)
$$\begin{aligned} g((R(JU,V)+R(U,JV))Z,W) &= g(R(Z,W)JU,V) + g(R(Z,W)U,JV) \\ &= -g(R(Z,W)U,JV) + g(R(Z,W)U,JV) \\ &= 0 \end{aligned}$$

pour tous Z et W dans T entraîne $R(JU,V) + R(U,JV) = 0$.

2) Pour $\gamma \neq 0$, supposons que X et Y soient du même type alors $R(Z,W)X = D_Z D_W X - D_W D_Z X - D_{[Z,W]}X$ est du même type que X (car $DJX = JDX$). Donc $R(Z,W)X$ et Y sont du même type, d'où $g(R(Z,W)X,Y) = 0$ c'est-à-dire $g(R(X,Y)Z,W) = 0$ d'où $R(X,Y) = 0$ car g est non dégénérée.

Pour $\gamma = 0$, supposons que $X = JU + jU$, $Y = JV + jV$ alors $R(X,Y) = R(JU,JV) + j(R(JU,V)+R(U,JV)) + R(jU,jV) = 0$.

Il en est de même si $X = JU-jU$, $Y = JV-jV$.

2. VARIETE γ-KAEHLERIENNE EN COORDONNEES LOCALES.

Dans tout ce paragraphe, D sera la dérivation covariante de la connexion associée au tenseur g d'une structure p.γ.h. : (M_{2n},J,g). On supposera en outre que cette connexion est p.γ.h. ; ce qui entraîne que la structure est presque γ-kaehlérienne.

Définitions.

Si U est un voisinage de $p \in M_{2n}$, de coordonnées locales $Z_\alpha = x_\alpha + jy_\alpha$, les vecteurs $\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)_p$, $\left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)_p$ forment une base adaptée à la structure en p . On a : $J\frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial y_\alpha}$. Posons :

$$Z_\alpha = \frac{\partial}{\partial y_\alpha} - j\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \quad ; \quad Z_{\alpha^*} = \frac{\partial}{\partial y_\alpha} + j\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$$

$$dz_\alpha = dx_\alpha + jdy_\alpha \quad ; \quad d\overline{z}_\alpha = dx_\alpha - jdy_\alpha$$

on a :

$$dz_\alpha(Z_\beta) = 0 \quad ; \quad dz_\alpha(Z_{\beta^*}) = 2j\delta_\alpha^\beta$$

$$d\overline{z}_\alpha(Z_\beta) = -2j\delta_\alpha^\beta \; ; \; d\overline{z}_\alpha(Z_{\beta^*}) = 0 \quad .$$

Donc, si $\gamma \neq 0$ les (Z_α) forment une base de $T^{0,1}$ et (Z_{α^*}) une base de $T^{1,0}$. Les formes (dz_α) sont de type $(1^*,0)$ et

$$dz_{\alpha_1} \wedge dz_{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge dz_{\alpha_r} \quad (1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_r \leq n)$$

forment une base de $A^{r^*,0}$. De même

$$d\overline{z}_{\beta_1} \wedge d\overline{z}_{\beta_2} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{\beta_s} \quad (1 \leq \beta_1 \leq \ldots \leq \beta_s \leq n)$$

forment une base de A^{o,s^*} .

Rappelons qu'une forme $\omega \in A^{p*q}$ $(p \le n, q \le n)$ est dite de type (p^*,q) (resp. de type (p,q^*)) et on note $\omega \in A^{p^*,q}$ (resp. $\omega \in A^{p,q^*}$) si

$$\omega(Z_{\alpha_1}, Z_{\alpha_2}, \dots, Z_{\alpha_{p+q}}) = 0$$

chaque fois que la suite $Z_{\alpha_1}, \dots, Z_{\alpha_{p+q}}$ comporte plus de q vecteurs de type $(0,1)$ (resp. plus de p vecteurs de type $(1,0)$) .

Lemme 1.

<u>En posant</u> $g_{ij} = g(Z_i, Z_j)$ <u>on a</u> : $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha^*\beta^*} = 0$.

Il résulte de ce fait que Z_α et Z_β sont de même type ; ainsi que Z_{α^*} et Z_{β^*} .

Lemme 2.

<u>En posant</u> : $D_{Z_i} Z_j = \sum \Gamma^k_{ij} Z_k$, <u>on a</u> :

$$D_X J = 0 \Leftrightarrow \Gamma^\alpha_{\beta\gamma^*} = \Gamma^{\alpha^*}_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\beta^*\gamma^*} = \Gamma^{\alpha^*}_{\beta^*\gamma} = 0 .$$

Démonstration :

$$D_{Z_\beta} Z_\gamma = \sum \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} Z_\alpha + \sum \Gamma^{\alpha^*}_{\beta\gamma} Z_{\alpha^*} \Rightarrow J D_{Z_\beta} Z_\gamma = -j \sum \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} Z_\alpha + j \sum \Gamma^{\alpha^*}_{\beta\gamma} Z_{\alpha^*}$$

$$D_{Z_\beta} J Z_\gamma = -j D_{Z_\beta} Z_\gamma = -j \sum \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} Z_\alpha - j \sum \Gamma^{\alpha^*}_{\beta\gamma} Z_{\alpha^*}$$

$$D_{Z_\beta} J Z_\gamma = J D_{Z_\beta} Z_\gamma \Leftrightarrow \Gamma^{\alpha^*}_{\beta\gamma} = 0 .$$

En refaisant la même chose avec d'autres vecteurs, on obtient toutes les relations annoncées.

Lemme 3.

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{T} = 0 \\ DJ = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \Gamma^i_{\beta^*\gamma} = 0 ; \; \Gamma^\alpha_{\beta^*\gamma^*} = 0 ; \; \Gamma^{\alpha^*}_{\beta\gamma} = 0 .$$

Remarque : Dans l'hypothèse $DJ = 0$ et $\mathcal{T} = 0$, les seules composantes différentes de zéro sont $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ et $\Gamma^{\alpha^*}_{\beta^*\gamma^*}$.

Tenseur de Ricci.

Posons

$$R(Z_i,Z_j)Z_k = \sum R^{\ell}_{kij} Z_\ell$$

$$R_{ijk\ell} = g(R(Z_k,Z_\ell)Z_j,Z_i) \quad .$$

Lemme 4.

$$R^{\alpha}_{\beta^* ij} = R^{\alpha^*}_{\beta ij} = 0$$

$$R(Z_i,Z_j)JZ_\beta = JR(Z_i,Z_j)Z_\beta \Leftrightarrow -j\sum R^{\alpha}_{\beta ij} Z_\alpha - j\sum R^{\alpha^*}_{\beta ij} Z_{\alpha^*} = -j\sum R^{\alpha}_{\beta ij} Z_\alpha + j\sum R^{\alpha^*}_{\beta ij} Z_{\alpha^*}$$

$$\Rightarrow R^{\alpha^*}_{\beta ij} = 0 \ .$$

De même

$$R(Z_i,Z_j)JZ_{\beta^*} = JR(Z_i,Z_j)Z_{\beta^*} \Rightarrow R^{\alpha}_{\beta^* ij} = 0 \ .$$

Lemme 5.

1) $R_{ijk\ell} = -R_{ij\ell k} = -R_{jik\ell} = R_{k\ell ij}$.

2) $R_{\alpha\beta ij} = R_{\alpha^*\beta^* ij} = 0$

$R_{ij\alpha\beta} = R_{ij\alpha^*\beta^*} = 0$

3) $R^{j}_{i\alpha\beta} = R^{j}_{i\alpha^*\beta^*} = 0$.

Démonstration : Les relations (1) sont une autre traduction des relations de la proposition IV.5 . Les relations (2) résultent des lemmes 1) et 4) ; par exemple :

$$R_{\alpha\beta ij} = \sum g_{\alpha k} R^{k}_{\beta ij} = \sum g_{\alpha\delta} R^{\delta}_{\beta ij} + \sum g_{\alpha\delta^*} R^{\delta^*}_{\beta ij}$$

or $g_{\alpha\delta} = 0$ (lemme 1) et $R^{\delta^*}_{\beta ij} = 0$ (lemme 4). Les relations (3) résultent de la proposition IV.6.

Lemme 6.

$$R^{\delta}_{\alpha\gamma\beta^*} = -\frac{\partial \Gamma^{\delta}_{\gamma\alpha}}{\partial z_\beta} \ .$$

On a d'une part :

$$R(Z_\gamma, Z_{\beta^*})Z_\alpha = D_{Z_\gamma} D_{Z_{\beta^*}} Z_\alpha - D_{Z_{\beta^*}} D_{Z_\gamma} Z_\alpha$$

$$= -D_{Z_{\beta^*}} (\Sigma \Gamma^\delta_{\gamma\alpha} Z_\delta)$$

$$= -\Sigma Z_{\beta^*}(\Gamma^\delta_{\gamma\alpha}) Z_\delta = -\Sigma \frac{\partial \Gamma^\delta_{\gamma\alpha}}{\partial z_\beta} Z_\delta$$

d'autre part :

$$R(Z_\gamma, Z_{\beta^*})Z_\alpha = \Sigma R^\delta_{\alpha\gamma\beta^*} Z_\delta$$

d'où

$$R^\delta_{\alpha\gamma\beta^*} = - \frac{\partial \Gamma^\delta_{\gamma\alpha}}{\partial z_\beta} \quad .$$

Proposition IV.7.

Dans une structure γ-kaehlérienne, les composantes du tenseur de Ricci vérifient localement :

1) $R_{\alpha\beta} = R_{\alpha^*\beta^*} = 0$

2) $R_{\alpha^*\beta} = R_{\alpha\beta^*} = -\sum_\gamma \frac{\partial \Gamma^\gamma_{\alpha\gamma}}{\partial \bar{z}_\beta}$.

La proposition résulte des lemmes 5 et 6 .

3. SUR LES FORMES J-HARMONIQUES.

Dans tout ce paragraphe la variété M sera supposée paracompacte.

La forme volume sur une variété presque γ-hermitienne.

Proposition IV.8. (voir [7]).

Soit (M_{2n}, J, g) une structure p.γ.h.. Si la variété M_{2n} est orientable, il existe une forme ω , alternée, réelle, de degré $2n$, de rang maximum en tout point de M_{2n} telle que

$$\omega(X_1, \ldots, X_{2n}) . \omega(Y_1, \ldots, Y_{2n}) = \det g(X_i, Y_j)$$

pour tous X_i , Y_j dans T .

Tout autre élément de A^{2n} qui vérifie cette condition est égale à ω ou $-\omega$.

Démonstration : M étant orientable, il existe une 2n-forme Φ , alternée réelle qui est une base du module A^{2n} . Puisque $\det g(X_i, Y_j)$ est une fonction multilinéaire alternée de X_i et Y_j , il existe une fonction $f \in F$ telle que :

$$\det g(X_i, Y_j) = f\, \Phi(X_1, \ldots, X_{2n}).\Phi(Y_1, \ldots, Y_{2n})$$

pour tous champs de vecteurs réels X_i , Y_j .

Or, si (e_i) est une base presque γ-hermitienne adaptée on a :

$$\det g(e_i, e_j) = 1 \; ;$$

donc

$$1 = f\,[\Phi(e_1, \ldots, e_{2n})]^2 = a^2 f \; .$$

D'où

$$f = \bar{a}^2 \quad .$$

La fonction f est donc réelle et strictement positive en tout point ; on peut alors poser : $\omega = \sqrt{f}.\Phi$.

Il suffit ensuite de γ-complexifier ω pour avoir une forme définie sur T .

Définition.

ω est appelé forme volume de la variété presque γ-hermitienne.

Remarque :

1) En désignant par ℓ , l'isomorphisme de T sur A^1 défini par g , les formes volumes peuvent encore être caractérisées par la condition :

$$\omega(X_1, \ldots, X_{2n}) = \ell X_1 \wedge \ldots \wedge \ell X_{2n} \quad .$$

2) $i_J \omega = 0$.

Car dans une base adaptée on a :

$$i_J \omega(e_1, \ldots, e_{2n}) = \sum_{i=1}^{2n} \omega(e_1, \ldots, Je_i, \ldots, e_{2n}) = 0$$

Les différents opérateurs sur les formes.

L'opérateur J^* .

Définition.

J^* est l'application de A dans A définie par :

$$J^*\alpha(X_1,\ldots,X_p) = \alpha(JX_1,\ldots,JX_p)$$

pour tout $\alpha \in A^p$ et tous $X_i \in T$.

Proposition IV.9.

a) $J^* i_J = i_J J^*$ (= 0 si $\gamma = 0$)

b) Si $\gamma = 0$, $i_J^p = p!J^*$ et $i_J^{p+1} = 0$ pour i_J et J^* agissant sur A^p .

Démonstration :

a) Pour tout α dans A^p on a :

$$i_J J^*\alpha(X_1,\ldots,X_p) = \sum_{i=1}^{i=p} J^*\alpha(X_1,\ldots,JX_i,\ldots,X_p)$$

$$= \sum_{i=1}^{i=p} \alpha(JX_1,\ldots,\gamma X_i,\ldots,JX_p)$$

$$J^* i_J\alpha(X_1,\ldots,X_p) = i_J\alpha(JX_1,\ldots,JX_p)$$

$$= \sum_{i=1}^{i=p} \alpha(JX_1,\ldots,\gamma X_i,\ldots,JX_p) \quad .$$

b) Il suffit d'appliquer p fois i_J à α pour obtenir le résultat.

Remarque : Dans le cas général, on a :

$$i_J^p = p!J^* + \sum_{s=1}^{k} a_s i_J^{2s-1} \quad \text{si} \quad p = 2k+1$$

$$i_J^p = p!J^* + \sum_{s=0}^{k-1} a_s i_J^{2s} \quad \text{si} \quad p = 2k$$

où les a_s sont des coefficients entiers dépendant de p .

L'opérateur $*$.

Définition.

$*$ est l'application de A^p dans A^{2n-p} définie par :

$$(*\alpha)(X_1,\dots,X_{2n-p})\omega = \alpha\wedge\ell X_1\wedge\dots\wedge\ell X_{2n-p}$$

pour tous X_i dans T et tout entier positif p .

Propriétés :

1) $*$ est un F-homomorphisme de A^p dans A^{2n-p} c'est-à-dire :

$$*(f\alpha) = f*\alpha$$
$$*(\alpha+\beta) = *\alpha + *\beta \; .$$

2) $*\omega = 1$ et $*1 = \omega$.

3) $(*\alpha)(X_1,\dots,X_{2n-p}) = *(\alpha\wedge\ell X_1\wedge\dots\wedge\ell X_{2n-p})$.

4) $*(\alpha\wedge\ell X) = i(X)*\alpha$.

5) $*(i(X)\alpha) = (-1)^{2n-1}(*\alpha)\wedge\ell X$.

6) $**\alpha = (-1)^{(2n-1)p}\alpha$ pour tout α dans A^p . Donc l'opérateur $*$ est bijectif et on a :

$$\overset{-1}{*} = (-1)^p * \quad \text{sur} \quad A^{2n-p} \; .$$

7) $\alpha\wedge(*\beta) = \beta\wedge(*\alpha)$.

8) $*\bar{\alpha} = \overline{*\alpha}$.

Démonstration : Voir [7] page 26 à 31 .

Définition.

$\varepsilon(\Omega)$ est l'opérateur défini par :

$$\varepsilon(\Omega)\alpha = \Omega\wedge\alpha$$

où Ω est la forme de Kaehler associée à la métrique g .

Proposition IV.10.

a) $J*\varepsilon(\Omega) = -\gamma\varepsilon(\Omega)J*$.

b) $i_J\varepsilon(\Omega) = \varepsilon(\Omega)i_J$.

Démonstration :

a) $(J^*\varepsilon(\Omega))\alpha = J^*(\Omega\wedge\alpha)$

$= J^*\Omega \wedge J^*\alpha$

$= -\gamma\Omega \wedge J^*\alpha$

$= -\gamma(\varepsilon(\Omega)J^*)\alpha$.

b) $i_J\varepsilon(\Omega)\alpha = i_J(\Omega\wedge\alpha)$

$= i_J\Omega\wedge\alpha + \Omega\wedge i_J\alpha$

$= \Omega\wedge i_J\alpha$

$= (\varepsilon(\Omega)i_J)\alpha$

L'opérateur δ_J .

Définition.

$$\delta\alpha = (-1)^{p+1} *^{-1} d * \alpha$$

$$\delta_J\alpha = (-1)^{p+1} *^{-1} d_J * \alpha$$

$$j_J\alpha = *^{-1} i_J * \alpha$$

pour α dans A^p .

Proposition IV.11.

On a :

1) $\delta_J^2 = 0$ si la structure est intégrable.

2) $\delta_J = j_J\delta - \delta j_J$.

3) $j_J = i_J$.

Démonstration :

1) $\delta_J^2 = *^{-1} d_J^2 *$ et $d_J^2 = 0$ si $N_J = 0$.

3) $j_J\alpha(X_1,\dots,X_p) = *^{-1} i_J * \alpha(X_1,\dots,X_p)$

$= (-1)^p * i_J * \alpha(X_1,\dots,X_p)$

$= (-1)^p * [(i_J * \alpha)\wedge \ell X_1\wedge\dots\wedge \ell X_p]$

$= (-1)^p * [\underbrace{i_J(*\alpha\wedge \ell X_1\wedge\dots\wedge \ell X_p)}_{= 0 \text{ car de degré } 2n} - *\alpha\wedge i_J(\ell X_1\wedge\dots\wedge \ell X_p)]$

$$= (-1)^p * \sum_{i=1}^{i=p} *\alpha \wedge \ell X_1 \wedge \ldots \wedge \ell J X_i \wedge \ldots \wedge \ell X_p$$

$$= (-1)^p \sum_{i=1}^{i=p} (**\alpha)(X_1, \ldots, JX_i, \ldots, X_p)$$

$$= (-1)^p (-1)^{(2n-1)p} \sum_{i=1}^{i=p} \alpha(X_1, \ldots, JX_i, \ldots, X_p)$$

$$= i_J \alpha(X_1, \ldots, X_p) .$$

Corollaire.

On a : $\delta_J = i_J \delta - \delta i_J$.

Formes J-harmoniques.

Préliminaire algébrique.

Soit $A_{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des formes réelles sur M_{2n} . On sait que si M est compacte, on peut définir un produit scalaire sur $A_{\mathbb{R}}$ en posant :

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{\mathbb{R}} = \int_M \alpha \wedge * \beta \quad \text{pour tous } \alpha \text{ et } \beta \text{ dans } A^p_{\mathbb{R}}$$

$$= 0 \quad \text{si} \quad \alpha \in A^p_{\mathbb{R}} , \ \beta \in A^q_{\mathbb{R}} \quad \text{et} \quad p \neq q .$$

Ce produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique, définie positive. On peut en déduire une forme bilinéaire $\langle \ , \ \rangle_{\mathfrak{A}}$ sur A en posant :

$$\langle X_1 + jX_2, Y_1 + jY_2 \rangle_{\mathfrak{A}} = \langle X_1, Y_1 \rangle_{\mathbb{R}} + \gamma \langle X_2, Y_2 \rangle_{\mathbb{R}} + j(\langle X_1, Y_2 \rangle_{\mathbb{R}} + \langle X_2, Y_1 \rangle_{\mathbb{R}}) .$$

La forme $\langle \ , \ \rangle_{\mathfrak{A}}$ est symétrique, réelle c'est-à-dire :

$$\langle \bar{\alpha}, \bar{\beta} \rangle_{\mathfrak{A}} = \overline{\langle \alpha, \beta \rangle}_{\mathfrak{A}} .$$

Mais elle n'est positive que dans les cas $\gamma = -1$ et $\gamma = 0$ et définie positive que dans le cas $\gamma = -1$.

D'autre part, elle vérifie :

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{\mathfrak{A}} = \int_M \alpha \wedge * \beta \quad .$$

Opérateur Laplacien.

Définition.

$$\Delta_J = d_J\delta_J + \delta_J d_J \ .$$

Proposition IV.12.

Pour tous α et β dans A on a :

1) $\langle d_J\alpha, \beta\rangle_{\mathfrak{A}} = \langle \alpha, \delta_J\beta\rangle_{\mathfrak{A}}$

2) $\langle \Delta_J\alpha, \beta\rangle_{\mathfrak{A}} = \langle \alpha, \Delta_J\beta\rangle_{\mathfrak{A}}$.

Démonstration :

1) De la formule :

$$d_J(\alpha\wedge*\beta) = d_J\alpha\wedge*\beta - \alpha\wedge*\delta_J\beta$$

on tire

$$\begin{aligned}\langle d_J\alpha, \beta\rangle_{\mathfrak{A}} &= \int_M d_J\alpha\wedge*\beta \\ &= \int_M \alpha\wedge*\delta_J\beta + \int_M d_J(\alpha\wedge*\beta) \\ &= \int_M \alpha\wedge*\delta_J\beta \\ &= \langle \alpha, \delta_J\beta\rangle_{\mathfrak{A}} \ .\end{aligned}$$

2) La formule précédente entraîne

$$\begin{aligned}\langle \Delta_J\alpha, \beta\rangle_{\mathfrak{A}} &= \langle d_J\delta_J\alpha, \beta\rangle_{\mathfrak{A}} + \langle \delta_J d_J\alpha, \beta\rangle_{\mathfrak{A}} \\ &= \langle \alpha, \delta_J d_J\beta\rangle_{\mathfrak{A}} + \langle \alpha, d_J\delta_J\beta\rangle_{\mathfrak{A}} \\ &= \langle \alpha, \Delta_J\beta\rangle_{\mathfrak{A}} \ .\end{aligned}$$

Proposition IV.13.

Pour qu'une p-forme α sur une variété p.γ.h. compacte soit J-harmonique il faut et il suffit qu'elle soit fermée et cofermée.

Démonstration : Soit $\alpha \in A^p$; il est évident que $\delta_J\alpha = 0$ et $d_J\alpha = 0$ entraîne $\Delta_J\alpha = 0$. Montrons que si $\Delta_J\alpha = 0$ alors $\delta_J\alpha$ et $d_J\alpha$ sont nuls .

Cas parabolique.

$$\Delta_J\alpha = 0 \Rightarrow \langle \Delta_J\alpha, \bar{\alpha}\rangle_{\mathfrak{A}} = 0 \quad \text{soit} \quad \langle \delta_J\alpha, \delta_J\bar{\alpha}\rangle_{\mathfrak{A}} + \langle d_J\alpha, d_J\bar{\alpha}\rangle_{\mathfrak{A}} = 0 .$$

Posons $\delta_J\alpha = a+jb$; $d_J\alpha = c+jd$. On a

$$\langle \Delta_J\alpha, \bar{\alpha}\rangle_{\mathfrak{A}} = \langle a,a\rangle_{\mathbb{R}} + \langle c,c\rangle_{\mathbb{R}} = 0 \Rightarrow a = 0 , c = 0 .$$

Par suite, $\Delta_J\alpha = 0 \Rightarrow \delta_J\alpha = jb$, $d_J\alpha = jd \Rightarrow \alpha = j\alpha_2$ où α_2 est une forme réelle. Or

$$\begin{aligned}\langle \Delta_J\alpha, \alpha_2\rangle_{\mathfrak{A}} &= j(\langle \delta_J\alpha_2, \delta_J\alpha_2\rangle_{\mathbb{R}} + \langle d_J\alpha_2, d_J\alpha_2\rangle_{\mathbb{R}}) \\ &= 0 \Rightarrow \delta_J\alpha_2 = 0 , \quad d_J\alpha_2 = 0 .\end{aligned}$$

Cas hyperbolique.

$$\Delta_J\alpha = 0 \Rightarrow \langle \Delta_J\alpha, \bar{\alpha}\rangle_{\mathfrak{A}} = 0 \quad \text{et} \quad \langle \Delta_J\alpha, \alpha\rangle_{\mathfrak{A}} = 0 .$$

Mais

$$\langle \Delta_J\alpha, \bar{\alpha}\rangle_{\mathfrak{A}} = 0 \Leftrightarrow \langle \delta_J\alpha, \delta_J\bar{\alpha}\rangle_{\mathfrak{A}} + \langle d_J\alpha, d_J\bar{\alpha}\rangle_{\mathfrak{A}} = 0 \tag{1}$$

$$\langle \Delta_J\alpha, \alpha\rangle_{\mathfrak{A}} = 0 \Leftrightarrow \langle \delta_J\alpha, \delta_J\alpha\rangle_{\mathfrak{A}} + \langle d_J\alpha, d_J\alpha\rangle_{\mathfrak{A}} = 0 . \tag{2}$$

En additionnant membre à membre les relations (1) et (2)

$$\langle \delta_J\alpha, \delta_J(\alpha+\bar{\alpha})\rangle_{\mathfrak{A}} + \langle d_J\alpha, d_J(\alpha+\bar{\alpha})\rangle_{\mathfrak{A}} = 0 . \tag{3}$$

En posant $\delta_J\alpha = a+jb$, $d_J\alpha = a+jd$ la relation (3) devient :

$$2(\langle a,a\rangle_{\mathbb{R}} + \langle c,c\rangle_{\mathbb{R}}) + 2j(\langle a,b\rangle_{\mathbb{R}} + \langle c,d\rangle_{\mathbb{R}}) = 0 .$$

D'où $a = 0$ et $c = 0$.

Par suite

$$\delta_J\alpha = jb , \quad d_J\alpha = jd \Rightarrow \alpha = j\alpha_2$$

et

$$\begin{aligned}\langle \Delta_J\alpha, \alpha_2\rangle_{\mathfrak{A}} &= j(\langle \delta_J\alpha_2, \delta_J\alpha_2\rangle_{\mathbb{R}} + \langle d_J\alpha_2, d_J\alpha_2\rangle_{\mathbb{R}}) = 0 \\ &\Rightarrow \delta_J\alpha_2 = 0 \quad \text{et} \quad d_J\alpha_2 = 0 .\end{aligned}$$

Le cas elliptique est classique et résulte du fait que la forme $\langle \quad \rangle_{\mathfrak{A}}$ est définie positive :

$$\langle \Delta_J\alpha, \bar{\alpha}\rangle_{\mathfrak{A}} = 0 \Leftrightarrow \langle \delta_J\alpha, \delta_J\bar{\alpha}\rangle_{\mathfrak{A}} + \langle d_J\alpha, d_J\bar{\alpha}\rangle_{\mathfrak{A}} = 0 .$$

D'où $\delta_J\alpha = 0$ et $d_J\alpha = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] - D. BERNARD - "Sur la géométrie différentielle des G-structures". Annales de l'Institut Fourier - X (1960) pp.151-270.

[2] - R.S. CLARK - M. BRUCKHEIMER - "Tensor structures on a differentiable manifold". Annali di Matematica 54 (1961) pp. 123-142.

[3] - J. GRIFONE - "Structures presque γ-complexes". Thèse de 3e cycle à l'Université de Grenoble - juin 1965.

[4] - S. HELGASON - "Differential Geometry and symetric spaces". Academic Press. New-York and London (1962).

[5] - KENTARO YANO - "Differential Geometry on complex and almost complex spaces". Pergamon Press (1965).

[6] - S. KOBAYASHI and NOMIZU - "Foundations of differential geometry". Interscience publishers - New York - London (1969).

[7] - J.L. KOSZUL - "Variétés kaehlériennes". Universidad de Sao Paulo (1957).

[8] - A. LICHNEROWICZ - "Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie". Ed. Cremonese, Rome (1955).

-oo0oo-

LISTE DES PROFESSEURS

Président : Monsieur Michel SOUTIF
Vice-Président : Monsieur Gabriel CAU

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
	ARNAUD Paul	Chimie
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
	BESSON Jean	Electrochimie
	BEZES Henri	Chirurgie générale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BONNIER Etienne	Electrochimie Electrométallurgie
	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées
	BRAVARD Yves	Géographie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du Solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CABANAC Jean	Pathologie chirurgicale
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologie
	CALAS François	Anatomie
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
	CHATEAU Robert	Thérapeutique
	CHENE Marcel	Chimie papetière
	COEUR André	Pharmacie chimique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique
Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	FELICI Noël	Electrostatique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques Pures
	GALVANI Octave	Mathématiques Pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques Pures
	GIRAUD Pierre	Géologie
	KLEIN Joseph	Mathématiques Pures
Mme	KOFLER Lucie	Botanique et Physiologie végétale
MM.	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques Pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques Appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques Appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOUP Jean	Géographie
Mle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Séméiologie médicale
	MASSEPORT Jean	Géographie
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEEL Louis	Physique du Solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET René	Servomécanismes
	PILLET Emile	Physique industrielle
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REULOS René	Physique industrielle
	RINALDI Renaud	Physique
	ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
	SANTON Lucien	Mécanique
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SILBERT Robert	Mécanique des fluides
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLAND François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique Nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
M.	VERAIN André	Physique
Mme	VEYRET Germaine	Géographie
MM.	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	BULLEMER Bernhard	Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	BEAUDOING André	Pédiatrie
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	CARLIER Georges	Biologie végétale
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	COUMES André	Radioélectricité
	DEPASSEL Roger	Mécanique des Fluides
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GERMAIN Jean Pierre	Mécanique
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	JANIN Bernard	Géographie
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	POULOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	ROBERT André	Chimie papetière
	DE ROUGEMONT Jacques	Neurochirurgie
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIBILLE Robert	Construction Mécanique
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Yves	Chimie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques Appliquées
	BILLET Jean	Géographie
	BLIMAN Samuel	Electronique (EIE)
	BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUVARD Maurice	Mécanique des Fluides
	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BRUGEL Lucien	Energétique
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	DURAND Francis	Métallurgie
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GENSAC Pierre	Botanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques Appliquées
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide
	JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
	KAHANE André	Physique générale
	KUHN Gérard	Physique
	LACOUME Jean-Louis	Physique
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LANCIA Roland	Physique atomique
	LE JUNTER Noël	Electronique
	LEROY Philippe	Mathématiques
	LOISEAUX Jean-Marie	Physique Nucléaire
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique Nucléaire
	LUU DUC Cuong	Chimie Organique
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MAYNARD Roger	Physique du Solide
	MICHOULIER Jean	Physique (I.U.T. "A")
	MICOUD Max	Maladies infectieuses
	MOREAU René	Hydraulique (INP)
	NEGRE Robert	Mécanique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	PERRET Jean	Neurologie
	PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
	PFISTER Jean-Claude	Physique du Solide
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mle	PIERY Yvette	Biologie animale
MM.	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RENAUD Maurice	Chimie
	RICHARD Lucien	Botanique
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	SHOM Jean Claude	Chimie Générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques Appliquées
	VEILLON Gérard	Mathématiques Appliquées (INP)
	VIALON Pierre	Géologie
	VOOG Robert	Médecine interne
	VROUSSOS Constantin	Radiologie
	ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	CHEEKE John	Thermodynamique
	YACOUD Mahmoud	Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

Mme	BERIEL Hélène	Physiologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Microbiologie

Fait le 30 Mai 1972

VU,

Grenoble, le

Le Président de la thèse,

C. CHABAUTY

VU, et permis d'imprimer

Grenoble, le

Le Président de l'Université scientifique
et médicale,

M. SOUTIF