UNIVERSITE DE SAINT-LOUIS

U.E.R DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES ET D'INFORMATQUE

Thèse

DE DOCTORAT DE TROISIEME CYCLE DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES

présentée par

Kalifa BODIAN

OBSERVABILITE SPECTRALE APPROCHEE DE L'EQUATION DES ONDES

Soutenue le 1er Juin 1994 devant la commission composée de :

Président :	Doudou Sakhir THIAM	Professeur U.C.A.D
Rapporteur :	Mohand MOUSSAOUI	Professeur E.C.L LYON
Membres :	Odinette ABIB	Maître de Conférences U.C.A.D
	Galaye DIA	Professeur U.S.L
Directeur de thèse :	Mary Teuw NIANE	Maître de Conférences U.S.L

GLOIRE ET PURETE A ALLAH

ALLAH EST LE PLUS GRAND

LOUANGE A ALLAH

A ma mère

A mon père

A ma femme Diéynéba SANE

A mon fils Ibrahima

à tous mes parents

à tous mes amis

je dédie ce modeste travail.

REMERCIEMENTS

Les mots me manquent pour exprimer toute ma reconnaissance et tous mes sincères remerciements à Monsieur Mary Teuw NIANE, Maître de Conférences à l'Université de Saint-Louis. Le passage des méthodes numériques au contrôle des systèmes distribués, pas évident, a été possible grâce à votre encadrement de qualité, à votre disponibilité et à votre patience. Vous avez su concilier encadrement et amitié. A vous, toute ma reconnaissance et toutes mes prières.

Je tiens à remercier le Professeur Doudou Sakhir THIAM pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider ce jury.

Mes remerciements et ma reconnaissance s'adressent au Professeur Galaye DIA pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour avoir accepté de faire partie de ce jury.

Mme Odinette ABIB, Maître de Conférences, m'a fait l'honneur d'accepter de faire partie de ce jury. Qu'elle trouve ici l'expression de ma gratitude.

Je tiens à remercier tout particulièrement le Professeur Mohand MOUSSAOUI. Malgré votre charge de travail imposée par le court séjour, vous avez accepté de consacrer une partie de votre temps à ce travail. Vos conseils, vos remarques et votre attachement à la perfection m'ont beaucoup apporté. Puisse ce modeste travail vous témoigner de ma

reconnaissance et de mes sincères remerciements.

C'est avec émotion que j'évoque ici la mémoire de Feu Ousmane SECK, mémoire qui est celle d'un frère en islam. Votre soutien moral, vos conseils, votre disponibilité, votre amitié et vos travaux m'ont beaucoup apporté. La volonté d'ALLAH s'est exprimée ainsi. Qu'Allah Tout Puissant vous accorde sa miséricorde infinie et que la terre vous soit légère, Amine.

Aux collègues, j'adresse ma sincère gratitude pour les encouragements, la disponibilité et le soutien moral.

Mes remerciements s'adressent aussi aux membres de l'équipe d'analyse numérique. C'est avec émotion que j'évoque votre disponibilité, votre soutien, vos encouragements et l'atmosphère dans laquelle baignent nos séminaires. Respectueuse gratitude.

J'adresse mes remerciements à tous ceux qui de près ou de loin, en particulier les secrétaires de l'U.E.R, m'ont aidé à produire ce document.

SOMMAIRE

RESUME

Pour l'équation des ondes, on montre qu'en mesurant l'état du système sur une partie ouverte ω aussi petite que l'on veut, on peut approcher les projections o·thogonales des données initiales sur tout espace vectoriel engendré par les M ($M \in \mathbb{N}^*$) fonctions propres correspondant aux M plus petites valeurs propres , avec une précision inversement proportionnelle à la durée des mesures.

Mots clés : Observabilité exacte, observabilité spectrale, observabilité spectrale approchée, contrôlabilité exacte, contrôlabilité spectrale.

INTRODUCTION

Ce travail porte sur une méthode d'identification approchée d'un nombre fini fixé de modes des données initiales d'un système gouverné par une équation des ondes homogène.

Soit Ω un domaine borné, non vide, régulier de $\mathbb{R}^n$; soient ω une partie ouverte non vide de Ω et T un réel strictement positif. On considère l'équation des ondes homogène suivante:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \Delta y = 0 & \text{dans } Q = \Omega \times (0,T) \\ y(x,0) = y(0) = y_0(x) & \text{sur } \Omega \\ \dfrac{\partial y(x,0)}{\partial t} = y'(0) = y_1(x) & \text{sur } \Omega \\ \gamma y = 0 & \text{sur } \Sigma = \partial\Omega \times]0,T[. \end{cases}$$

Soit $(w_k)_{k\geq 1}$ (respectivement $(\lambda_k)_{k\geq 1}$) une base orthonormale de $L^2(\Omega)$ constituée des fonctions propres de l'opérateur de Laplace avec conditions de Dirichlet (respectivement les valeurs propres correspondantes rangées en ordre croissant).

L'observabilité du système (1) par des mesures sur $\omega \times]0,T[$ consiste à pouvoir identifier (y_0,y_1) grâce à la connaissance de $y|_{\omega \times]0,T[}$.

Lorsque ω est " suffisamment grand", ceci est possible grâce aux résultats de Bardos-Lebeau-Rauch [1], et on sait d'ailleurs que si $y|_{\omega\times]0,T[}$ appartient à $L^2(\omega \times]0,T[)$ alors les données initiales (y_0,y_1) correspondantes appartiennent à $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

En pratique ω ne peut pas être choisi grand. Aussi $\omega \times]0,T[$ ne vérifie pas en général les hypothèses de Bardos-Lebeau-Rauch [1] et il n'y a aucun résultat à notre connaissance qui permette de déterminer (y_0, y_1) par la connaissance de $y|_{\omega \times]0,T[}$. Ceci est dû au fait que si T est assez grand $\left[\int_0^T \int_\omega y^2(x,t)\, dx\, dt\right]^{1/2}$ est une norme sur l'espace des données initiales grâce au théorème de Holmgren. Dans le cas où $\omega \times]0,T[$ vérifie les conditions de Bardos-Lebeau-Rauch [1] cet espace est égal à $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, sinon il n'est pas connu.

Pour contourner cette difficulté on cherche à identifier la projection orthogonale $(P_{F_M}(y_0), P_{F_M}(y_1))$ de (y_0, y_1) sur $F_M \times F_M$ dans $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, où $F_M = \text{vect}\left\{ w_k,\ 1 \leq k \leq M \right\}$.

Pour cela on considère le problème d'optimisation en dimension finie:

$$(2) \qquad \min_{(\phi_0, \phi_1) \in F_M \times F_M} J((\phi_0, \phi_1)),$$

où

$$J((\phi_0, \phi_1)) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega \phi^2(x,t)\, dx\, dt - \int_0^T \int_\omega \phi(x,t)\, y(x,t)\, dx\, dt,$$

et ϕ la solution de (1) de données initiales $(\phi_0, \phi_1) \in F_M \times F_M$.

Comme y est mesuré sur $\omega \times]0,T[$, pour tout (ϕ_0, ϕ_1) appartenant à $F_M \times F_M$, $J((\phi_0, \phi_1))$ est connu.

On démontre que le problème (2) admet une et une seule solution $(\Phi_0, \Phi_1) \in F_M \times F_M$ et qui vérifie :

$$\left\| \begin{matrix} \Phi_0 - P_{F_M}(y_0) \\ \Phi_1 - P_{F_M}(y_1) \end{matrix} \right\|_{F_M \times F_M}$$ est inversement proportionnelle à T.

Ainsi lorsque T est suffisamment grand la solution de (2) est une très bonne approximation de la projection orthogonale des données initiales (y_0, y_1) sur $F_M \times F_M$. La connaissance de cette projection orthogonale permet d'appliquer au système (1) un algorithme de contrôle modal approché du type de ceux utilisés dans A. El JAI - A. J. PRITCHARD [3], M.T. NIANE [6] et M.T. NIANE - O. SECK [7].

Ce travail comporte d'abord un chapitre 1 qui présente des rappels de résultats d'optimisation différentiable, et quelques résultats d'unicité des solutions des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants et enfin le chapitre 2 qui en est la partie principale. On y présente le résultat principal (Théorème 2.1) et sa preuve de même que l'étude du cas particulier $\omega = \Omega$.

CHAPITRE 1: RAPPELS D'OPTIMISATION ET DE RESULTATS D'UNICITE DES SOLUTIONS DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES LINEAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS.

I. Quelques résultats d'optimisation

Soient X, Y deux espaces de Hilbert munis des normes respectives $\| \|_X$ et $\| \|_Y$; on considère un opérateur F défini sur son domaine de définition D(F) contenu dans l'espace de Hilbert X, à valeurs dans l'espace de Hilbert Y. Soit $x_0 \in D(F)$, on suppose que D(F) contient un voisinage V du point x_0.

Définition 1.1:

On dit que l'opérateur F est différentiable au point x_0 au sens de Fréchet s'il existe un opérateur linéaire continu $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ tel que:
pour tout $x \in V$, $F(x) - F(x_0) = A\,(x - x_0) + \tau(x - x_0)$,
où $\|\tau(x - x_0)\|_Y = o(\|x - x_0\|_X)$ lorsque x tend vers x_0.

L'opérateur linéaire continu A s'appelle dérivée de Fréchet (ou différentielle) de F en x_0 et est noté $F'(x_0)$.■

Soit H un espace de Hilbert et soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et différentiable au sens de Fréchet.

Proposition 1.1 :

Pour tout $x \in H$ *et tout* $y \in H$, *on a:*

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)\cdot(y-x).$$

Preuve :

Soient $x \in H$, $y \in H$ et $t \in]0, 1[$, comme f est convexe on a:

$$f(ty + (1-t)\, x) \leq t\, f(y) + (1-t)\, f(x)$$

soit $f\left[x + t(y-x)\right] \leq t\, f(y) + f(x) - t\, f(x)$

donc $f\left[x + t\,(y-x)\right] - f(x) \leq t\left[f(y) - f(x)\right]$

d'où $\dfrac{f(x + t(y-x)) - f(x)}{t} \leq f(y) - f(x)$

En posant $g(t) = f\left[x + t\,(y-x)\right]$, on obtient:

$$\frac{g(t) - g(0)}{t} \leq f(y) - f(x) \qquad \text{pour tout } t \in]0, 1[;$$

on a: $g'(t) = f'\left[x + t(y-x)\right].(y-x)$

d'où $g'(0) = f'(x).(y-x)$;

or $\quad g'(0) = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{g(t) - g(0)}{t} \leq f(y) - f(x)$

donc $\quad f'(x).(y-x) \leq f(y) - f(x)$

soit $\quad f'(x).\,(y-x) + f(x) \leq f(y)$. ■

Corollaire 1.1:

Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe et différentiable alors f est faiblement semi-continue inférieurement.

Preuve:

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X convergente faiblement vers x.

D'après l'inégalité de la proposition 1.1, on a:

$$f(x) \leq f(x_n) + f'(x).(x - x_n).$$

En prenant la limite inférieure dans les deux membres, on obtient:

$$f(x) \leq \underline{\lim}\, f(x_n).$$ ■

Proposition 1.2 :

Si $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe et différentiable alors f a un minimun au point x si et seulement si: $f'(x) = 0$.

Preuve :

Condition nécessaire :

Supposons que f a un minimun au point x alors pour tout $y \in H$ on a:

$$f(x) \leq f(y).$$

Soit $y \in H$, on pose

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longrightarrow \varphi(t) = f\ (x + ty).$$

L'application φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = f'(x).y$.

Or

$$0 \geq \lim_{t \to 0^-} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \geq 0$$

d'où $\varphi'(0) = f'(x).y = 0$ donc $f'(x) = 0$.

Condition suffisante :

En effet, d'après la proposition 1.1, comme f est convexe et différentiable sur H on a :

$$f(y) \geq f(x) + f'(x).(y-x) \quad \forall\ y \in H;$$

or $\quad f'(x) = 0$

donc $\quad f(y) \geq f(x) \quad \forall\ y \in H$

d'où f admet un minimun au point $x \in H$.■

Proposition 1.3:

Si $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe et différentiable et si

$\lim_{\|x\|_H \to +\infty} f(x) = +\infty$, *alors il existe $\bar{x} \in H$ où f admet un minimun.*

Preuve:

On pose $m = \inf_{x \in H} f(x)$.

Il existe alors une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de H telle que

$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = m$.

Supposons que $m = -\infty$

Considérons les deux cas suivants :

1er cas : si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors il existe $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite

de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge faiblement vers un élément $\bar{x}$ de H;

comme f est semi-continue inférieurement alors $\underline{\lim}\, f(x_{n_k}) = -\infty \geq f(\bar{x})$,

ce qui est absurde.

2ème cas: si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée alors il existe $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ une

sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{k \longrightarrow +\infty} \|x_{n_k}\|_H = +\infty$,

d'où $-\infty = \lim_{k \longrightarrow +\infty} f(x_{n_k}) = +\infty$, ce qui est absurde.

De ces deux cas on déduit que $m \in \mathbb{R}$.

Considérons maintenant les deux cas suivants:

1er cas : Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, alors il existe

$(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{k \longrightarrow +\infty} \|x_{n_k}\|_H = +\infty$,

d'où $m = \lim_{k \longrightarrow +\infty} f(x_{n_k}) = +\infty$, ce qui est absurde.

2ème cas :Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on peut extraire une

sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente faiblement vers un élément $\bar{x}$ de H.

Comme f est semi-continue inférieurement, on a:

$$\underline{\lim}\, f(x_{n_k}) \geq f(\bar{x});$$

or $$\lim_{k \longrightarrow +\infty} f(x_{n_k}) = m$$

donc $\quad m \geq f(\bar{x}) \geq m \quad$ d'ou $\quad f(\bar{x}) = m.$ ■

<u>Proposition 1.4 :</u>

Soit $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ *une forme bilinéaire symétrique telle que :*

i) $\exists\, M \in \mathbb{R}_+ \;/\; \forall (x,y) \in H \times H \quad |a(x,y)| \leq M \|x\|_H \|y\|_H$

ii) $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^* \;/\; \forall\, x \in H,\; a(x,x) \geq \alpha \|x\|_H^2$ (*a H-elliptique*)

et soit f *une forme linéaire continue sur H.*

Si $J(x) = \frac{1}{2} a(x,x) - \langle f, x \rangle_{H^* H'}$ *alors il existe un et un seul* $\bar{x} \in H$ *où* J *admet un minimum; de plus* $\bar{x}$ *est l'unique solution de l'équation :*

$$a(\bar{x},h) - \langle f,h \rangle_{H^* H} = 0 \qquad \forall\, h \in H.$$

<u>**Preuve:**</u>

La fonction quadratique J est strictement convexe et différentiable: en effet d'une part $x \longrightarrow a(x,x)$ est une forme quadratique définie positive donc strictement convexe et elle est différentielle car a étant continue est différentiable; d'autre part f étant linéaire et continue est convexe et differentiable.

Comme $J(x) \geq \frac{\alpha}{2} \|x\|_H^2 - \|f\|_{H^*} \|x\|_H$,on a: $\lim\limits_{\|x\|_H \longrightarrow +\infty} J(x) = +\infty$ donc il existe $\bar{x} \in H$ où J admet un minimun; J étant strictement convexe alors $\bar{x}$ est unique.

On a:

$$J'(\bar{x}).h = a(\bar{x},h) - \langle f,h \rangle_{H^* H} \qquad \forall\, h \in H.$$

J atteint son minimun en $\bar{x}$, d'après la proposition 1.2, si et seulement si $\quad J'(\bar{x}).h = 0 \qquad \forall\, h \in H$

ou encore

$$a(\bar{x}, h) - \langle f, h \rangle_{H^* H} = 0 \qquad \forall h \in H. \blacksquare$$

II. Lemme de Von Neumann

Soit $\mathcal{L}(H)$ l'ensemble des endomorphismes continus sur l'espace de Hilbert H; soit I l'identité de H.

Lemme 1.1 (Von Neumann):

Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ *tel que* $\|A\|_{\mathcal{L}(H)} < 1$; *alors l'opérateur* $(I - A)$ *est inversible dans* $\mathcal{L}(H)$, *et de plus:*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n.$$

Preuve:

Comme H est un espace de Hilbert alors $\mathcal{L}(H)$ est un espace de Banach. La série $\sum_{n\geq 0} A^n$ est normalement convergente dans $\mathcal{L}(H)$ puisque $\|A^n\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \|A\|^n_{\mathcal{L}(H)}$.

Soit S la somme de la série $\sum_{n\geq 0} A^n$ et S_n sa somme partielle d'ordre n.

Comme $\qquad AS_n = S_nA = \sum_{K=1}^{n+1} A^K$,

on a : $\qquad AS = SA = \sum_{n=1}^{\infty} A^n$;

donc $\qquad S * (I-A) = (I-A) * S = I$

d'où S est l'inverse de I-A . $\blacksquare$

III. Version de Hormander du theoreme de Holmgren

On énonce une version de Hormander du théorème de Holmgren qui combinée avec le théorème de Cauchy-Kowalewska permet d'obtenir des résultats d'unicité des solutions des équations aux dérivées partielles

Plan caractéristique :

Définition 1.2 :

On appelle opérateur différentiel d'ordre m à coefficients constants, un opérateur P de la forme:

$$P = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^N \\ |\alpha| \leq m}} a_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}},$$

où $a_\alpha \in \mathbb{R}$ et il existe $\alpha_0 \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha_0| = m$ et $a_{\alpha_0} \neq 0$.

Définition 1.3 :

On appelle plan caractéristique π de P l'ensemble:

$$\pi = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^N \,/\, \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^N \\ |\alpha| = m}} a_\alpha \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_N^{\alpha_N} = 0 \right\}.$$

Théorème 1.1 (L. Hormander) :

Soient Θ_1 et Θ_2 *deux ouverts de* $\mathbb{R}^n$ *tels que* $\Theta_1 \subset \Theta_2$ *et soit* $P(D)$ *un opérateur différentiel à coefficients constants tel que tout plan* π *caractéristique par rapport à* $P(D)$ *et vérifiant* $\pi \cap \Theta_2 \neq \emptyset$ *satisfait aussi* $\pi \cap \Theta_1 \neq \emptyset$; *alors toute solution* $u \in D'(\Theta_2)$ *de l'équation* $P(D)\, u = 0$ *telle que* $u = 0$ *dans* Θ_1 *vérifie* $u = 0$ *dans* Θ_2. ■

CHAPITRE 2: OBSERVABILITE SPECTRALE APPROCHEE DE L'EQUATION DES ONDES PAR DES MESURES SUR UNE PETITE PARTIE OUVERTE DE :

I. OBSERVABILITE SPECTRALE APPROCHEE DE L'EQUATION DES ONDES PAR DES MESURES SUR TOUT Ω :

MINIMISATION DE L'ENERGIE:

Soit T>0, on considère l'équation des ondes homogène:

$$(2.1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \Delta y = 0 & \text{dans } Q = \Omega \times (0,T) \\ y(x,0) = y(0) = y_0(x) & \text{sur } \Omega \\ \dfrac{\partial y(x,0)}{\partial t} = y'(0) = y_1(x) & \text{sur } \Omega \\ \gamma y = 0 & \text{sur } \Sigma = \partial\Omega \times]0, T[. \end{cases}$$

Soit y la solution de l'équation des ondes (2.1) pour les données initiales $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$ telles que $y \in L^2(Q)$.
On a la :

Proposition 2.1:

Sur $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, la fonctionnelle J définie par:

$$J((\phi_0,\phi_1)) = \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \phi^2(x,t)\, dx\, dt - \int_0^T \int_\Omega \phi(x,t)\, y(x,t)\, dx\, dt,$$

où $\phi(x,t)$ est la solution de (2.1) de données initiales $\phi(0) = \phi_0$ et $\phi'(0) = \phi_1$, admet un minimum unique atteint au point $(y_0,y_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

Preuve:

Soient ϕ et ψ les solutions de (2.1) de données initiales respectives (ϕ_0,ϕ_1) et (ψ_0,ψ_1), on considère les fonctionnelles suivantes:

$$a:\left[L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)\right]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$((\phi_0,\phi_1),(\psi_0,\psi_1)) \longmapsto \int_0^T\int_\Omega \phi(x,t)\ \psi(x,t)\ dx\ dt,$$

et $\quad f_y: L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(\phi_0,\ \phi_1) \longmapsto \int_0^T\int_\Omega \phi(x,t)\ y(x,t)\ dx\ dt.$$

On montre d'abord que a est bien définie : en effet la solution ϕ de (2.1) pour les données initiales $\left[\phi_0,\phi_1\right] \in L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$ s'écrit:

$$(2.2)\quad \phi\ (x,t) = \sum_{j=1}^{\infty}\left[(\phi_j^0\ \cos\ (\sqrt{\lambda_j}\,t)\ +\ \phi_j^1\ \frac{\sin(\sqrt{\lambda_j}\,t)}{\sqrt{\lambda_j}}\right]w_j(x)$$

donc

$$\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\left[(\phi_j^0\ \cos\ (\sqrt{\lambda_j}\,t)\ +\ \phi_j^1\ \frac{\sin(\sqrt{\lambda_j}\,t)}{\sqrt{\lambda_j}}\right]w_j(x)\right\}^2 dx$$

d'où

$$\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{j=1}^{\infty}\left[(\phi_j^0\ \cos\ (\sqrt{\lambda_j}\,t)\ +\ \phi_j^1\ \frac{\sin(\sqrt{\lambda_j}\,t)}{\sqrt{\lambda_j}}\right]^2$$

soit

$$\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{j=1}^{\infty}\left\{{\phi_j^0}^2\ \cos^2(\sqrt{\lambda_j}\,t\ +\ {\phi_j^1}^2\ \frac{\sin^2(\sqrt{\lambda_j}\,t)}{\lambda_j}\right\}$$

$$+ 2 \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j^0 \phi_j^1 \cos(\sqrt{\lambda_j}\, t) \frac{\sin(\sqrt{\lambda_j}\, t)}{\sqrt{\lambda_j}}$$

d'où

$$\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{j=1}^{\infty} 2\left[{\phi_j^0}^2 + \frac{{\phi_j^1}^2}{\lambda_j}\right]$$

Aussi

$$\|\phi\|^2_{L^2(Q)} = \int_0^T \|\phi\|^2_{L^2(\Omega)} dt \leq 2T \sum_{j=1}^{\infty} \left[{\phi_j^0}^2 + \frac{{\phi_j^1}^2}{\lambda_j}\right]$$

donc

$$\|\phi\|^2_{L^2(Q)} \leq 2T \left[\|\phi_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\phi_1\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\right] < +\infty$$

d'où $\phi \in L^2(Q)$, donc a est bien définie sur $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

La fonctionnelle a est bilinéaire, symétrique; elle est continue car pour tout $((\phi_0,\phi_1), (\psi_0,\psi_1)) \in \left[L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)\right]^2$, on a :

$$| a((\phi_0,\phi_1), (\psi_0,\psi_1)) | = \left| \int_0^T \int_\omega \phi(x,t)\, \psi(x,t)\, dx\, dt \right|$$

$$\leq \|\phi\|_{L^2(Q)} \|\psi\|_{L^2(Q)}$$

soit

$$| a((\phi_0,\phi_1), (\psi_0,\psi_1)) | \leq 2T \|(\phi_0,\phi_1)\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} \|(\psi_0,\psi_1)\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}$$

La fonctionnelle a est coercitive :

soit $(\phi_0,\phi_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$

$$a((\phi_0,\phi_1)\ ,\ (\phi_0,\phi_1)) = \int_0^T \int_\Omega \phi^2(x,t)\ dx\ dt$$

$$= \int_0^T \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1 + \cos(2\sqrt{\lambda_i}\ t)}{2}\ \phi_i^{0^2} \right.$$

$$+ \phi_i^0\ \frac{\phi_i^1}{\lambda_i}\ \sin\ (2\sqrt{\lambda_i}\ t)$$

$$\left. + \frac{1 - \cos(2\sqrt{\lambda_i}\ t)}{2}\ \phi_i^{1^2} \right] dt.$$

$$= \frac{T}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\phi_i^{0^2} + \frac{\phi_i^1}{\lambda_i}\right) + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(2\sqrt{\lambda_i}\ T)}{4\sqrt{\lambda_i}}\ \phi_i^{0^2} - \frac{\sin(2\sqrt{\lambda_i}\ T)}{2\sqrt{\lambda_i}}\ \frac{\phi_i^{1^2}}{2\lambda_i} \right.$$

$$\left. - \phi_i^0 \frac{\phi_i^1}{\sqrt{\lambda_i}} \left(\frac{\cos(2\sqrt{\lambda_i}\ T) - 1}{2\sqrt{\lambda_i}}\right)\right]$$

donc

$$a((\phi_0,\phi_1)\ ,\ (\phi_0,\phi_1)) \geq \frac{T}{2}\ \|(\phi_0,\phi_1)\|^2_{L^2(\Omega)\ \times\ H^{-1}(\Omega)}$$

$$- \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4\sqrt{\lambda_i}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\right) \left(\phi_i^{0^2} + \frac{\phi^{1^2}}{\lambda_i}\right)$$

soit

$$a((\phi_0,\phi_1)\ ,\ (\phi_0,\phi_1)) \geq \left(\frac{T}{2} - \frac{5}{4\sqrt{\lambda_1}}\right) \|(\phi_0,\phi_1)\|^2_{L^2(\Omega)\ \times\ H^{-1}(\Omega)}$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(T - T_0\right) \|(\phi_0,\phi_1)\|^2_{L^2(\Omega)\ \times\ H^{-1}(\Omega)},$$

où $T_0 = \dfrac{5}{2\sqrt{\lambda_1}}$.

Donc si $T > T_0$, en posant $\alpha = \frac{1}{2}(T - T_0)$, on a $\alpha > 0$ et

$$a((\phi_0,\phi_1),(\phi_0,\phi_1)) \geq \alpha \, \|(\phi_0,\phi_1)\|^2_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} ,$$

d'où a est coercive.

La fonctionnelle f_y est linéaire, elle est continue : en effet si $(\phi_0,\phi_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, on a :

$|f_y((\phi_0,\phi_1))| \leq C \, \|(\phi_0,\phi_1)\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)}$, avec $C = \sqrt{2T} \, \|y\|_{L^2(Q)}$.

On remarque que

$$\left[\int_Q \phi^2(x,t) \, dx \, dt \right]^{1/2}$$

définit une norme sur $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ équivalente à la norme produit $\| \ \|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)}$ de $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

Aussi comme $y \in L^2(Q)$ alors $(y_0,y_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, donc d'après la proposition 1.4, la fonctionnelle J admet un minimum unique atteint en un point $(\Phi_0,\Phi_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

Soit Φ la solution de (2.1) pour les données initiales (Φ_0,Φ_1); on a alors :

pour tout ψ solution de (2.1) de données initiales $(\psi_0,\psi_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, on a :

$$J'((\Phi_0,\Phi_1)).(\psi_0,\psi_1) = 0$$

donc

$$\int_0^T\int_\Omega \Phi(x,t)\ \psi(x,t)\ dx\ dt - \int_0^T\int_\Omega \psi(x,t)\ y(x,t)\ dx\ dt = 0,$$

d'où

$$\int_0^T\int_\Omega \Big[\Phi(x,t) - y(x,t)\Big]\psi(x,t)\ dx\ dt = 0,$$

en particulier pour $\psi = \Phi - y$, on a :

$\|\Phi - y\|_{L^2(Q)} = 0$,

donc $y = \Phi$ sur Q.

Il en résulte que $(\Phi_0,\Phi_1) = (y_0,y_1)$.■

REMARQUE :

Cette étude sur ce cas particulier est facilitée par le fait que

$y|_{\Omega\times]0,T[} \in L^2(Q)$ entraine $(y_0,y_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

Cette propriété est essentielle puisque si on réduit trop la partie spatiale ω sur laquelle on observe, on n'a plus d'information sur l'espace F_ω caractérisé par:

$y|_{\omega\times]0,T[} \in L^2(\omega \times]0,T[)$ alors $(y_0,y_1) \in F_\omega$;

ceci est nécessaire pour déterminer complètement (y_0,y_1) par la connaissance de $y|_{\omega\times]0,T[}$.■

II. OBSERVABILITE SPECTRALE APPROCHEE DE L'EQUATION DES ONDES PAR DES MESURES SUR UNE PARTIE ω de Ω.

II.1 RESULTAT PRINCIPAL :

La proposition 2.1 montre que la connaissance de $y|_{\omega\times]0,T[}$ permet de reconstituer (y_0, y_1) lorsque y est solution de l'équation des ondes homogène.

Cette propriété repose sur le fait que la norme

$$\left[\int_0^T \int_\Omega \phi^2(x,t)\ dx\ dt\right]^{1/2}$$

est équivalente à celle de

$$\left[\|\phi_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\phi_1\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\right]^{1/2}$$

pour toute solution ϕ de l'équation des ondes homogène.

Cette équivalence reste encore valable si on choisit ω et T de la façon suivante :

soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, on pose

$m(x) = x - x_0$,

$\Gamma(x_0) = \left\{x \in \Gamma \ / \ m(x).\ \nu(x) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x)\ \nu_k(x) > 0\right\}$,

où $\nu(x)$ est la normale unitaire extérieure à Ω au point $x \in \partial\Omega$ et soit V un voisinage ouvert de $\Gamma(x_0)$;

on prend alors $\omega = \Omega \cap V$ et $T > 2 \max\limits_{x\in\Omega} \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n}$.

Ce résultat est établi par E. Zuazua [8].

Cependant d'après un résultat de Bardos-Lebeau-Rauch [1], si ω est trop petit cette équivalence est fausse; aussi l'espace parcouru par (ϕ_0, ϕ_1) lorsque

$$\int_0^T \int_\omega \phi^2(x,t)\ dx\ dt$$

est fini n'est pas déterminé.

Soit

$$J((\phi_0,\phi_1)) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega \phi^2(x,t)\ dx\ dt - \int_0^T \int_\omega \phi(x,t)\ y(x,t)\ dx\ dt,$$

on considère le problème d'optimisation

$$(2.3) \qquad \min_{(\phi_0,\phi_1)\in F_M\times F_M} J((\phi_0,\phi_1)).$$

Ce problème ne permet pas de reconstituer (y_0,y_1) mais il suggère de comparer sa solution avec la projection orthogonale de (y_0,y_1) sur $F_M\times F_M$.

Le résultat principal de ce travail est de montrer que si

$$J((\Phi_0,\Phi_1)) = \min_{(\phi_0,\phi_1)\in F_M\times F_M} J((\phi_0,\phi_1))$$

alors (Φ_0,Φ_1) est une approximation de la projection orthogonale de (y_0,y_1) sur $F_M\times F_M$ et que l'erreur commise est inversement proportionnelle à la durée de la mesure sur ω pour un choix de (y_0,y_1) dans des espaces que nous déterminons explicitement.

Ce résultat permet d'évaluer la durée minimale de la prise de mesures pour pouvoir obtenir avec une précision suffisante les M premières composantes spectrales de (y_0,y_1) sur $F_M\times F_M$.

Cette évaluation est un préalable à toute stratégie de contrôle du système (2.1).

Ce résultat est aussi d'intérêt pratique puisqu'il est en général impossible de prendre des mesures en tout point de Ω.

Pour contourner cette difficulté, on restreint la fonctionnelle J à l'espace $F_M \times F_M$ .Sur cet espace de dimension finie, le problème

$\min_{(\phi_0,\phi_1)\in F_M\times F_M} J((\phi_0,\phi_1))$ admet une unique solution (Φ_0,Φ_1). On compare cette solution avec la projection sur $F_M\times F_M$ de (y_0,y_1), on obtient ainsi une estimation très précise de l'erreur.

Soit A l'opérateur non borné de $L^2(\Omega)$ défini par

$$D(A) = \left\{ u\in H_0^1(\Omega) \ / \ -\Delta u \in L^2(\Omega) \right\};$$

$$\forall\ u \in D(A),\ Au = -\Delta u,$$

on pose $G = D(A^{-1/2}) \times D(A^{-1})$.

On peut énoncer le résultat principal de ce travail :

Théorème 2.1:

Soit $M \in \mathbb{N}^*$, *il existe deux constantes* $T_0 > 0$ et K *telles que pour tout* $T > T_0$, *si* y *est la solution de* (2.1) *de données initiales* $(y_0,y_1) \in G$, *l'unique solution* (Φ_0,Φ_1) *de*

$$\min_{(\phi_0,\phi_1)\in F_M\times F_M} J((\phi_0,\phi_1))$$

vérifie :

$$\left\| \begin{matrix} \Phi_0 - P_{F_M}(y_0) \\ \Phi_1 - P_{F_M}(y_1) \end{matrix} \right\|_{F_M\times F_M} \leq \frac{K}{T} \left\| \left(y_0 - P_{F_M}(y_0),\ \ y_1 - P_{F_M}(y_1) \right) \right\|_G$$

où T_0 et K *ne dépendent que de* M *et de* ω.

REMARQUES :

1) En laissant y en évolution libre pendant un intervalle de temps durant lequel on effectue des mesures sur ω, on peut reconstituer une approximation $(\bar{\Phi}_0,\bar{\Phi}_1)$ de la projection orthogonale sur $F_M \times F_M$ de l'état initial (y_0,y_1) du système avec la précision désirée.

2) L'intérêt d'un tel résultat réside dans le fait que pour beaucoup de systèmes physiques ce sont les ondes courtes qui recèlent l'essentiel de l'énergie. Pouvoir donc les identifier est un atout pour demarrer tout algorithme de contrôle approché du système.

3) Ce résultat va dans la direction de la réduction du volume énorme de calcul nécessaire à l'évaluation des données initiales.

II.2 Preuve du résultat principal

Cette preuve est faite en plusieurs étapes :

II.2.1 Minimisation de l'énergie

Soit y une solution de l'équation des ondes (2.1) pour les données initiales $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$ telle que $y \in L^2(Q)$.

On a la :

Proposition 2.2:

Sur $F_M \times F_M$, la fonctionnelle J définie par:

$$J((\phi_0,\phi_1)) = \frac{1}{2}\int_0^T\int_\omega \phi^2(x,t)\,dx\,dt - \int_0^T\int_\omega \phi(x,t)\,y(x,t)\,dx\,dt,$$

où $\phi(x,t)$ est la solution de (2.1) de données initiales $\phi(0) = \phi_0$ et $\phi'(0) = \phi_1$ admet un minimum unique atteint au point $(\bar{\Phi}_0,\bar{\Phi}_1)$, *caractérisé par:*

Φ est la solution de (2.1) de données initiales (Φ_0,Φ_1) si et seulement si pour tout $\psi(x,t)$ solution de (2.1) de données initiales $(\psi_0,\psi_1) \in F_M\times F_M$,

$$(2.4)\quad \int_0^T \int_\omega \Phi(x,t)\ \psi(x,t)\ dx\ dt - \int_0^T \int_\omega y(x,t)\ \psi(x,t)\ dx\ dt = 0,$$

Preuve:

Soient ϕ et ψ les solutions de (2.1) de données initiales respectives (ϕ_0,ϕ_1) et (ψ_0,ψ_1), on considère les fonctionnelles suivantes:

$$a : \left[F_M\times F_M\right]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$((\phi_0,\phi_1),(\psi_0,\psi_1)) \longmapsto \int_0^T \int_\omega \phi(x,t)\ \psi(x,t)\ dx\ dt,$$

et

$$g_y : F_M\times F_M \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\phi_0,\ \phi_1) \longmapsto \int_0^T \int_\omega \phi(x,t)\ y(x,t)\ dx\ dt.$$

• Soit $(\phi_0,\phi_1) \in F_M\times F_M$ alors ϕ la solution de (2.1) de données initiales (ϕ_0,ϕ_1) est dans $C^\infty(\ [0,T] \times \bar{\Omega}\ )$ du fait que Ω est de frontière régulière donc $\phi \in L^2(\omega \times\ ]0,T[)$ donc a est bien définie.

• a est bilinéaire, symétrique sur $F_M \times F_M$ qui est de dimension finie donc a est continue; aussi existe-t-il une constante $M_0 > 0$ telle que:

$$|a\ ((\phi_0,\phi_1),(\psi_0,\psi_1))| \le M_0\ \|(\phi_0,\phi_1)\|_{F_M\times F_M}\ \|(\psi_0,\psi_1)\|_{F_M\times F_M}$$

pour tous $(\phi_0,\phi_1) \in F_M\times F_M$, $(\psi_0,\psi_1) \in F_M\times F_M$.

• a est coercive : en effet on a:

$$a\,((\phi_0,\phi_1),(\phi_0,\phi_1)) = \int_0^T \int_\omega \phi^2(x,t)\,dx\,dt = \|\phi\|^2_{L^2(0,T\,;L^2(\omega))}$$

$$= \int_0^T \int_\omega \left\{ \sum_{j=1}^{M} \left[(\phi_j^0 \cos(\sqrt{\lambda_j}\,t) + \phi_j^1 \frac{\sin(\sqrt{\lambda_j}\,t)}{\sqrt{\lambda_j}} \right] w_j(x) \right\}^2 dx\,dt$$

$$= \sum_{j=1}^{M} \int_0^T \left\{ {\phi_j^0}^2 \cos^2(\sqrt{\lambda_j}\,t) + {\phi_j^1}^2 \frac{\sin^2(\sqrt{\lambda_j}\,t)}{\lambda_j} \right\} dt \int_\omega w_j^2(x)\,dx$$

$$+ 2 \sum_{1\le j,k\le M} \int_0^T \phi_j^0\, \phi_k^1 \cos(\sqrt{\lambda_j}\,t) \frac{\sin(\sqrt{\lambda_k}\,t)}{\sqrt{\lambda_k}}\,dt \int_\omega w_j(x)\, w_k(x)\,dx$$

$$+ 2 \sum_{\substack{1\le j,k\le M \\ j\ne k}} \int_0^T \phi_k^0\, \phi_j^0 \cos(\sqrt{\lambda_k}\,t) \cos(\sqrt{\lambda_j}\,t)\,dt \int_\omega w_k(x)\, w_j(x)\,dx$$

$$+ 2 \sum_{\substack{1\le j,k\le M \\ j\ne k}} \int_0^T \phi_k^1\, \phi_j^1 \frac{\sin(\sqrt{\lambda_k}\,t)\,\sin(\sqrt{\lambda_j}\,t)}{\sqrt{\lambda_k}\,\sqrt{\lambda_j}}\,dt \int_\omega w_k(x)\, w_j(x)\,dx$$

Les trois derniers termes donnent lieu à des estimations indépendantes du temps. En effet :

$$I_1 = \left| 2 \sum_{\substack{1\le j,k\le M \\ j\ne k}} \int_0^T \phi_k^0\, \phi_j^1 \cos(\sqrt{\lambda_j}\,t) \frac{\sin(\sqrt{\lambda_k}\,t)}{\sqrt{\lambda_k}}\,dt \int_\omega w_j(x)\, w_k(x)\,dx \right|$$

$$\le \sum_{\substack{1\le j,k\le M \\ j\ne k}} |\phi_j^0| \left| \frac{\phi_k^1}{\sqrt{\lambda_k}} \right| \left| \int_0^T 2\cos(\sqrt{\lambda_j}\,t)\,\sin(\sqrt{\lambda_k}\,t)\,dt \right| \left| \int_\omega w_j(x)\, w_k(x)\,dx \right|$$

Soit $I_1 \le \sum_{\substack{1\le j,k\le M \\ j\ne k}} \alpha_{jk}\, |\phi_j^0| \left| \frac{\phi_k^1}{\sqrt{\lambda_k}} \right| \|w_j\|_{L^2(\omega)} \|w_k\|_{L^2(\omega)}$, avec $\alpha_{jk} = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_k}} + \dfrac{1}{|\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_k}|} + \dfrac{2\sqrt{\lambda_j}}{|\lambda_j - \lambda_k|}$

d'où

$$I_1 \leq \sum_{\substack{1\leq j,k\leq M \\ j\neq k}} \alpha_{jk} \left[\frac{|\phi_j^0|^2 \|w_j\|^2_{L^2(\omega)}}{2} + \frac{|\phi_k^1|^2 \|w_k\|^2_{L^2(\omega)}}{2\lambda_k} \right]$$

donc

$$I_1 \leq \sum_{\substack{1\leq j,k\leq M \\ j\neq k}} \frac{\alpha_{jk}}{2} \left[|\phi_j^0|^2 \|w_j\|^2_{L^2(\omega)} + \frac{|\phi_k^1|^2}{\lambda_k} \|w_k\|^2_{L^2(\omega)} \right]$$

De même :

$$I_2 = \Big| \sum_{1\leq k<j\leq M} \int_0^T 2\, \phi_k^0\, \phi_j^0 \cos(\sqrt{\lambda_k}\, t) \cos(\sqrt{\lambda_j}\, t)\, dt \int_\omega w_k(x)\, w_j(x)\, dx \Big|$$

$$\leq \sum_{1\leq k<j<M} \frac{\beta_{jk}}{2} \left[|\phi_k^0|^2 \|w_k\|^2_{L^2(\omega)} + |\phi_j^0|^2 \|w_j\|^2_{L^2(\omega)} \right],$$

où $\beta_{jk} = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_k} + \sqrt{\lambda_j}} + \dfrac{1}{|\sqrt{\lambda_k} - \sqrt{\lambda_j}|}$,pour $k \neq j$.

Il en est de même pour

$$I_3 = \Big| \sum_{1\leq k<j\leq M} \int_0^T 2\phi_k^1\, \phi_j^1 \frac{\sin(\sqrt{\lambda_k}\, t)\, \sin(\sqrt{\lambda_j}\, t)}{\sqrt{\lambda_k}\, \sqrt{\lambda_j}}\, dt \int_\omega w_k(x)\, w_j(x)\, dx \Big|$$

$$\leq \sum_{1\leq k<j\leq M} \frac{\gamma_{jk}}{2} \left[\frac{|\phi_k^1|^2}{\lambda_k} \|w_k\|^2_{L^2(\omega)} + \frac{|\phi_j^1|^2}{\lambda_j} \|w_j\|^2_{L^2(\omega)} \right],$$

où $\gamma_{jk} = \dfrac{1}{|\sqrt{\lambda_k} - \sqrt{\lambda_j}|} + \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_k} + \sqrt{\lambda_j}}$, pour $k \neq j$.

Enfin on a aussi

$$I_4 = \Big| \sum_{1 \le j \le M} \int_0^T 2\, \phi_j^0\, \phi_j^1 \cos(\sqrt{\lambda_j}\, t) \frac{\sin(\sqrt{\lambda_j}\, t)}{\sqrt{\lambda_j}} dt \int_\omega w_j^2(x) dx \Big|$$

$$\le \sum_{1 \le j \le M} \frac{\rho_j}{2} \left[|\phi_j^0|^2 + \frac{|\phi_j^1|^2}{\lambda_j} \right] \|w_j\|^2_{L^2(\omega)},$$

où $\rho_j = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_j}}$.

De ces majorations, on tire :

$$\|\phi\|^2_{L^2(0,T\,;\,L^2(\omega))} \ge \sum_{j=1}^{M} \left[|\phi_j^0|^2 \left(\frac{T}{2} - \frac{1}{4\sqrt{\lambda_j}} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{|\phi_j^1|^2}{\lambda_j} \left(\frac{T}{2} - \frac{1}{4\sqrt{\lambda_j}} \right) \right] \|w_j\|^2_{L^2(\omega)}$$

$$- \sum_{\substack{1 \le j,k \le M \\ j \ne k}} \frac{\alpha_{jk}}{2} \left[|\phi_j^0|^2 \|w_j\|^2_{L^2(\omega)} + \frac{|\phi_k^1|^2}{\lambda_k} \|w_k\|^2_{L^2(\omega)} \right]$$

$$- \sum_{1 \le j \le M} \frac{\rho_j}{2} \left[|\phi_j^0|^2 + \frac{|\phi_j^1|^2}{\lambda_j} \right] \|w_j\|^2_{L^2(\omega)}$$

$$- \sum_{1 \le k < j \le M} \frac{\beta_{jk}}{2} \left[|\phi_k^0|^2 \|w_k\|^2_{L^2(\omega)} + |\phi_j^0|^2 \|w_j\|^2_{L^2(\omega)} \right]$$

$$- \sum_{1 \le k < j \le M} \frac{\gamma_{jk}}{2} \left[\frac{|\phi_k^1|^2}{\lambda_k} \|w_k\|^2_{L^2(\omega)} + \frac{|\phi_j^1|^2}{\lambda_j} \|w_j\|^2_{L^2(\omega)} \right].$$

La première somme est obtenue en calculant les intégrales :

$$\int_0^T \cos^2(\sqrt{\lambda_j}\, t)\, dt \quad \text{et} \quad \int_0^T \frac{\sin^2(\sqrt{\lambda_j}\, t)}{\lambda_j} dt.$$

On a encore :

$$\|\phi\|^2_{L^2(0,T\, ;\, L^2(\omega))} \ge \left[\frac{T}{2} - c \right] \sum_{j=1}^{M} \left[|\phi_j^0|^2 + \frac{|\phi_j^1|^2}{\lambda_j} \right] \|w_j\|^2_{L^2(w)}$$

$$- \sum_{1 \le j \le M} \frac{\rho_j}{2} \left[|\phi_j^0|^2 + \frac{|\phi_j^1|^2}{\lambda_j} \right] \|w_j\|^2_{L^2(\omega)}$$

$$- \sum_{1 \le k < j \le M} \left[\frac{\beta_{jk} + \gamma_{jk}}{2} \right] \left\{ \left[|\phi_k^0|^2 + \frac{|\phi_k^1|^2}{\lambda_k} \right] \|w_k\|^2_{L^2(\omega)} \right.$$

$$\left. + \left[|\phi_j^0|^2 + \frac{|\phi_j^1|^2}{\lambda_j} \right] \|w_j\|^2_{L^2(\omega)} \right\}$$

$$- \sum_{\substack{1 \le j,k \le M \\ j \ne k}} \frac{\alpha_{jk}}{2} \left\{ \left[|\phi_j^0|^2 + \frac{|\phi_j^1|^2}{\lambda_j} \right] \|w_j\|^2_{L^2(\omega)} \right.$$

$$+ \left[|\phi_k^0|^2 + \frac{|\phi_k^1|^2}{\lambda_k} \right] \|w_k\|^2_{L^2(\omega)} \Big\},$$

$$\text{où } C = \max_{1 \leq j \leq M} \frac{1}{4\sqrt{\lambda_j}} = \frac{1}{4\sqrt{\lambda_1}}.$$

On pose :

$$T_0 = C + \rho + p.M.\beta + l.M.\gamma + m.M.\alpha ,$$

où

$$\alpha = \max_{\substack{1 \leq k, j \leq M \\ j \neq k}} \alpha_{jk}; \qquad \beta = \max_{1 \leq k < j \leq M} \beta_{jk} ;$$

$$\gamma = \max_{1 \leq k < j \leq M} \gamma_{jk} ; \qquad \rho = \max_{1 \leq j \leq M} \rho_j$$

et p, l, et m sont des constantes entières;

on a alors:

$$(2.5) \quad \|\phi\|^2_{L^2(0,T \,;\, L^2(\omega))} \geq \frac{1}{2} \left(T - T_0\right) \sum_{j=1}^{M} \left[|\phi_j^0|^2 + \frac{|\phi_j^1|^2}{\lambda_j} \right] \|w_j\|^2_{L^2(\omega)} . \blacksquare$$

Soit N l'application définie par:

$$F_M \times F_M \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$(\phi_0, \phi_1) \longmapsto N\left[(\phi_0, \phi_1)\right] = \left\{ \sum_{i=1}^{M} \left[|\phi_i^0|^2 + \frac{|\phi_i^1|^2}{\lambda_i} \right] \|w_i\|^2_{L^2(\omega)} \right\}^{1/2}$$

N définit une norme sur $F_M \times F_M$. En effet :

on a :

soit $(\phi_0, \phi_1) \in F_M \times F_M$, tel que

$$N\left[(\phi_0,\ \phi_1)\right] = 0 \quad \text{alors} \quad \left[|\phi_i^0|^2 + \frac{|\phi_i^1|^2}{\lambda_i}\right] \|w_i\|^2_{L^2(\omega)} = 0$$

pour tout $i \in \{1,\dots,M\}$

$$\text{donc} \quad \left\{ \begin{array}{l} |\phi_i^0| = 0 \text{ et } |\phi_i^1| = 0 \\ \qquad\quad \text{ou} \\ \|w_i\|_{L^2(\omega)} = 0 \end{array} \right. , \quad \text{pour tout } i \in \{1,\dots,M\}.$$

Supposons que $\|w_i\|_{L^2(\omega)} = 0$; comme ω est un ouvert non vide de Ω alors d'après la version de Hörmander du théorème de Holmgren, $w_i = 0$ dans Ω ce qui est absurde car $(w_i)_{i\geq 1}$ est une base Hilbertienne de $L^2(\Omega)$, aussi $\phi_i^0 = 0$ et $\phi_i^1 = 0$, pour tout $i \in \{1,\dots,M\}$,

donc $\phi_0 = 0$ et $\phi_1 = 0$.

Les autres propriétés étant triviales.

N définit donc une norme sur $F_M \times F_M$.■

$F_M \times F_M$ étant un espace normé de dimension finie alors N est équivalente à la norme sur $F_M \times F_M$, donc il existe une constante $k > 0$ telle que :

$$k\|(\phi_0,\ \phi_1)\|_{F_M \times F_M} \leq N\left[(\phi_0,\ \phi_1)\right].$$

Donc si $T > T_0$, en posant $\alpha = \frac{k^2}{2}(T-T_0)$, on a: $\alpha > 0$ et

$$a((\phi_0,\ \phi_1),(\phi_0,\ \phi_1)) \geq \frac{k^2}{2}\ (T - T_0)\ \|(\phi_0,\ \phi_1)\|^2_{F_M \times F_M},$$

d'où a coercitive.

Aussi d'après la proposition 1.4, la fonctionnelle J admet un minimum unique atteint en un point $(\Phi_0, \Phi_1) \in F_M x F_M$.

Soit Φ la solution de (2.1) pour les données initiales (Φ_0,Φ_1); on a alors :

pour tout ψ solution de (2.1) de données initiales

$(\psi_0,\psi_1) \in F_M x F_M$,

$J'((\Phi_0,\Phi_1).(\psi_0,\psi_1) = 0$

donc

$$(2.6) \quad \int_0^T\int_\omega \Phi(x,t)\ \psi(x,t)\ dx\ dt - \int_0^T\int_\omega \psi(x,t)\ y(x,t)\ dx\ dt = 0.$$

II.2.2 Preuve du résultat principal

On pose :

$$\Phi_0(x) = \sum_{j=1}^{M} \Phi_j^0\ w_j(x), \quad \Phi_1(x) = \sum_{j=1}^{M} \Phi_j^1\ w_j(x) \text{ alors on a:}$$

$$\Phi(x,t) = \sum_{j=1}^{M} \left\{\Phi_j^0 \cos(\sqrt{\lambda_j}\ t) + \Phi_j^1 \frac{\sin(\sqrt{\lambda_j}\ t)}{\sqrt{\lambda_j}}\right\} w_j(x).$$

Une base de $F_M x F_M$ est donnée par l'ensemble des vecteurs de la forme

$(w_i,0)$ pour $i \in \{1, \quad ,M\}$

et $(0,w_i)$ pour $i \in \{ 1,...,M \}$.

Il suffit donc d'appliquer à (2.6) les solutions de (2.1) correspondantes à ces données initiales pour déterminer (Φ_0,Φ_1) du fait de la linéarité de la relation (2.6).

On a alors :

a) $\psi(x,t) = \cos(\sqrt{\lambda_i}\, t)\, w_i(x)$, $1 \le i \le M$, donc $(\psi_0, \psi_1) = (w_i, 0)$,

$$(2.7)\quad \sum_{j=1}^{M} \int_0^T \int_\omega \Big[\Phi_j^0 \cos(\sqrt{\lambda_j}\, t) \cos(\sqrt{\lambda_i}\, t) + \Phi_j^1 \frac{\sin(\sqrt{\lambda_j}\, t)}{\sqrt{\lambda_j}} \cos(\sqrt{\lambda_i}\, t)\Big] w_j(x)\, w_i(x)\, dx\, dt$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^T \int_\omega \Big[y_j^0 \cos(\sqrt{\lambda_j}\, t) \cos(\sqrt{\lambda_i}\, t) + y_j^1 \Big(\frac{\sin(\sqrt{\lambda_j}\, t)\ \cos(\sqrt{\lambda_i}\, t)}{\sqrt{\lambda_j}}\Big)\Big] w_j(x)\, w_i(x)\, dx\, dt.$$

b) $\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \sin(\sqrt{\lambda}\, t)\, w_i(x)$, $1 \le i \le M$, donc $(\psi_0, \psi_1) = (0, w_i)$,

$$(2.8)\quad \sum_{j=1}^{M} \int_0^T \int_\omega \Big[\Phi_j^0 \frac{\cos(\sqrt{\lambda_j}\, t) \sin(\sqrt{\lambda_i}\, t)}{\sqrt{\lambda_i}} + \Phi_j^1 \frac{\sin(\sqrt{\lambda_j}\, t)\ \sin(\sqrt{\lambda_i}\, t)}{\sqrt{\lambda_j \lambda_i}}\Big] w_j(x) w_i(x)\, dx\, dt$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^T \int_\omega \Big[y_j^0 \frac{\cos(\sqrt{\lambda_j}\, t)\ \sin(\sqrt{\lambda_i}\, t)}{\sqrt{\lambda_i}} + y_j^1 \frac{\sin(\sqrt{\lambda_j}\, t)\ \sin(\sqrt{\lambda_i}\, t)}{\sqrt{\lambda_j \lambda_i}}\Big] w_j(x)\, w_i(x)\, dx\, dt$$

Pour le cas a) les relations s'écrivent aussi :

$$\int_0 \left[\Phi_i^0 \cos^2(\sqrt{\lambda_i}\, t) + \Phi_i^1 \frac{\sin(\sqrt{\lambda_i}\, t)\cos(\sqrt{\lambda_i}\, t)}{\sqrt{\lambda_i}}\right] dt \int_\omega w_i^2(x)\, dx$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{M} \int_0^T \left[\Phi_j^0 \cos(\sqrt{\lambda_j}\, t)\cos(\sqrt{\lambda_i}\, t)\right.$$

$$\left. + \Phi_j^1 \frac{\sin(\sqrt{\lambda_j}\, t)\cos(\sqrt{\lambda_i}\, t)}{\sqrt{\lambda_j}}\right] dt \int_\omega w_j(x) w_i(x) dx$$

$$= \int_0^T \left[y_i^0 \cos^2(\sqrt{\lambda_j}\, t) + y_i^1 \frac{\sin(\sqrt{\lambda_i}\, t)\cos(\sqrt{\lambda_i}\, t)}{\sqrt{\lambda_i}}\right] dt \int_\omega w_i^2(x) dx$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{\infty} \int_0^T \left[y_j^0 \cos(\sqrt{\lambda_j}\, t)\cos(\sqrt{\lambda_i}\, t)\right.$$

$$\left. + y_j^1 \frac{\sin(\sqrt{\lambda_j}\, t)\cos(\sqrt{\lambda_i}\, t)}{\sqrt{\lambda_j}}\right] dt \int_\omega w_j(x)\, w_i(x)\, dx$$

ou encore

$$\left[\left(\Phi_i^0 - y_i^0\right)\left(\frac{T}{2} + \frac{\sin(2\sqrt{\lambda_i}\,T)}{4\sqrt{\lambda_i}}\right) + \left(\Phi_i^1 - y_i^1\right)\left(\frac{1-\cos(2\sqrt{\lambda_i}\,T)}{4\lambda_i}\right)\right]\int_\omega w_i^2(x)\, dx$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{M} \frac{1}{2}\left[\left(\Phi_j^0 - y_j^0\right)\left\{\frac{\sin\left[(\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i}} + \frac{\sin\left[(\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i}}\right\}\right.$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\lambda_j}}\left(\Phi_j^1 - y_j^1\right)\left\{-\frac{\cos\left[(\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i}} + \frac{\cos\left[(\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_i} - \sqrt{\lambda_j}}\right.$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\lambda_i} + \sqrt{\lambda_j}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_i} - \sqrt{\lambda_j}} \Bigg\} \Bigg] \int_\omega w_j(x) w_i(x) \; dx$$

$$= \sum_{j=M+1}^{\infty} \Bigg[\frac{1}{2} \; y_j^0 \left\{ \frac{\sin\left[(\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i}} + \frac{\sin\left[(\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i}} \right\}$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\lambda_j}} \; y_j^1 \Bigg\{ - \frac{\cos\left[(\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i}} + \frac{\cos\left[(\sqrt{\lambda_i} - \sqrt{\lambda_j})T\right]}{\sqrt{\lambda_i} - \sqrt{\lambda_j}}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\lambda_i} + \sqrt{\lambda_j}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_i} - \sqrt{\lambda_j}} \Bigg\} \Bigg] \int_\omega w_j(x) w_i(x) \; dx.$$

De même, pour b) on obtient :

$$\int_0^T \left[\Phi_i^0 \; \frac{\cos(\sqrt{\lambda_i}\; t) \; \sin(\sqrt{\lambda_i}\, t)}{\sqrt{\lambda_i}} + \phi_i^1 \; \frac{\sin^2(\sqrt{\lambda_i}\; t)}{\lambda_i} \right] dt \int_\omega w_i^2(x) dx$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{M} \int_0^T \int_\omega \Bigg[\Phi_j^0 \; \frac{\cos(\sqrt{\lambda_j}\; t) \; \sin(\sqrt{\lambda_i}\; t)}{\sqrt{\lambda_i}}$$

$$+ \Phi_j^1 \; \frac{\sin(\sqrt{\lambda_j}\; t) \; \sin(\sqrt{\lambda_i}\; t)}{\sqrt{\lambda_j \lambda_i}} \Bigg] w_j(x) \; w_i(x) \; dx \; dt$$

$$= \int_0^T \left[y_i^0 \; \frac{\cos(\sqrt{\lambda_i}\; t) \; \sin(\sqrt{\lambda_i}\; t)}{\sqrt{\lambda_i}} + y_i^1 \; \frac{\sin^2(\sqrt{\lambda_i}\; t)}{\lambda_i} \right] dt \int_\omega w_i^2(x) \; dx$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{\infty} \int_0^T \int_\omega \Bigg[y_j^0 \; \frac{\cos(\sqrt{\lambda_j}\; t) \; \sin(\sqrt{\lambda_i}\; t)}{\sqrt{\lambda_i}}$$

$$+ y_j^1 \frac{\sin(\sqrt{\lambda_j}\, t)\ \sin(\sqrt{\lambda_i}\, t)}{\sqrt{\lambda_j \lambda_i}} \Bigg] w_j(x)\ w_i(x)\ dx\ dt;$$

on peut mettre cette formule sous la forme suivante :

$$\Bigg[\left(\Phi_i^0 - y_i^0\right)\left(\frac{1 - \cos(2\sqrt{\lambda_i}\, T)}{4\lambda_i}\right)$$

$$+ \frac{1}{\lambda_i}\left(\Phi_i^1 - y_i^1\right)\left[\frac{T}{2} - \frac{\sin(2\sqrt{\lambda_i}\, T)}{4\sqrt{\lambda_i}}\right]\Bigg]\int_\omega w_{i(x)}^2\ dx$$

$$+ \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{M} \frac{1}{2\sqrt{\lambda_i}}\left[\left(\Phi_j^0 - y_j^0\right)\left\{- \frac{\cos\left[(\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i}} + \frac{\cos\left[(\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i}}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{\sqrt{\lambda_i} + \sqrt{\lambda_j}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_i} - \sqrt{\lambda_j}}\right\}\right] \int_\omega w_j(x) w_i(x)\ dx$$

$$+ \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{M} \frac{1}{2\sqrt{\lambda_j \lambda_i}}\left(\Phi_j^1 - y_j^1\right)\left\{\frac{\sin\left[(\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i}}\right.$$

$$\left. - \frac{\sin\left[(\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i}}\right\}\Bigg] \int_\omega w_j(x) w_i(x)\ dx$$

$$= \sum_{j=M+1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\sqrt{\lambda_i}}\, y_j^0 \left\{- \frac{\cos\left[(\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i}} + \frac{\cos\left[(\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i}}\right.\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\lambda_i} + \sqrt{\lambda_j}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_i} - \sqrt{\lambda_j}}\right\}$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\lambda_j \lambda_i}} \; y_j^1 \left\{ \frac{\sin\left[(\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i}} \right.$$

$$\left. - \frac{\sin\left[(\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i}} \right\} \Bigg] \int_\omega w_j(x) w_i(x) \; dx.$$

Des cas a) et b) on tire : pour tout $i \in \{ 1,\dots,M \}$

$$(2.9) \quad \frac{T}{2} \left(\Phi_i^0 - y_i^0\right) \int_\omega w_i^2 \,(x)\; dx + \left[\left(\Phi_i^0 - y_i^0\right) \frac{\sin(2\sqrt{\lambda_i}\; T)}{4\sqrt{\lambda_i}} \right.$$

$$\left. + \left(\Phi_i^1 - y_i^1\right) \frac{1 - \cos(2\sqrt{\lambda_i}\; T)}{4\lambda_i} \right] \int_\omega w_i^2(x)\; dx$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{M} \left[\frac{1}{2} \left(\Phi_j^0 - y_j^0\right) \left\{ \frac{\sin\left[(\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i}} + \frac{\sin\left[(\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i}} \right\} \right.$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\lambda_j}} \left(\Phi_j^1 - y_j^1\right) \left\{ - \frac{\cos\left[(\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i}} + \frac{\cos\left[(\sqrt{\lambda_i} - \sqrt{\lambda_j})T\right]}{\sqrt{\lambda_i} - \sqrt{\lambda_j}} \right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_i} - \sqrt{\lambda_j}} \right\} \right] \int_\omega w_j(x) w_i(x)\; dx.$$

$$= \sum_{j=M+1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \; y_j^0 \left\{ \frac{\sin\left[(\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i}} + \frac{\sin\left[(\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i}} \right\} \right.$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\lambda_j}} y_j^1 \left\{ - \frac{\cos\left[(\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i}} + \frac{\cos\left[(\sqrt{\lambda_i} - \sqrt{\lambda_j})T\right]}{\sqrt{\lambda_i} - \sqrt{\lambda_j}} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\lambda_i} + \sqrt{\lambda_j}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_i} - \sqrt{\lambda_j}} \right\}\Bigg]\int_\omega w_j(x) w_i(x)\, dx.$$

d'où

$$(2.10) \quad \frac{T}{2\lambda_i} (\Phi_i^1 - y_i^1) \int_\omega w_i^2\,(x) dx + \left[\left(\Phi_i^0 - y_i^0\right) \frac{1 - \cos(2\sqrt{\lambda_i}T)}{4\lambda_i} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\lambda_i} \left(\Phi_i^1 - y_i^1\right) \frac{\sin(2\sqrt{\lambda_i}T)}{4\sqrt{\lambda_i}} \right] \int_\omega w_i^2\,(x)\, dx$$

$$+ \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{M} \frac{1}{2\sqrt{\lambda_i}} \left(\Phi_j^0 - y_j^0\right) \left\{ - \frac{\cos\left[(\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i}} + \frac{\cos\left[(\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i}} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\lambda_i} + \sqrt{\lambda_j}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_i} - \sqrt{\lambda_j}} \right\} \int_\omega w_j(x) w_i(x)\, dx$$

$$+ \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{M} \frac{1}{2\sqrt{\lambda_j \lambda_i}} \left(\Phi_j^1 - y_j^1\right) \left\{ \frac{\sin\left[(\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i}} \right.$$

$$\left. - \frac{\sin\left[(\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i}} \right\} \int_\omega w_j(x) w_i(x)\, dx$$

$$\begin{aligned} = \sum_{j=M+1}^{\infty} \Bigg[& \frac{1}{2\sqrt{\lambda_i}}\, y_j^0 \left\{ -\frac{\cos\left[(\sqrt{\lambda_j}+\sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_j}+\sqrt{\lambda_i}} + \frac{\cos\left[(\sqrt{\lambda_j}-\sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_j}-\sqrt{\lambda_i}} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}+\sqrt{\lambda_j}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}-\sqrt{\lambda_j}} \right\} \\ & + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_j\lambda_i}}\, y_j^1 \left\{ \frac{\sin\left[(\sqrt{\lambda_j}-\sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_j}-\sqrt{\lambda_i}} \right. \\ & \left. - \frac{\sin\left[(\sqrt{\lambda_j}+\sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_j}+\sqrt{\lambda_i}} \right\} \Bigg] \int_{\omega} w_j(x) w_i(x)\, dx, \ \forall\, i,\ 1 \le i \le M. \end{aligned}$$

Soit Z le vecteur colonne d'ordre $2M$ constitué par les seconds membres des relations précédentes. On donne maintenant une notation plus condensée et plus utilisable de ces formules:

Lemme 2.1 :

Les relations (2.9) *et* (2.10) *forment un système linéaire d'ordre* $2M$ *qui s'écrit sous la forme :*

$$A \begin{bmatrix} \Phi_0 - P_{F_M}(y_0) \\ \Phi_1 - P_{F_M}(y_1) \end{bmatrix} = Z,$$

où

$$A = \frac{T}{2} D_M + B_M(T),$$

où $D_M = (d_{ij})_{1 \le i, j \le 2M}$ *est une matrice diagnonale indépendante de* T

et $B_M(T)$ *une matrice carrée d'ordre* $2M$ *de norme euclidienne majorée par une constante* C_M *indépendante de* T.

Preuve :

Des relations (2.7) et (2.8) on déduit l'expression suivante de la matrice A, pour tous $i, j \in \{1,2, \ldots\ldots, M\}$:

$$a_{ij} = \int_0^T \cos(\sqrt{\lambda_i}\, t) \cos(\sqrt{\lambda_j}\, t)\, dt \int_\omega w_i(x)\, w_j(x)\, dx ,$$

$$a_{i,j+M} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_0^T \cos(\sqrt{\lambda_j}\, t) \sin(\sqrt{\lambda_i}\, t)\, dt \int_\omega w_i(x)\, w_j(x)\, dx$$

$$= a_{i+M,j}$$

$$a_{i+M,j+M} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \int_0^T \sin(\sqrt{\lambda_i}\, T) \sin(\sqrt{\lambda_j}\, T)\, dt \int_\omega w_i(x)\, w_j(x)\, dx ,$$

et les expressions suivantes des composantes du vecteur Z :

$$z_i = \sum_{j=M+1}^{\infty} \Bigg[\frac{1}{2}\, y_j^0 \left\{ \frac{\sin\left[(\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i}} + \frac{\sin\left[(\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i}} \right\}$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\lambda_j}}\, y_j^1 \left\{ - \frac{\cos\left[(\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i}} + \frac{\cos\left[(\sqrt{\lambda_i} - \sqrt{\lambda_j})T\right]}{\sqrt{\lambda_i} - \sqrt{\lambda_j}} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\lambda_i} + \sqrt{\lambda_j}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_i} - \sqrt{\lambda_j}} \right\} \Bigg] \int_\omega w_j(x) w_i(x)\, dx, \qquad 1 \leq i \leq M.$$

$$z_{i+M} = \sum_{j=M+1}^{\infty} \left[\frac{1}{2\sqrt{\lambda_i}}\, y_j^0 \left\{ - \frac{\cos\left[(\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i}} + \frac{\cos\left[(\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i}} \right.\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\lambda_i} + \sqrt{\lambda_j}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_i} - \sqrt{\lambda_j}} \right\}$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\lambda_j \lambda_i}}\, y_j^1 \left\{ \frac{\sin\left[(\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i}} \right.$$

$$\left.\left. - \frac{\sin\left[(\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i}} \right\} \right] \int_\omega w_j(x) w_i(x)\, dx, \ \forall\, i,\ 1 \leq i \leq M.$$

Des relations (2.9) et (2.10) on tire l'expression suivante de la matrice D_M : pour tout $i \in \{1,2,\ldots\ldots,M\}$:

$$d_{ii} = \int_\omega w_i^2\,(x)\, dx,$$

et $d_{i+M,i+M} = \dfrac{1}{\lambda_i} \displaystyle\int_\omega w_i^2\,(x)\, dx,$

et celle de $B_M\,(T) = \left[b_{ij}(T)\right]_{1 \leq i,j \leq 2M}$.

où

$$b_{ii}(T) = \left[\frac{\sin(2\sqrt{\lambda_i}\,T)}{4\sqrt{\lambda_i}} + \frac{1 - \cos(2\sqrt{\lambda_i}\,T)}{4\,\lambda_i} \right] \int_\omega w_i^2\,(x)\, dx$$

pour tout i tel que $1 \leq i \leq M$,

$$b_{i+M,i+M}(T) = \frac{1}{\lambda_i}\left[\frac{1-\cos(2\sqrt{\lambda_i}\,T)}{4} - \frac{\sin(2\sqrt{\lambda_i}\,T)}{4\sqrt{\lambda_i}}\right]\int_\omega w_i^2(x)dx,\quad 1 \le i \le M$$

$b_{mn} = b_{nm} = a_{mn}$, pour tous m et n tels que $1 \le m < n \le 2M$.

De l'expression de $B_M(T)$ on déduit qu'il existe $C_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|b_{ij}(T)| \le C_0$, $1 \le i , j \le 2M$, donc il existe $C_M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\|B_M(T)\| < C_M$, C_M indépendant de T; ceci termine la preuve du lemme 2.1.■

Suite de la preuve du résulat principal

Comme d'après le théorème de Holmgren, chaque coefficient de D_M est non nul alors D_M est inversible. Comme

$$A = \frac{T}{2} D_M + B_M(T)$$

donc

$$\frac{2}{T} D_M^{-1} A = I + \frac{2}{T} D_M^{-1} B_M(T).$$

En vertu du lemme de Von Neumann, il suffit que $\frac{2}{T} \| D_M^{-1} B_M(T) \| < 1$ pour que $I + \frac{2}{T} D_M^{-1} B_M(T)$ soit inversible.

On a :

$$\frac{2}{T} \|D_M^{-1} B_M(T)\| \le \frac{2}{T} \|D_M^{-1}\| \|B_M(T)\| \le \frac{2}{T} C_M \|D_M^{-1}\|$$

Il suffit donc d'avoir:

$$\frac{2}{T} C_M \|D_M^{-1}\| < 1,$$

donc si

$$T > T_0 = 2 C_M\|D_M^{-1}\| + 1;$$

$I + \frac{2}{T} D_M^{-1} B_M(T)$ est inversible et en plus

$$\left[I + \frac{2}{T} D_M^{-1} B_M(T)\right]^{-1} = I + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{2 D_M^{-1} B_M(T)}{T}\right]^k .$$

De l'égalité :

$$\left[\frac{T}{2} D_M + B_M(T)\right] \begin{bmatrix} \Phi_0 - P_{F_M}(y_0) \\ \Phi_1 - P_{F_M}(y_1) \end{bmatrix} = z,$$

on tire :

$$\left[I + \frac{2}{T} D_M^{-1} B_M(T)\right] \begin{bmatrix} \Phi_0 - P_{F_M}(y_0) \\ \Phi_1 - P_{F_M}(y_1) \end{bmatrix} = \frac{2}{T} D_M^{-1} z,$$

d'où

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Phi_0 - P_{F_M}(y_0) \\ \Phi_1 - P_{F_M}(y_1) \end{bmatrix} &= \frac{2}{T} \left[I + \frac{2}{T} D_M^{-1} B_M(T)\right]^{-1} D_M^{-1} z \\ &= \frac{2}{T} \left[I + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{2 D_M^{-1} B_M(T)}{T}\right]^k\right] D_M^{-1} z. \end{aligned}$$

donc

$$\left\| \begin{matrix} \Phi_0 - P_{F_M}(y_0) \\ \Phi_1 - P_{F_M}(y_1) \end{matrix} \right\|_{F_M \times F_M} = \frac{2}{T} \left\| \left[I + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2 D_M^{-1} B_M(T)}{T}\right]^k D_M^{-1} z \right\|$$

soit

$$\left\| \begin{matrix} \Phi_0 - P_{F_M}(Y_0) \\ \Phi_1 - P_{F_M}(Y_1) \end{matrix} \right\|_{F_M \times F_M} \leq \frac{2}{T} \|D_M^{-1}\| \, \|z\| \left[1 + C_M\right],$$

où $\|\ \ \|$ est la norme matricielle euclidienne et

$$C_M = \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \frac{2\, D_M^{-1}\, B_M(T)}{T} \right\|^k < + \infty.$$

Maintenant, on détermine les espaces auxquels appartiennent les données initiales.

Des inégalités suivantes:

$$\left| \frac{\sin\left[(\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i}} + \frac{\sin\left[(\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i}} \right| \leq \frac{2}{\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i}} ;$$

$$\left| - \frac{\cos\left[(\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_i}} + \frac{\cos\left[(\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i})T\right]}{\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i}} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\lambda_i} + \sqrt{\lambda_j}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_i} - \sqrt{\lambda_j}} \right| \leq \frac{4}{\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i}};$$

on déduit les majorations obtenues dans les cas c) et d) ci -dessous :

c) soit $i \in \{ 1, \ldots, M \}$

$$|z_i| \leq \frac{1}{2} \sum_{j=M+1}^{\infty} \left[\frac{2\,|Y_j^0|}{\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i}} \right.$$

$$+ \frac{4|y_j^1|}{\sqrt{\lambda_j}\,(\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i})} \Bigg] \left| \int_\omega w_j(x) w_i(x)\, dx \right| ,$$

donc

$$|z_i| \le \sum_{j=M+1}^{\infty} \left[\frac{|y_j^0|}{\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i}} + \frac{2|y_j^1|}{\sqrt{\lambda_j}\,(\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i})} \right] \nu_{ij} \; .$$

où $\nu_{ij} = \left| \int_\omega w_j(x) w_i(x)\, dx \right|$

Si α est un réel, on a :

$$|z_i| \le \sum_{j=M+1}^{\infty} \left[\frac{\lambda_j^\alpha\, |y_j^0|}{\lambda_j^\alpha \left[\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i}\right]} + \frac{2\, \lambda_j^\alpha\, |y_j^1|}{\lambda_j^\alpha \sqrt{\lambda_j} \left[\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i}\right]} \right] \nu_{ij} \; ,$$

soit

$$|z_i| \le \sum_{j=M+1}^{\infty} \left[\lambda_j^\alpha\, |y_j^0| + \frac{2\, \lambda_j^\alpha\, |y_j^1|}{\sqrt{\lambda_j}} \right] \frac{\nu_{ij}}{\lambda_j^\alpha \left[\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i}\right]}$$

d'où par application de l'inégalité de Schwarz, on tire :

$$|z_i| \le \left[\sum_{j=M+1}^{\infty} 2\left[\lambda_j^{2\alpha} |y_j^0|^2 + 4\lambda_j^{2\alpha-1} |y_j^1|^2\right] \right]^{1/2}$$

$$\left[\sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{\nu_{ij}^2}{\lambda_j^{2\alpha} \left[\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i}\right]^2} \right]^{1/2} .$$

On a, lorsque j tend vers $+\infty$:

$$\frac{\nu_{ij}^2}{\lambda_j^{2\alpha}\left[\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i}\right]^2} \sim \frac{\nu_{ij}^2}{\lambda_j^{2\alpha}\,\lambda_j}$$

$$\sim \frac{\nu_{ij}^2}{\lambda_j^{2\alpha+1}}$$

Or $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \nu_{ij}^2 = \|w_i\|^2_{L^2(\omega)}$

donc si $\alpha = -\dfrac{1}{2}$

la série $\displaystyle\sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{\nu_{ij}^2}{\lambda_j^{2\alpha}\left[\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i}\right]^2} < +\infty.$

d) Soit $i \in \{1,\dots,M\}$, on a aussi :

$$|z_{i+M}| \le \frac{1}{2\sqrt{\lambda_i}} \sum_{j=M+1}^{\infty} \left[\frac{4|y_j^1|}{\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i}} + \frac{2|y_j^1|}{\sqrt{\lambda_j}\left[\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i}\right]}\right] \nu_{ij} ,$$

soit

$$|z_{i+M}| \le \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \sum_{j=M+1}^{\infty} \left[\frac{2\lambda_j^{\alpha}|y_j^0|}{\lambda_j^{\alpha}\left[\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i}\right]} + \frac{\lambda_j^{\alpha}|y_j^1|}{\lambda_j^{\alpha}\sqrt{\lambda_j}\left[\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i}\right]}\right] \nu_{ij}.$$

Des calculs analogues à ceux du a°) nous donnent :

$$|z_{i+M}| \le \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \left[\sum_{j=M+1}^{\infty} 2\left(4\lambda_j^{2\alpha}\,|y_j^0|^2 + \lambda_j^{2\alpha-1}\,|y_j^1|^2\right)\right]^{1/2}$$

$$\left[\sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{\nu_{ij}^2}{\lambda_j^{2\alpha}\left[\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_i}\right]^2}\right]^{1/2}.$$

D'après c) et d) si $\alpha = -1/2$, il existe une constante $K_1 > 0$ indépendante de y_0 et y_1 telle que

$$\| z \|_{\mathbb{R}^{2M}} \leq K_1 \left[\sum_{j=M+1}^{\infty} \left(\lambda_j^{2\alpha} \, |y_j^0|^2 + \lambda_j^{2\alpha-1} \, |y_j^1|^2 \right) \right]^{1/2},$$

d'où

$$\| z \|_{\mathbb{R}^{2M}} \leq K_1 \left\{ \|y_0\|^2_{D(A^{-1/2})} + \|y_1\|^2_{D(A^{-1})} \right\}^{1/2}.$$

On a d'après J.-L. LIONS - E. MAGENES [5],

$D(A^{-1/2}) = H^{-1}(\Omega)$ et $D(A^{-1})$ est le dual topologique de $D(A)$;

ce qui achève la preuve.■

Corollaire 2.1 :

Soit $M \in \mathbb{N}^*$, *il existe deux constantes* $T_0 > 0$ et $K > 0$ *telles que pour tout* $T > T_0$, *si* y *est la solution de* (2.1) *de données initiales* $(y_0, y_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, *l'unique solution* (Φ_0, Φ_1) *de*

$$\min_{(\phi_0,\phi_1) \in F_M \times F_M} J((\phi_0, \phi_1))$$

vérifie :

$$\left\| \begin{matrix} \Phi_0 - P_{F_M}(y_0) \\ \Phi_1 - P_{F_M}(y_1) \end{matrix} \right\|_{F_M \times F_M} \leq \frac{K}{T} \left\| (y_0 - P_{F_M}(y_0) \;,\; y_1 - P_{F_M}(y_1)) \right\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)},$$

où T_0 et K *ne dépendent que de* M *et de* ω.

Preuve :

Il suffit de remarquer que $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ est contenu avec injection continue dans $D(A^{-1/2}) \times D(A^{-1})$.■

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] C. BARDOS-G. LEBEAU-J. RAUCH, *Appendice II dans* J.-L. LIONS [4]: *Contrôle et stabilisation dans les problèmes hyperboliques.*

[2] R. DAUTRAY et J. -L. LIONS, *Analyse Mathématique et Calcul numérique pour les sciences, Masson, Paris 1985.*

[3] A. EL JAI, A. J. PRITCHARD, *Capteurs et actionneurs dans l'analyse des systèmes distribués, Masson, Paris, 1986.*

[4] J. -L. LIONS, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation des systèmes distribués, Tome 1, Masson, Paris, 1988.*

[5] J. -L. LIONS - E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Volumes 1 et 2 . Dunod 1968.*

[6] M.T. NIANE, *Contrôlabilité exacte spectrale élargie des systèmes distribués par action sur une partie analytique arbitraire de la frontière. C.R.Acad.Sci.Paris, t.309, série, p.335-340, 1990.*

[7] M.T. NIANE, O. SECK, *Majorations liées à la contrôlabilité spectrale élargie de l'équation des ondes, Africa Mathematika, 1994.*

[8] E. Zuazua, *Appendice I dans* J. -L. LIONS, [4]: *Contrôlabilité exacte en un temps arbitrairement petit de quelques problèmes des plaques.*

[9] K. YOSIDA, *functional analysis, 6th Ed. Springer 1980.*

[10] V. TRENOGUINE, *Analyse fonctionnelle, Editions Mir, 1985.*