Université de Montréal

Des problèmes extrémaux pour certaines classes de polynômes

par

Abdoul Ousmane WATT

Département de Mathématiques et de Statistique

Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Philosophiæ Doctor (Ph.D.)

en mathématiques

Mars, 1991

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

FACULTÉ DES ÉTUDES SUPÉRIEURES

Cette thèse de doctorat intitulée:

"Des problèmes extrémaux pour certaines classes de polynômes"

présentée par

Abdoul Ousmane WATT

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes:

Monsieur André GIROUX
(président-rapporteur)

Monsieur Qazi Ibadur RAHMAN
(directeur de recherche)

(co-directeur)

Monsieur Norbert SCHLOMIUK
(membre du jury)

CS-00404

Monsieur James CLUNIE
(examinateur externe)

Le 7 juin 1991.

SOMMAIRE

Soit T_m le $m^{\text{ième}}$ polynôme de Tchebycheff de première espèce et $\tau_n(x) := (1-x^2)\,T_{n-2}(x)$. R. Pierre et Q. I. Rahman [5] ont montré que si p est un polynôme de degré n s'annulant en ± 1 et tel que $\left|\frac{p(x)}{1-x^2}\right| \leq 1$ pour $-1 \leq x \leq 1$ alors,

$$|p^{(k)}(x)| \leq |\tau_n^{(k)}(1)| \qquad \text{pour } -1 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad k = 2, 3, \ldots . \tag{1}$$

En nous inspirant de l'extension [1] de l'inégalité de Markoff trouvée par Duffin et Schaeffer nous examinons s'il existe ou non $n-1$ points distincts $\lambda_{n,0}, \ldots, \lambda_{n,n-2}$ sur $[-1, 1]$ tels que $|p(\lambda_{n,\nu})| \leq 1 - \lambda_{n,\nu}^2$, pour $\nu = 0, 1, \ldots, n-2$, entraîne (1). La réponse à cette question est positive pour $k = 3, 4, \ldots$ .Cela sera démontré dans le chapitre I où nous présenterons également d'autres résultats connexes.

Maintenant soit $\mathcal{P}_{n,1}$ la classe des polynômes de degré au plus n, bornés par 1 sur le cercle unité. Alors, d'après la fameuse inégalité de Bernstein pour les polynônes, $\sup\limits_{p \in \mathcal{P}_{n,1}} |p'(z)| = n$ pour $|z| = 1$. Notons $\mathcal{P}_{n,1}^*$ la sous – classe des polynômes de $\mathcal{P}_{n,1}$ qui s'annulent au point $z = 1$. Il a été démontré par A. Giroux et Q. I. Rahman [3] que

$$n - \frac{c_1}{n} < \sup_{p \in \mathcal{P}_{n,1}^*} \max_{|z|=1} |p'(z)| < n - \frac{c_2}{n}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes ne dépendant pas de n. Dans le chapitre II nous donnons, entre autres, la valeur exacte de $\sup_{p \in \mathcal{P}^*_{n,1}} |p'(z)|$ en certains points z de $|z| = 1$

TABLE DES MATIÈRES

SOMMAIRE ii

CHAPITRE I : POLYNÔMES AYANT UN MAJORANT PARABOLIQUE ET. . . .

INÉGALITÉ DE DUFFIN – SCHAEFFER . . . .

I–1. Introduction 1

I–2. Résultats auxiliaires 3

I–2.1. Bornes inférieures de $|T_m(x)|$ aux zéros de τ'_{m+2} 6

I–2.2. Signe de $\left(\frac{(1-x^2)^2 T'_m(x)}{x-\lambda_\mu}\right)''$ à un zéro de τ'_{m+2} 9

I–3. Démonstration du théorème I–1 15

I–4. Addenda au théorème I–1 16

I–5. Quelques remarques sur le théorème I–1 17

CHAPITRE II : POLYNÔMES AYANT UN ZÉRO PRESCRIT ET INÉGALITÉ

DE BERNSTEIN . . . .

II–1. Introduction 19

II–2. Enoncé du résultat 20

II–3. Quelques propriétés de $P_{n,v}$ 22

II–4. Preuve du théorème II 32

CONCLUSION 40

BIBLIOGRAPHIE 41

REMERCIEMENTS 43

A MES PARENTS ,

TRES HUMBLEMENT

CHAPITRE I

POLYNÔMES AYANT UN MAJORANT PARABOLIQUE ET INÉGALITÉ DE DUFFIN – SCHAEFFER

I–1. Introduction

Notons $\|.\|$ la norme uniforme sur $[-1,+1]$ et $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynônes de degré au plus n. Pour p appartenant à $\mathcal{P}_n$ et s'annulant en -1 et $+1$, soit

$$\|p\|_*:=\sup_{-1<x<1}\frac{|p(x)|}{\sqrt{1-x^2}} \quad ; \quad \|p\|_{**}:=\sup_{-1<x<1}\frac{|p(x)|}{1-x^2}.$$

De plus, soit $T_n(x):=\cos(n \arccos x)$ le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Tchebycheff de première espèce et $U_m(x):=\dfrac{\sin((m+1)\arccos x)}{\sin(\arccos x)}$ le $m^{\text{ième}}$ polynôme de Tchebycheff de seconde espèce. Nous avons aussi besoin d'introduire les polynômes suivants :

$$\upsilon_n(x):=(1-x^2)\,U_{n-2}(x) \qquad , \qquad \tau_n(x):=(1-x^2)\,T_{n-2}(x).$$

Soit $p \in \mathcal{P}_n$. D'après un résultat classique de W. Markoff [4]

$$\|p^{(k)}\| \le T_n^{(k)}(1) \qquad \forall\, k \in \mathbb{N} \qquad \text{si } \|p\| \le 1. \tag{I–1}$$

On sait également ([8] , [5]) que

$$\|p^{(k)}\| \le |\upsilon_n^{(k)}(1)| \qquad \forall\, k \in \mathbb{N} \qquad \text{si } \|p\|_* \le 1 \tag{I–2}$$

$$\|p^{(k)}\| \le |\tau_n^{(k)}(1)| \qquad \text{pour } k=2,3,\ldots \qquad \text{si } \|p\|_{**} \le 1. \tag{I–3.1}$$

Quant au cas manquant : $k=1$, pour $\|p\|_{**} \le 1$, nous avons [7]

$$\|p'\| \le |\tau_n'(1)| \qquad \text{si } n=4, \tag{I–3.2}$$

$$\|p'\| \le |\tau_n'(0)| \qquad \text{pour } n \ge 5 \text{ et } n \text{ impair}, \tag{I–3.3}$$

tandis que pour n pair ,

$$\| p' \| \le n - 2 - \frac{\pi^2}{8n} + O(n^{-2}) \qquad \text{quand} \quad n \to \infty . \tag{I–3.4}$$

Ici on peut mentionner que $\left| \tau_n' \left(\frac{\pi}{2(n-2)}\right) \right| = n - 2 - \frac{\pi^2}{8n} + O(n^{-2})$ quand $n \to \infty$.

Une remarquable généralisation de (I–1) a été trouvée par Duffin et Schaeffer. Ils ont démontré (voir [1 , théorème II] ou [10 , pp. 130 – 138]):

THÉORÈME I–A. *Soit* $p \in \mathcal{P}_n$. *Si* $p(x)$ *est réel pour* x *réel et*

$$\left| p\left(\cos \frac{\nu\pi}{n}\right) \right| \le 1 \qquad \textit{pour} \quad \nu = 0,1,\dots,n, \tag{I–4}$$

alors, pour $k \in \mathbb{N}$

$$| p^{(k)}(x+iy) | \le | T_n^{(k)}(1+iy) | , \qquad -1 \le x \le 1, \quad -\infty < y < \infty. \tag{I–5}$$

L'extension correspondante de (I–2), qui a été obtenue dans [9] , s'énonce comme suit :

THÉORÈME I–B. *Soit*

$$\xi_0 := 1 \quad , \quad \xi_n := -1 \qquad \textit{et} \quad \xi_\nu := \cos\left(\frac{2\nu-1}{n-1} \frac{\pi}{2} \right) \quad , \qquad \nu = 1,\dots,n-1. \tag{I–6}$$

Si $p \in \mathcal{P}_n$ *tel que*

$$| p(\xi_\nu) | \le (1-\xi_\nu^2)^{1/2} \qquad \textit{pour} \quad \nu = 0,1,\dots,n, \tag{I–7}$$

alors ,

$$\| p^{(k)} \| \le | \upsilon_n^{(k)}(1) | \qquad \textit{pour} \quad k = 2,3,\dots \tag{I–8}$$

tandis que

$$\| p' \| \le (n-1) \left(\frac{2}{\pi} \log (n-1) + 3 \right). \tag{I–9}$$

De plus, si $p(x)$ *est réel pour* x *réel , alors*

$$| p^{(k)}(x+iy) | \le | \upsilon_n^{(k)}(1+iy) | \quad \textit{pour} \quad (x,y) \in [-1,1] \times \mathbb{R} \quad \textit{et} \quad k = 2,3,\dots . \tag{I–8'}$$

Dans (I–8) et (I–8') l'égalité a lieu si et seulement si $p(x) \equiv \gamma\, \upsilon_n(x)$ avec $|\gamma| = 1$. De plus, le nombre $\frac{2}{\pi}$, apparaissant dans le second membre de (I–9) , ne peut être remplacé par aucun autre nombre plus petit ne dépendant pas de n.

Ici nous démontrerons le théorème suivant :

THÉORÈME I–1. *Pour tout* n *donné*, $n \geq 3$, *soit*

$$\lambda_\nu = \lambda_{n,\nu} := \cos\left(\frac{\nu\pi}{n-2}\right), \qquad \nu = 0,1,\ldots,n-2. \tag{I–10}$$

Si $p(x) := (1 - x^2)\, q(x)$ *est un polynôme de degré au plus* n *tel que*

$$|q(\lambda_\nu)| \leq 1 \quad pour \quad \nu = 0,1,\ldots,n-2 \tag{I–11}$$

alors

$$\|p^{(k)}\| \leq |\tau_n^{(k)}(1)| \qquad \text{pour} \quad k = 3,4,\ldots . \tag{I–12}$$

De plus, si $p(x)$ *est réel pour* x *réel*, *alors*

$$|p^{(k)}(x+iy)| \leq |\tau_n^{(k)}(1+iy)| \quad pour \quad (x,y) \in [-1,1] \times \mathbb{R} \quad et \quad k = 3,4,\ldots . \tag{I–12'}$$

I–2. Résultats auxiliaires

Nous allons prouver le théorème I–1 par un raisonnement analogue à celui de Duffin et Schaeffer [1]. Cependant, certains détails deviennent beaucoup plus compliqués et nous aurons également à démontrer de nouvelles propriétés de T_n. Les deux premiers lemmes proviennent de [1].

LEMME I–1 [1 ,LEMME 1]. *Si*

$$P(z) = c \prod_{\nu=1}^{n} (z - x_\nu)$$

est un polynôme de degré n *ayant* n *zéros réels distincts et si* p *est un polynôme de degré au plus* n *tel que*

$$|p'(x_\nu)| \leq |P'(x_\nu)| \qquad (\nu = 1,\ldots,n),$$

alors , pour $k = 1,\ldots,n$

$$|p^{(k)}(x)| \le |P^{(k)}(x)|$$

aux racines de $P^{(k-1)}(x) = 0$.

LEMME I–2 [1,THÉORÈME I]. *Soit* P *un polynôme de degré* n *ayant* n *zéros réels distincts tous situés à gauche du point* 1 , *et supposons que*

$$|P(x+iy)| \le |P(1+iy)| \quad \textit{pour } (x,y)\in[-1,1]\times\mathbb{R}.$$

Si p *est un polynôme de degré au plus* n , *à coefficients réels* , *tel que*

$$|p'(x)| \le |P'(x)| \qquad \textit{quand } P(x) = 0,$$

alors , *pour* $k = 1,2,...,n$

$$|p^{(k)}(x+iy)| \le |P^{(k)}(1+iy)| \quad \textit{pour } (x,y)\in[-1,1]\times\mathbb{R}.$$

Nous aurons besoin du résultat suivant pour établir une nouvelle propriété de T_m contenue dans le lemme I–4.

LEMME I–3. *Si* p *est un polynôme de degré* m *ayant tous ses zéros dans* $\operatorname{Im} z > 0$, *alors* , *pour* $\xi \ge 0$,

$$(m^2+2)\,p(z) + 3(z - i\xi)\,p'(z)$$

a aussi tous ses zéros dans $\operatorname{Im} z > 0$.

Démonstration. Soit $z_\mu := x_\mu + iy_\mu$ $(\mu = 1,...,m)$ les zéros de p. En outre, soit $z = x+iy$, $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$. Alors, pour $y \le 0$,

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{p'(z)}{p(z)}\right\} = \sum_{\mu=1}^{m} \operatorname{Im}\frac{1}{x - x_\mu + i\,(y - y_\mu)} = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{-(y - y_\mu)}{|z - z_\mu|^2} > 0;$$

si $\xi \ge 0$ et $z - i\xi \ne 0$ alors , pour $y \le 0$,

$$\operatorname{Im}\left\{-\frac{m^2+2}{3(z-i\xi)}\right\} = \frac{m^2+2}{3}\,\frac{y-\xi}{|z-i\xi|^2} \le 0.$$

Ainsi , si $\xi \ge 0$,alors $-\dfrac{m^2+2}{3(z-i\xi)} \ne \dfrac{p'(z)}{p(z)}$ pour $\operatorname{Im} z \le 0$ pourvu que $z - i\xi \ne 0$, i.e. $(m^2+2)\,p(z) + 3\,(z-i\xi)\,p'(z) \ne 0$ pour $\operatorname{Im} z \le 0$ et pour tout $\xi \ge 0$ sauf ,peut – être, quand $z - i\xi = 0$. Mais , si $z - i\xi = 0$, $(m^2+2)\,p(z) + 3\,(z-i\xi)\,p'(z)$ se réduit à $(m^2+2)\,p(z)$, qui est non nul , pour $\operatorname{Im} z \le 0$, par hypothèse .

LEMME I–4. *Le polynôme* $\tau_{m+2}(z) := (1-z^2)\,T_m(z)$ *satisfait l'inégalité* :

$$|\tau''_{m+2}(x+iy)| \le |\tau''_{m+2}(1+iy)| \qquad \textit{pour} \quad (x,y)\in[-1,1]\times\mathbb{R}.$$

Démonstration. Observons d'abord que

$$\begin{aligned}\tau''_{m+2}(z) &= (1-z^2)T''_m(z) - 4zT'_m(z) - 2T_m(z)\\ &= zT'_m(z) - m^2T_m(z) - 4zT'_m(z) - 2T_m(z)\\ &= -3zT'_m(z) - (m^2+2)\,T_m(z).\end{aligned}$$

Maintenant, soit $\xi\in[0,1]$. Alors, pour $x\in[\xi\,,\infty)$, nous avons

$$|T_m(x+iy)| \le |T_m(1+x-\xi+iy)|.$$

Par conséquent,

$$R_\alpha(z) := \alpha T_m(z) + T_m(1-\xi+z)$$

ne s'annule pas dans le demi – plan $\{\, z\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \ge \xi \,\}$ pour $|\alpha| < 1$. En appliquant le lemme I–3 au polynôme $R_\alpha(iz+\xi)$ nous déduisons que $(m^2+2)R_\alpha(iz+\xi) + 3(iz+\xi)R'_\alpha(iz+\xi)$ ne s'annule pas pour $\mathrm{Im}\, z \le 0$, i.e.

$$\alpha\{(m^2+2)T_m(z) + 3zT'_m(z)\} + (m^2+2)\,T_m(1-\xi+z) + 3z\,T'_m(1-\xi+z) \ne 0$$

pour $\mathrm{Re}\, z \ge \xi$ et $|\alpha| < 1$. En posant $z = \xi+iy$ nous obtenons

$$\begin{aligned}|\tau''_{m+2}(\xi+iy)| &\equiv |(m^2+2)T_m(\xi+iy) + 3(\xi+iy)T'_m(\xi+iy)|\\ &\le |(m^2+2)T_m(1+iy) + 3(\xi+iy)T'_m(1+iy)|. \qquad \text{(I–13)}\end{aligned}$$

Remarquons maintenant que

$$w := \frac{3T'_m(1+iy)}{(m^2+2)T_m(1+iy)}$$

se trouve dans le demi – plan droit. Ainsi,

$$|1+(\xi+iy)w| \le |1+(1+iy)w|$$

et donc, le membre de droite dans (I–13) est majoré par

$$|(m^2+2)T_m(1+iy) + 3(1+iy)T'_m(1+iy)| \equiv |\tau''_{m+2}(1+iy)|.$$

Sachant que $|\tau''_{m+2}(-z)| \equiv |\tau''_{m+2}(z)| \equiv |\tau''_{m+2}(\bar{z})|$, l'inégalité

$$|\tau''_{m+2}(\xi+iy)| \leq |\tau''_{m+2}(1+iy)|$$

est aussi vérifiée pour $\xi \in [-1, 0)$.

I–2.1. Bornes inférieures de $|T_m(x)|$ aux zéros de τ'_{m+2}

Etant donné $m \in \mathbb{N}$, soit $\lambda_\mu = \lambda_{m,\mu} := \cos\frac{\mu\pi}{m}$, $(\mu = 0,1,\ldots,m)$. Si $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m$ sont les zéros de τ'_{m+2} pris dans l'ordre décroissant, alors il est facile de voir d'une part qu'ils sont tous dans l'intervalle (-1,1) et sont symétriques par rapport à l'origine et d'autre part que $\xi_\mu \in \left(\cos\frac{2\mu+1}{2m}\pi, \lambda_\mu\right)$ pour $\mu = 0,\ldots,\left[\frac{m-1}{2}\right]$ et que $\xi_{\frac{m}{2}} = 0$ dans le cas m pair. A chaque ξ_μ associons la quantité

$$\theta_\mu = \theta_{m,\mu} := \sqrt{\frac{m^2(1-\xi_\mu^2)}{m^2(1-\xi_\mu^2) + 4\xi_\mu^2}} .$$

En utilisant l'égalité

$$(1-\xi_\mu^2)T'_m(\xi_\mu) = 2\xi_\mu T_m(\xi_\mu)$$

ainsi que l'identité

$$(1-x^2)\{T'_m(x)\}^2 + m^2\{T_m(x)\}^2 \equiv m^2$$

nous obtenons

$$|T_m(\xi_\mu)| = \theta_\mu \qquad (\mu = 0,1,\ldots,m).$$

Dans le lemme qui suit nous obtenons une borne inférieure de θ_μ. Elle n'est pas la meilleure possible, cependant elle est adéquate pour notre étude.

LEMME I–5. *Soit* $m \geq 3$. *Pour* $\mu = 1,\ldots,m-1$

$$\theta_\mu > .826674148. \qquad \text{(I–14)}$$

Démonstration. Pour chaque m, θ_μ est une fonction décroissante de $|\xi_\mu|$.

Par conséquent, il suffit de démontrer (I–14) pour $\mu=1$. Un simple calcul montre que $\theta_1 = .957214044...$ si m=3 tandis que $\theta_1 = .924950591...$ si m=4. Soit donc $m \geq 5$. Il vient :

$$\xi_1 < \lambda_1 = \cos\frac{\pi}{m} < 1 - \frac{\pi^2}{2m^2} + \frac{\pi^4}{24m^4} \leq 1 - \frac{4.772448}{m^2} . \qquad \text{(I–15)}$$

D'où, pour $m \geq 5$, nous obtenons $m^2(1-\xi_1{}^2) > 8.633845604$ qui,à son tour, implique

$$\theta_1 > \sqrt{\frac{8.633845604}{12.633845604}} = .826674148.$$

Le lemme suivant nous donne une borne inférieure de $\lambda_\mu - \xi_\mu$.

LEMME I-6. *Pour* $\mu = 1,\ldots,[\frac{m-1}{2}]$

$$\lambda_\mu - \xi_\mu > \left(3\theta_\mu - 1\right)\frac{\xi_\mu}{m^2} = \frac{2\xi_\mu}{m^2} - 3\left(1-\theta_\mu\right)\frac{\xi_\mu}{m^2} . \qquad \text{(I–16)}$$

Démonstration. Nous observons que

$$-2\lambda_\mu T_m(\lambda_\mu) = \Big[(1-x^2)T_m'(x) - 2xT_m(x)\Big]_{\xi_\mu}^{\lambda_\mu} = \int_{\xi_\mu}^{\lambda_\mu} \{ (1-x^2)T_m''(x) - 4xT_m'(x) - 2T_m(x) \}\, dx$$

$$= \int_{\xi_\mu}^{\lambda_\mu} \left\{-3xT_m'(x) - (m^2+2)\,T_m(x)\right\} dx$$

$$= \Big[-3xT_m(x)\Big]_{\xi_\mu}^{\lambda_\mu} - (m^2-1)\int_{\xi_\mu}^{\lambda_\mu} T_m(x)\,dx$$

$$= -3\lambda_\mu T_m(\lambda_\mu) + 3\xi_\mu T_m(\xi_\mu) - (m^2-1)\int_{\xi_\mu}^{\lambda_\mu} T_m(x)\,dx$$

et ainsi

$$3\xi_\mu T_m(\xi_\mu) - \xi_\mu\,\mathrm{sgn}\,(T_m(\lambda_\mu)) = \lambda_\mu T_m(\lambda_\mu) - \xi_\mu\,\mathrm{sgn}\,(T_m(\lambda_\mu)) + (m^2-1)\int_{\xi_\mu}^{\lambda_\mu} T_m(x)\,dx.$$

Puisque $\left| \int_{\xi_\mu}^{\lambda_\mu} T_m(x)\,dx \right| \leq \lambda_\mu - \xi_\mu$ et $\theta_\mu > \frac{1}{3}$, nous obtenons

$$(3\theta_\mu - 1)\,\xi_\mu < \lambda_\mu - \xi_\mu + (m^2 - 1)\,(\lambda_\mu - \xi_\mu),$$

c'est ce qu'il fallait démontrer.

A cette étape de l'étude il est important d'obtenir une bonne borne pour ξ_μ^2.

LEMME I–7. *Soit* $m \geq 2$. *Pour* $\mu = 1,\ldots,m-1$

$$\xi_\mu^2 < 1 - \frac{10}{m^2 + 10} \tag{I–17}$$

et alors

$$\delta_\mu := \frac{4\xi_\mu^2}{m^2(1 - \xi_\mu^2)} \leq \frac{2}{5}\,. \tag{I–18}$$

Démonstration. Il nous suffit de démontrer (I–17) seulement pour $\mu = 1$. Si $m = 2$, alors $\xi_1 = 0$ et ainsi (I–17) a lieu. Un simple calcul montre que $\xi_1^2 = .170563828 < \frac{9}{19} = 1 - \frac{10}{m^2 + 10}$ si $m=3$ tandis que $\xi_1^2 = .403143528 < \frac{8}{13} = 1 - \frac{10}{m^2 + 10}$ si $m = 4$. Maintenant, soit $m \geq 5$. De (I–15) et (I–16) il découle

$$\xi_1 < 1 - \frac{4.772448}{m^2} - \frac{1}{m^2}\left(3\theta_1 - 1\right)\xi_1.$$

Comme $\theta_1 \geq .826674148$, nous obtenons

$$\xi_1 < \frac{1 - \dfrac{4.772448}{m^2}}{1 + \dfrac{1.480022444}{m^2}} < 1 - \frac{6.252470444}{m^2} + \frac{9.253796588}{m^4} \leq 1 - \frac{5.882318581}{m^2}\,.$$

D'où,

$$\xi_1^2 \leq 1 - \frac{10.38057029}{m^2} < 1 - \frac{10}{m^2 + 10}\,.$$

Donc (I–17) a lieu. Quant à (I–18), c'est une conséquence directe de (I–17).

Nous allons utiliser (I–18) afin d'obtenir une borne inférieure cruciale pour θ_μ dépendant de δ_μ.

LEMME I–8. *Pour* $\mu = 1,\ldots,\left[\frac{m-1}{2}\right]$

$$\theta_\mu \geq 1-\frac{1}{2}\,\delta_\mu+\frac{1}{4}\,\delta_\mu^2 .$$

Démonstration. D'après le théorème de Taylor

$$\theta_\mu = \frac{1}{\sqrt{1+\delta_\mu}} =:\theta\left(\delta_\mu\right)= \theta\,(0) + \delta_\mu\,\theta'(0) + \frac{1}{2!}\,\delta_\mu^2\theta''(0)+\frac{1}{3!}\,\delta_\mu^3\theta'''(0)$$

$$+\frac{1}{4!}\,\delta_\mu^4\,\theta^{(iv)}(\delta') \quad \text{avec} \quad 0\leq\delta'\leq\delta_\mu$$

$$= 1-\frac{1}{2}\,\delta_\mu + \frac{3}{8}\,\delta_\mu^2 - \frac{5}{16}\,\delta_\mu^3 + \frac{35}{128}\,\delta_\mu^4\,(1+\delta')^{-\frac{9}{2}}$$

$$> 1-\frac{1}{2}\,\delta_\mu + \frac{3}{8}\,\delta_\mu^2 - \frac{5}{16}\,\delta_\mu^3$$

$$\geq 1-\frac{1}{2}\,\delta_\mu + \frac{3}{8}\,\delta_\mu^2 - \frac{1}{8}\,\delta_\mu^2 \qquad \text{par (I–18)}$$

$$= 1-\frac{1}{2}\,\delta_\mu + \frac{1}{4}\,\delta_\mu^2 .$$

I–2.2. Signe de $\left(\dfrac{(1-x^2)^2T_m'(x)}{x-\lambda_\mu}\right)''$ à un zéro de τ_{m+2}'

LEMME I–9. *Soit* ξ *un zéro de* τ_{m+2}'. *Alors, pour* $\mu = 0,1,\ldots,m$

$$\frac{1-\xi^2}{T_m(\xi)}\,\frac{d^2}{dx^2}\left\{\frac{(1-x^2)^2T_m'(x)}{x-\lambda_\mu}\right\}_{|\,x=\xi} = \frac{\phi\,(\xi,\lambda_\mu)}{(\xi-\lambda_\mu)^4}$$

où

$$\phi\,(\xi\,,t\,):=(\xi-t)\left\{3\xi\left((m^2-4)(1-\xi^2)+2\right)(t-\xi)^2-2(1-\xi^2)\left(m^2(1-\xi^2)+6\xi^2\right)(t-\xi)+4\xi(1-\xi^2)^2\right\}.$$

Démonstration. Un simple calcul montre que

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{(1-x^2)^2T_m'(x)}{x-\lambda_\mu}\right\}=\frac{\left\{(1-x^2)^2T_m''(x)-4x(1-x^2)T_m'(x)\right\}(x-\lambda_\mu)-(1-x^2)^2T_m'(x)}{(x-\lambda_\mu)^2}$$

$$=-\frac{(1-3\lambda_\mu x+x^2+3\lambda_\mu x^3-2x^4)\,T_m'(x)+m^2(-\lambda_\mu+x+\lambda_\mu x^2-x^3)\,T_m(x)}{(x-\lambda_\mu)^2}$$

et

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}\left\{\frac{(1-x^2)^2T_m'(x)}{x-\lambda_\mu}\right\}=-\frac{A(x)(1-x^2)\,T_m'(x)-B(x)(1-x^2)\,T_m(x)}{(x-\lambda_\mu)^4}.$$

où

$$A(x):=(x-\lambda_\mu)^3\left[m^2+3-(m^2+6)x^2\right]-2(x-\lambda_\mu)(1-3\lambda_\mu x+2x^2)(1-x^2)\,,$$

$$B(x):=(x-\lambda_\mu)^3\,5m^2x+(x-\lambda_\mu)^2\,2m^2(1-x^2).$$

A un zéro ξ de τ_{m+2}' nous avons $(1-\xi^2)T_m'(\xi)=2\xi T_m(\xi)$. Ainsi, en posant

$A_1(\xi):=3\xi\left\{(m^2-4)(1-\xi^2)+2\right\}$, $A_2(\xi):=2(1-\xi^2)\left\{m^2(1-\xi^2)+6\xi^2\right\}$, $A_3(\xi):=4\xi\,(1-\xi^2)^2$

nous obtenons

$$(1-\xi^2)\frac{d^2}{dx^2}\left\{\frac{(1-x^2)^2T_m'(x)}{x-\lambda_\mu}\right\}\Bigg|_{x=\xi}=\frac{A_1(\xi)(\xi-\lambda_\mu)^3+A_2(\xi)(\xi-\lambda_\mu)^2+A_3(\xi)(\xi-\lambda_\mu)}{(\xi-\lambda_\mu)^4}T_m(\xi)$$

$$=\frac{\phi(\xi,\lambda_\mu)}{(\xi-\lambda_\mu)^4}\,T_m(\xi).$$

REMARQUE I-1. Il est important de noter que pour $\xi=0$,qui est un des zéros de τ_{m+2}' quand m est pair, on a

$$\phi(\xi,\lambda_\mu)=\phi(0,\lambda_\mu)=2m^2\lambda_\mu^2\geq 0 \quad \text{pour } \mu=0,1,\ldots,m.$$

Nous affirmons que $\phi(\xi_\mu,\lambda_\nu)\geq 0$ pour $\mu=0,1,\ldots,m$ et $\nu=0,1,\ldots,m$.

Ce fait déterminant sera établi dans les quatre prochains lemmes. La preuve, faisant appel aux lemmes I–5 - I–8, est longue et ardue. La difficulté réside dans le fait que $\phi(\xi_\mu, t)$ change de signe dans $(-1,1)$ sauf pour m pair et $\mu = \frac{m}{2}$.

LEMME I–10. *La fonction* $\phi(\xi, t)$ *a un zéro dans* $(1, \infty)$ *si* $0 < \xi < 1$.

Démonstration. Comme $\phi(\xi, t) \to -\infty$ quand $t \to +\infty$, il suffit de vérifier que

$$\phi(\xi, 1) > 0. \tag{I–19}$$

Il est facile de voir que

$$\phi(\xi, 1) = (1-\xi)^3 g(\xi)$$

où

$$g(\xi) := (m^2-4)\xi^3 - 2(m^2-2)\xi^2 - (m^2-2)\xi + 2m^2$$

et donc, il suffit de montrer que $g(\xi) > 0$ pour $0 < \xi < 1$. En effet, si $m = 1$, alors $g(\xi) = -3\xi^3 + 2\xi^2 + \xi + 2 > 2$, tandis que si $m = 2$, $g(\xi) = -4\xi^2 - 2\xi + 8 > 2$. Dans le cas $m \geq 3$, nous obtenons la conclusion désirée en remarquant que :
$g(-2) = -12m^2 + 44 < 0$, $g(-1) = 6 > 0$, $g(1) = 2 > 0$, $g(2) = -12 < 0$ et $g(t) \to +\infty$ quand $t \to +\infty$.

LEMME I–11. *Pour* $\mu = 1, \ldots, \left[\frac{m-1}{2}\right]$

$$\phi\left(\xi_\mu, \xi_\mu + (3\theta_\mu - 1)\frac{\xi_\mu}{m^2}\right) \geq 0.$$

Démonstration. Nous devons vérifier que si

$$L(\xi, t) := \frac{\phi(\xi, t)}{t-\xi}$$

alors

$$L\left(\xi_\mu, \xi_\mu + (3\theta_\mu - 1)\frac{\xi_\mu}{m^2}\right) \geq 0.$$

Nous avons:

$$L = L\left(\xi_\mu, \xi_\mu + (3\theta_\mu - 1)\frac{\xi_\mu}{m^2}\right)$$

$$= -\frac{3\xi_\mu^3}{m^4}\left\{m^2(1-\xi_\mu^2) - 4(1-\xi_\mu^2)+2\right\}\left\{4-12(1-\theta_\mu)+9(1-\theta_\mu)^2\right\}$$

$$-\frac{6}{m^2}(1-\theta_\mu)\xi_\mu(1-\xi_\mu^2)\left\{m^2(1-\xi_\mu^2)+6\xi_\mu^2\right\}+\frac{24}{m^2}\xi_\mu^3(1-\xi_\mu^2)$$

$$= \frac{12}{m^2}\xi_\mu^3(1-\xi_\mu^2) - \frac{12}{m^4}\xi_\mu^3\left\{-4(1-\xi_\mu^2)+2\right\} + \frac{36}{m^4}(1-\theta_\mu)\xi_\mu^3\left\{m^2(1-\xi_\mu^2)-4(1-\xi_\mu^2)+2\right\}$$

$$-\frac{27}{m^4}(1-\theta_\mu)^2\xi_\mu^3\left\{m^2(1-\xi_\mu^2)-4(1-\xi_\mu^2)+2\right\} - \frac{6}{m^2}(1-\theta_\mu)\xi_\mu(1-\xi_\mu^2)\left\{m^2(1-\xi_\mu^2)+6\xi_\mu^2\right\}.$$

D'après le lemme I–8

$$1-\theta_\mu \le \frac{2\xi_\mu^2}{m^2(1-\xi_\mu^2)} - \frac{1}{4}\frac{16\xi_\mu^4}{m^4(1-\xi_\mu^2)^2} = \frac{2\xi_\mu^2}{m^2(1-\xi_\mu^2)} - \frac{4\xi_\mu^4}{m^4(1-\xi_\mu^2)^2}.$$

D'où

$$L \ge \frac{12}{m^2}\xi_\mu^3(1-\xi_\mu^2) + \frac{48}{m^4}\xi_\mu^3(1-\xi_\mu^2) - \frac{24}{m^4}\xi_\mu^3 - \frac{144}{m^4}(1-\theta_\mu)\xi_\mu^3(1-\xi_\mu^2) + \frac{72}{m^4}(1-\theta_\mu)\xi_\mu^3$$

$$-\frac{27}{m^4}(1-\theta_\mu)^2\xi_\mu^3\left\{m^2(1-\xi_\mu^2)-4(1-\xi_\mu^2)+2\right\} - \left\{\frac{2\xi_\mu^2}{m^2(1-\xi_\mu^2)} - \frac{4\xi_\mu^4}{m^4(1-\xi_\mu^2)^2}\right\}6\xi_\mu(1-\xi_\mu^2)^2$$

$$= \frac{24}{m^4}\xi_\mu^3(1-\xi_\mu^2) - \frac{9}{m^4}(1-\theta_\mu)\xi_\mu^3\left\{16(1-\xi_\mu^2)-8+3(1-\theta_\mu)\left(m^2(1-\xi_\mu^2)-4(1-\xi_\mu^2)+2\right)\right\}$$

$$\ge \frac{24}{m^4}\xi_\mu^3(1-\xi_\mu^2) - \frac{9}{m^4}(1-\theta_\mu)\xi_\mu^3\left\{16(1-\xi_\mu^2)-8+\frac{6\xi_\mu^2}{m^2(1-\xi_\mu^2)}\left(m^2(1-\xi_\mu^2)-4(1-\xi_\mu^2)+2\right)\right\}$$

par le lemme I–8

$$= \frac{24}{m^4}\xi_\mu^3(1-\xi_\mu^2) - \frac{9}{m^4}(1-\theta_\mu)\xi_\mu^3\left(8-10\xi_\mu^2-\frac{24}{m^2}\xi_\mu^2+3\delta_\mu\right)$$

$$\ge \frac{24}{m^4}\xi_\mu^3(1-\xi_\mu^2) - \frac{9}{m^4}(1-\theta_\mu)\xi_\mu^3\left(8-10\xi_\mu^2+\frac{6}{5}\right) \quad \text{d'après (I–18)}$$

$$\geq \frac{24}{m^4}\xi_\mu^3(1-\xi_\mu^2) - \frac{90}{m^4}(1-\theta_\mu)\xi_\mu^3(1-\xi_\mu^2)$$

$$= \frac{90}{m^4}(\theta_\mu - \frac{11}{15})\xi_\mu^3(1-\xi_\mu^2)$$

$$\geq 0 \qquad\qquad \text{par le lemme I–5.}$$

LEMME I–12. *Pour* $\mu = 0,1,\ldots,\left[\frac{m-1}{2}\right]$ *et* $\nu = 0,1,\ldots,m$

$$\phi(\xi_\mu, \lambda_\nu) \geq 0. \tag{I–20}$$

Démonstration. D'après le lemme I–10, nous savons que $\phi(\xi_\mu, t)$ a un zéro dans $(1, \infty)$. En plus, nous remarquons que $\phi(\xi_\mu, t)$ a un zéro en ξ_μ avec

$$\frac{d}{dt}\phi\left(\xi_\mu, t\right)\Big|_{t=\xi_\mu} = -4\xi_\mu(1-\xi_\mu^2) < 0.$$

D'où, si $\mu = 1,\ldots,\left[\frac{m-1}{2}\right]$, alors en tenant compte du lemme I–11, $\phi(\xi_\mu, t)$ doit aussi avoir un zéro dans $(\xi_\mu, \xi_\mu + (3\theta_\mu - 1)\frac{\xi_\mu}{m^2})$. La fonction $\phi(\xi_\mu, t)$ étant un polynôme de degré 3 en t, elle n'a pas d'autres zéros et, est donc positive sur $[(-1,\xi_\mu)\cup(\xi_\mu + (3\theta_\mu-1)\frac{\xi_\mu}{m^2}, 1)]$. Il découle du lemme I–6 que l'intervalle $[\lambda_\mu, 1]$ est contenu dans $[\xi_\mu + (3\theta_\mu - 1)\frac{\xi_\mu}{m^2}, 1]$, et donc $\phi(\xi_\mu, t) \geq 0$ pour $t \in [-1, \xi_\mu] \cup [\lambda_\mu, 1]$. Ce qui démontre (I–20) pour $\mu = 1,\ldots,\left[\frac{m-1}{2}\right]$. Nous pouvons discuter de la même manière le cas $\mu = 0$; bien que le lemme I–11 ne soit pas vrai dans ce cas, (I–19) nous donne la conclusion désirée.

De façon plus générale, nous avons

LEMME I–12'. *L'inégalité* (I–20) *est vraie pour* $\mu = 0,1,\ldots,m$ *et* $\nu = 0,1,\ldots,m$.

Démonstration. Nous avons déjà indiqué, en remarque I–1, que (I–20) a lieu pour $\mu = \frac{m}{2}$ quand m est pair. L'inégalité est vraie aussi pour $\mu = \left[\frac{m+1}{2}\right], \dots, m$ puisque

$$\phi(\xi, t) \equiv \phi(-\xi, -t)$$

et,

$$\xi_\mu = -\xi_{m-\mu} \quad (\mu = 0,1,\dots,m), \qquad \lambda_\nu = -\lambda_{m-\nu} \quad (\nu = 0,1,\dots,m).$$

Maintenant nous sommes en mesure de démontrer le lemme suivant :

LEMME I–13. *Soit* $p(x) := (1-x^2)\, q(x)$ *un polynôme de degré au plus* n *tel que* $|q(x)| \le 1$ *en* $\lambda_\nu = \cos\frac{\nu\pi}{n-2}$ $(\nu = 0,1,\dots, n-2)$. *Alors , aux racines de* $\tau_n'(x) = 0$

$$|p''(x)| \le |\tau_n''(x)|.$$

L'égalité a lieu seulement si $p(x) \equiv \gamma\, \tau_n(x)$,où γ est *une constante telle* que $|\gamma| = 1$.

Démonstration. Soit $\psi(x) := (1-x^2)\, T_m'(x)$ où $m = n-2$. Alors,

$$q(x) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{q(\lambda_\nu)}{\psi'(\lambda_\nu)} \frac{\psi(x)}{x-\lambda_\nu}$$

et donc,

$$p(x) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{q(\lambda_\nu)}{\psi'(\lambda_\nu)} \frac{(1-x^2)^2\, T_m'(x)}{x-\lambda_\nu}.$$

En utilisant le lemme I–9, nous déduisons que si ξ est une racine de $\tau_n'(x) = 0$, alors

$$p''(\xi) = \frac{T_m(\xi)}{1-\xi^2} \sum_{\nu=0}^{m} \frac{q(\lambda_\nu)}{\psi'(\lambda_\nu)} \frac{\phi(\xi, \lambda_\nu)}{(\xi-\lambda_\nu)^4}. \tag{I–21}$$

En particulier

$$\tau_n''(\xi)=\frac{T_m(\xi)}{1-\xi^2}\sum_{\nu=0}^{m}\frac{T_m(\lambda_\nu)}{-\lambda_\nu T_m'(\lambda_\nu)-m^2T_m(\lambda_\nu)}\,\frac{\phi(\xi,\lambda_\nu)}{(\xi-\lambda_\nu)^4}$$

et comme $T_m(\lambda_\nu)$ et $\psi'(\lambda_\nu)=-\lambda_\nu T_m'(\lambda_\nu)-m^2T_m(\lambda_\nu)$ sont de signes opposés, l'égalité précédente devient

$$\tau_n''(\xi)=-\frac{T_m(\xi)}{1-\xi^2}\sum_{\nu=0}^{m}\left|\frac{1}{\psi'(\lambda_\nu)}\right|\frac{\phi(\xi,\lambda_\nu)}{(\xi-\lambda_\nu)^4}. \tag{I–22}$$

Sachant que $|q(\lambda_\nu)|\le 1$ par hypothèse et que $\phi(\xi,\lambda_\nu)\ge 0$ d'après le lemme I–12', alors en comparant (I–21) et (I–22) nous obtenons

$$|p''(\xi)|\le|\tau_n''(\xi)|$$

où l'égalité a lieu si et seulement si $q(\lambda_\nu)=\gamma\,T_m(\lambda_\nu)$, $(\nu=0,1,...m)$, i.e. $p(x)\equiv\gamma\,\tau_n(x)$, γ étant une constante telle que $|\gamma|=1$.

I–3. Démonstration du théorème I–1

Soit $p(x):=(1-x^2)\,q(x)$ un polynôme de degré au plus n tel que $|q(\lambda_\nu)|\le 1$ pour $\nu=0,1,...,n\text{-}2$. De plus, soit p(x) *réel pour* x *réel*. Si $p(x)\not\equiv\pm\tau_n(x)$, alors d'après le lemme I–13 il existe une constante $c>1$ telle que $|cp''(x)|\le|\tau_n''(x)|$ aux zéros de τ_n'. Puisque les zéros de τ_n' sont tous réels et distincts, il découle du
τ lemme I–1 que $|cp'''(x)|\le|\tau_n'''(x)|$ aux zéros de τ_n''. Les lemmes I–2 et I–4 donnent

$$|p^{(k)}(x+iy)|\le\frac{1}{c}|\tau_n^{(k)}(1+iy)|\qquad\text{pour }(x,y)\in[-1,1]\times\mathbb{R}\quad\text{et}\quad k=3,4,\ldots.$$

Ainsi (I–12') est vérifiée. En particulier

$$\|p^{(k)}\|\le|\tau_n^{(k)}(1)|\qquad\text{pour }k=3,4,\ldots. \tag{I–23}$$

Dans cette dernière inégalité, la condition p(x) réel pour x réel peut être supprimée. En effet, soit $p(x):=(1-x^2)q(x)$ un polynôme de degré au plus n tel que $|q(\lambda_\nu)|\le 1$

pour $\nu = 0,1,...n-2$. Si $\| p^{(k)} \|$ est atteinte en $x_* \in [-1,1]$, alors en ce point le polynôme $p^{(k)}$ peut s'écrire $p^{(k)}(x_*) = \| p^{(k)} \| e^{i\alpha}$. Considérons $p_*(x) := \mathrm{Re}\{e^{-i\alpha} p(x)\} = (1-x^2) q_*(x)$ qui est un polynôme de degré au plus n tel que $|q_*(\lambda_\nu)| \le |q(\lambda_\nu)| \le 1$ pour $\nu = 0,1,...,n-2$. De plus, $p_*(x)$ est réel pour x réel, d'où d'après (I–23)

$$\| p_*^{(k)} \| \le | \tau_n^{(k)}(1) | \qquad \text{pour } k = 3,4,\ldots .$$

Sachant que

$$\| p^{(k)} \| = p^{(k)}(x_*)\, e^{-i\alpha} = p_*^{(k)}(x_*) \le \| p_*^{(k)} \|$$

nous obtenons l'inégalité (I–12).

I–4. Addenda au théorème I–1

Soit

$$-1 =: y_0 < y_1 < \cdots < y_m := 1$$

et

$$\omega(x) := (1+x)^{n_1} (1-x)^{n_2} \prod_{\mu=0}^{m} (x - y_\mu)$$

où n_1 et n_2 sont des entiers non négatifs. En plus, soit

$$\omega_\mu(x) := \frac{\omega(x)}{x - y_\mu}, \qquad \mu = 0,1,\ldots,m,$$

et $n := m + n_1 + n_2$ et notons

$$\alpha_{\mu,1} \le \alpha_{\mu,2} \le \cdots \le \alpha_{\mu,n-k}, \qquad \mu = 0,1,\ldots,m$$

les zéros de $\omega_\mu^{(k)}$. Supposons maintenant que P_n est un polynôme de degré $n = m + n_1 + n_2$ ayant les propriétés suivantes:

(i) il a des zéros de multiplicités n_1 et n_2 en -1 et $+1$ respectivement,

(ii) le polynôme $\hat{P}_n(x) := \dfrac{P_n(x)}{(1+x)^{n_1}(1-x)^{n_2}}$ change de signe aux points $y_0, y_1, \ldots y_m$.

Dans [6 , théorème 1] on démontre que, si $p(x):= (1+x)^{n_1} (1-x)^{n_2} \hat{p}(x)$ est un polynôme de degré au plus n tel que

$$|\hat{p}(y_\mu)| \leq |\hat{P}_n(y_\mu)|, \qquad \mu = 0,1,\ldots,m \tag{I–24}$$

et p(x) est réel pour x réel, alors pour les z situés à l'extérieur du disque ouvert de diamètre $(\alpha_{m,1}, \alpha_{0,\,n-k})$, on a

$$|p^{(k)}(z)| \leq | P_n^{(k)}(z)|.$$

L'énoncé du théorème 1 dans [6] contient une légère inexactitude: les chapeaux sur p et P_n dans (I–24) y ont été omis par inadvertance.

En appliquant le résultat que l'on vient d'énoncer à $P_n(x):= (1-x^2)\, T_{n-2}(x)$ et

$$y_\mu := -\cos \frac{\mu\pi}{n-2} \qquad \mu = 0,1,\ldots,n-2$$

nous obtenons

THÉORÈME I–2. *Soit* $p(x):= (1-x^2)\, q(x)$ *un polynôme de degré au plus* n *tel que* (I–11) *ait lieu. Si* p(x) *est réel pour* x *réel,alors pour* $k = 0,1,2\ldots$

$$|p^{(k)}(z)| \leq |\tau_n^{(k)}(z)| \tag{I–25}$$

pour $|z| \geq \alpha_\kappa$ *où* α_κ *est le plus grand zéro de*

$$\frac{d^k}{dx^k}\left\{\frac{(1-x^2)T'_{n-2}(x)}{1+x}\right\}.$$

D'après un résultat dans [5] , l'inégalité (I–25) n'est pas vraie à des points *immédiatement* à droite de $-\alpha_\kappa$ et également à ceux immédiatement à gauche de α_κ. Ainsi, dans le théorème I–2 , α_κ ne peut être remplacé par aucun autre nombre plus petit.

I–5. Quelques remarques sur le théorème I–1

I–5.1. Dans le théorème I–1 nous avons montré en particulier que, pour k= 3,4,..., la conclusion (I–3.1) reste vraie sous des hyphotèses plus faibles. Plus précisèment, nous avons supposé que $\frac{p(x)}{1-x^2}$ est borné par 1 aux points $x_\nu = \cos\frac{\nu\pi}{n-2}$, $\nu=0,1,...n-2$. Cela soulève la question suivante : existe – t – il d'autres n–1 points, dans l'intervalle [–1,1] ,ayant la même propriété ? La réponse est *non.* En effet, si E est un ensemble fermé quelconque de points dans [–1,1] qui n'inclut pas tous les points $x_\nu = \cos\frac{\nu\pi}{n-2}$, alors il existe (voir [1 ,p.526] ou [10, Remarque 3 p. 138]) un polynôme q , de degré n–2, borné par 1 dans E tel que $q^{(k)}(1) > T_{n-2}^{(k)}(1)$ pour $k = 1,2,..., n-2$. Ainsi $p(x):=(1-x^2)q(x)$ est un contre–exemple puisque

$$|p^{(k)}(1)| = 2k\, q^{(k-1)}(1) + k(k-1)\, q^{(k-2)}(1) > 2k\ T_{n-2}^{(k-1)}(1) + k(k-1)\ T_{n-2}^{(k-2)}(1) = |\tau_n^{(k)}(1)|.$$

I–5.2. IL est naturel de s'interroger sur la validité de (I–12') ou au moins de (I–12) pour $k = 2$. De plus , on peut se demander si (I–3.2) , (I–3.3) et (I–3.4) restent vraies sous la condition (I–11) . La seule chose que nous mentionnons ici à cet égard est que (I–3.2) n'a pas lieu sous notre hypothèse plus faible . En effet , soit $p(x):=(1-x^2)q(x)$ où $q(x) = -x^2+x+1$. Il est facile de vérifier que

$$|q(\cos\frac{\nu\pi}{2})| = 1 \quad \text{pour} \quad \nu = 0, 1, 2 \quad \text{tandis que} \quad \|p'\| = \frac{9+19\sqrt{57}}{72} > 2 = |\tau_4'(1)|.$$

I–5.3. Le théorème I–1 peut aussi être énoncé comme suit :

THÉORÈME I–1'. *Si* p *est un polynôme de degré au plus* n *satisfaisant* (I–4) , *alors*

$$\left\| \frac{d^k}{dx^k}((1-x^2)p(x)) \right\| \le |\tau_{n+2}^{(k)}(1)| \quad \textit{pour} \quad k = 3,.4,... .$$

De plus , si p(x) est réel pour x *réel et* $I_y := \{ x+iy : -1\le x\le 1\}$, *alors*

$$\max_{z\in I_y} \left| \frac{d^k}{dz^k}((1-z^2)p(z)) \right| \le |\tau_{n+2}^{(k)}(1+iy)| \qquad \textit{pour tout} \quad y \in \mathbb{R} \quad \textit{et} \quad k = 3, 4,... .$$

CHAPITRE II

POLYNÔMES AYANT UN ZÉRO PRESCRIT ET INÉGALITÉ DE BERNSTEIN

II-1. Introduction

Soit $\mathcal{P}_n$ la classe des polynômes $p(z) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ de degré au plus n. Notons $\|p\|_{|z|=1}$ le maximum de $|p(z)|$ sur le cercle unité et $\mathcal{P}_{n,1}$ la sous – classe des polynômes p de $\mathcal{P}_n$ tels que $\|p\|_{|z|=1} \leq 1$. Enfin, désignons par $\mathcal{P}^*_{n,1}$ l'ensemble des polynômes de $\mathcal{P}_{n,1}$ qui s'annulent au point $z = 1$.

D'aprés l'inégalité de Bernstein pour les polynômes

$$\sup_{p \in \mathcal{P}_{n,1}} |p'(z)| = n \tag{II–1}$$

en tout point z du cercle unité. De plus, le supremum est atteint si $p(z) := e^{i\gamma} z^n, \gamma \in \mathbb{R}$.

Dans cette deuxième partie de la thèse nous étudions la question suivante: que devient l'inégalité de Bernstein en un point z prescrit sur le cercle unité si on se restreint aux polynômes p de la sous – classe $\mathcal{P}^*_{n,1}$ de $\mathcal{P}_{n,1}$? A priori le supremum peut être différent en différents points. Nous avons obtenu une réponse exacte pour des points z appartenant à un certain ensemble E_n qui sera spécifié plus tard.

II-2. Énoncé du résultat

Pour $n \in \mathbb{N}$ soit T_n le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Tchebycheff de première espèce. Pour ν entier dans $[1, 2n-1]$ soit ρ_ν l'unique solution de l'équation

$$T_n(\rho) = \frac{1}{n \sin\left(\frac{\nu\pi}{2n}\right)} \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1-\rho^2\cos^2\left(\frac{\nu\pi}{2n}\right)}} \tag{II–2}$$

dans $(\cos\frac{\pi}{2n}, 1)$ si ν est pair ; sinon $\rho_\nu = \cos\frac{\pi}{2n}$. Notons φ_ν l'unique racine de l'équation

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \rho_\nu \cos\frac{\nu\pi}{2n} \tag{II–3}$$

dans $(0, 2\pi)$. L'ensemble E_n auquel on a fait allusion plus haut a pour éléments les points $z_{n,\nu} = e^{i\varphi_\nu}$, $1 \le \nu \le 2n-1$.

Il a été prouvé dans [2] que si n est impair alors, pour $p \in \mathcal{P}^*_{n,1}$, on a

$$|p'(-1)| \le n\cos^2\frac{\pi}{4n}. \tag{II–4}$$

Dans (II-4) l'égalité a lieu si et seulement si $p = e^{i\gamma}P$, où $\gamma \in \mathbb{R}$ et P est défini par

$$P(z^2) = z^n\left\{T_n\left(\rho\frac{z+z^{-1}}{2}\right) + \frac{1}{n}\frac{z-z^{-1}}{2}T_n'\left(\rho\frac{z+z^{-1}}{2}\right)\right\}, \quad \rho = \cos\frac{\pi}{2n}. \tag{II–5}$$

Nous avons pu trouvé, dans cette étude, les polynômes de $\mathcal{P}^*_{n,1}$ qui maximisent $|p'(z)|$ en tout point z donné de E_n.

Soit

$$\zeta_\nu(z) := \rho_\nu\frac{z+z^{-1}}{2} - i\frac{1-\rho_\nu^2}{\rho_\nu}\frac{\cos\frac{\varphi_\nu}{2}}{\sin\frac{\varphi_\nu}{2}}\frac{z-z^{-1}}{2}, \quad (\nu = 1, \dots, 2n-1).$$

Sachant que T_n est pair ou impair suivant que n est pair ou impair respectivement, il est facile de voir que, pour $\nu = 1, 2, \ldots, 2n-1$, la fonction

$$z \mapsto e^{-i(\frac{n}{2}-1)\varphi_\nu} z^n \Bigg\{ \left(\frac{\sqrt{1-\rho_\nu^2}}{n} T_n'(\rho_\nu) \right) T_n(\zeta_\nu(z))$$

$$- \left(\frac{\sqrt{1-\rho_\nu^2}}{n} T_n(\rho_\nu) \frac{z+z^{-1}}{2} + \left(- \frac{\sqrt{\rho_\nu^2 - \cos^2\frac{\varphi_\nu}{2}}}{n\rho_\nu \sin\frac{\varphi_\nu}{2}} + i \frac{\sqrt{1-\rho_\nu^2}}{n} T_n(\rho_\nu) \frac{\cos\frac{\varphi_\nu}{2}}{\sin\frac{\varphi_\nu}{2}} \right) \frac{z-z^{-1}}{2} \right) T_n'(\zeta_\nu(z)) \Bigg\}$$

est un polynôme *pair* de degré 2n et peut donc être écrit sous la forme $P_{n,\nu}(z^2)$ où $P_{n,\nu}$ est un polynôme de degré n.

Maintenant nous sommes prêts pour énoncer le résultat principal de ce chapitre.

THÉORÈME II. *Le polynôme* $P_{n,\nu}$ *appartient à* $\mathcal{P}^*_{n,1}$ *pour* $1 \le \nu \le 2n-1$ *et*

$$\sup_{p \in \mathcal{P}^*_{n,1}} |p'(e^{i\varphi_\nu})| = \frac{n}{2} \left| \frac{\sqrt{\rho_\nu^2 - \cos^2\frac{\varphi_\nu}{2}}}{\sin\frac{\varphi_\nu}{2}} + \frac{\sqrt{1-\rho_\nu^2}}{n} T_n'(\rho_\nu) \right| = |P_{n,\nu}'(e^{i\varphi_\nu})| \qquad \text{(II-6)}$$

Le supremum est atteint si et seulement si $p = e^{i\gamma} P_{n,\nu}$, *où* $\gamma \in \mathbb{R}$.

REMARQUE II-1. De (II-2) et (II-3) nous tirons

$$T_n(\rho_\nu) = \frac{1}{n\sin\frac{\varphi_\nu}{2}} \frac{\rho_\nu\sqrt{1-\rho_\nu^2}}{\sqrt{\rho_\nu^2 - \cos^2\frac{\varphi_\nu}{2}}},$$

$$T_n'(\rho_\nu) = \frac{n}{\sqrt{1-\rho_\nu^2}} \sqrt{1 - \frac{\rho_\nu^2(1-\rho_\nu^2)}{n^2\sin^2\frac{\varphi_\nu}{2}(\rho_\nu^2 - \cos^2\frac{\varphi_\nu}{2})}}.$$

REMARQUE II-2. Afin de simplifier la présentation nous introduisons, pour $\nu = 1,\ldots, 2n-1$, les fonctions suivantes:

$$\xi_{n,\nu}(\theta) := \zeta_\nu(e^{i\frac{\theta}{2}}) = \rho_\nu \cos\frac{\theta}{2} + \frac{1-\rho_\nu^2}{\rho_\nu} \frac{\cos\frac{\varphi_\nu}{2}}{\sin\frac{\varphi_\nu}{2}} \sin\frac{\theta}{2} \tag{II-7}$$

$$R_{n,\nu}(\theta) := \frac{\sqrt{1-\rho_\nu^2}}{n}\left\{ T_n'(\rho_\nu)\, T_n(\xi_{n,\nu}(\theta)) - T_n(\rho_\nu) \frac{\sin\frac{\varphi_\nu-\theta}{2}}{\sin\frac{\varphi_\nu}{2}} T_n'(\xi_{n,\nu}(\theta)) \right\} \tag{II-8}$$

$$I_{n,\nu}(\theta) := \frac{1}{n\rho_\nu \sin\frac{\varphi_\nu}{2}} \sqrt{\rho_\nu^2 - \cos^2\frac{\varphi_\nu}{2}}\ \sin\frac{\theta}{2}\ T_n'(\xi_{n,\nu}(\theta)) \tag{II-9}$$

$$\omega_{n,\nu}(\theta) := T_n(\rho_\nu)\, T_n(\xi_{n,\nu}(\theta)) + \frac{1-\rho_\nu^2}{n^2} T_n'(\rho_\nu) \frac{\sin\frac{\varphi_\nu-\theta}{2}}{\sin\frac{\varphi_\nu}{2}} T_n'(\xi_{n,\nu}(\theta)), \tag{II-10}$$

définies sur $[0, 2\pi)$. En outre, il est facile de voir que

$$P_{n,\nu}(e^{i\theta}) = e^{-i(\frac{n}{2}-1)\varphi_\nu} e^{in\frac{\theta}{2}} (R_{n,\nu}(\theta) + i\, I_{n,\nu}(\theta)). \tag{II-11}$$

II-3. Quelques propriétés de $P_{n,\nu}$

Dans les lemmes II-1 – II-4 qui vont suivre nous allons démontrer des propriétés de $P_{n,\nu}$ utiles dans notre contexte.

LEMME II-1. *Le polynôme* $P_{n,\nu}$ *appartient à* $\mathcal{P}^*_{n,1}$ *pour* $1 \le \nu \le 2n-1$.

Démonstration. Nous avons déjà noté que $P_{n,\nu}$ est un polynôme de degré n. D'après la remarque II-2, en utilisant les formules (II-8), (II-9), (II-10) et (II–11) nous obtenons

$$|P_{n,\nu}(e^{i\theta})|^2 \le |P_{n,\nu}(e^{i\theta})|^2 + \omega_{n,\nu}^2(\theta)$$

$$= R_{n,\nu}^2(\theta) + I_{n,\nu}^2(\theta) + \omega_{n,\nu}^2(\theta)$$

$$= \frac{1-\rho_\nu^2}{n^2}\left\{T_n'(\rho_\nu)\,T_n(\xi_{n,\nu}(\theta)) - T_n(\rho_\nu)\frac{\sin\frac{\varphi_\nu-\theta}{2}}{\sin\frac{\varphi_\nu}{2}}\,T_n'(\xi_{n,\nu}(\theta))\right\}^2$$

$$+ \frac{\rho_\nu^2-\cos^2\frac{\varphi_\nu}{2}}{n^2\rho_\nu^2\sin^2\frac{\varphi_\nu}{2}}\,\sin^2\frac{\theta}{2}\,\left\{T_n'(\xi_{n,\nu}(\theta))\right\}^2$$

$$+\left\{T_n(\rho_\nu)\,T_n(\xi_{n,\nu}(\theta)) + \frac{1-\rho_\nu^2}{n^2}\,T_n'(\rho_\nu)\frac{\sin\frac{\varphi_\nu-\theta}{2}}{\sin\frac{\varphi_\nu}{2}}\,T_n'(\xi_{n,\nu}(\theta))\right\}^2$$

$$= T_n^2(\xi_{n,\nu}(\theta)) + (1-\xi_{n,\nu}^2(\theta))\,\frac{1}{n^2}\left\{T_n'(\xi_{n,\nu}(\theta))\right\}^2$$

$$= 1.$$

Enfin, une simple vérification montre que

$$P_{n,\nu}(1) = 0.$$

REMARQUE II-3. La preuve du lemme II-1 montre, en particulier, que

$$|P_{n,\nu}(e^{i\theta})|^2 + \omega_{n,\nu}^2(\theta) = 1.$$

Dans le lemme II-2 nous allons décrire les points où $|P_{n,\nu}(z)|$ atteint son maximum sur le cercle unité.

LEMME II-2. *Soit* ν *un entier dans* $[1, 2n-1]$. *Le maximum de* $|P_{n,\nu}(z)|$ *sur le cercle unité est* 1 *et il est atteint aux* n *points* $z_k := e^{i\theta_k}$, $1 \le k \le n$ *où* $0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n < 2\pi$. *Les nombres* θ_k *dépendent de* n *et de* ν ; *si* ν *est impair ils sont caractérisés par*

$$\begin{cases} \xi_{n,\nu}(\theta_k) = \cos\frac{k\pi}{n}, & 1 \le k \le \frac{\nu+1}{2} - 1 \quad (\nu \ne 1) \\ \xi_{n,\nu}(\theta_{\frac{\nu+1}{2}}) = \cos\frac{\nu\pi}{2n}, & \theta_{\frac{\nu+1}{2}} := \varphi_\nu \\ \xi_{n,\nu}(\theta_k) = \cos(k-1)\frac{\pi}{n}, & \frac{\nu+1}{2} + 1 \le k \le n \quad (\nu \ne 2n-1) \end{cases} \tag{II–12}$$

tandis que si ν *est pair ils vérifient*

$$T_n(\xi_{n,\nu}(\theta_k)) = (-1)^{k+1} \frac{\sqrt{n^2\left(\rho_\nu^2-\cos^2\frac{\varphi_\nu}{2}\right)\sin^2\frac{\varphi_\nu}{2} - \rho_\nu^2\left(1-\rho_\nu^2\right)}}{\sqrt{\rho_\nu^2-\cos^2\frac{\varphi_\nu}{2}}\sqrt{n^2\sin^2\frac{\varphi_\nu}{2}\sin^2\frac{\varphi_\nu-\theta_k}{2}+\sin^2\frac{\theta_k}{2}}}\sin\frac{\varphi_\nu-\theta_k}{2},$$

$$T_n'(\xi_{n,\nu}(\theta_k)) = (-1)^k \frac{n\rho_\nu\sin\frac{\varphi_\nu}{2}}{\sqrt{\rho_\nu^2-\cos^2\frac{\varphi_\nu}{2}}\sqrt{n^2\sin^2\frac{\varphi_\nu}{2}\sin^2\frac{\varphi_\nu-\theta_k}{2}+\sin^2\frac{\theta_k}{2}}}, \quad 1 \le k \le n.$$

Démonstration. Ecrivons $\xi_{n,\nu}(\theta)$ sous la forme $\xi_{n,\nu}(\theta) = \rho_* \cos(\theta_* - \frac{\theta}{2})$ où

$$\rho_* = \sqrt{\rho_\nu^2 + \frac{(1-\rho_\nu^2)^2}{\rho_\nu^2}\frac{\cos^2\frac{\varphi_\nu}{2}}{\sin^2\frac{\varphi_\nu}{2}}} \quad \text{et} \quad \theta_* \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \quad \text{est tel que} \quad \cos\theta_* = \frac{\rho_\nu}{\rho_*},$$

$\sin\theta_* = \frac{1}{\rho_*}\frac{1-\rho_\nu^2}{\rho_\nu}\frac{\cos\frac{\varphi_\nu}{2}}{\sin\frac{\varphi_\nu}{2}}$. Nous en déduisons, en particulier, que $\xi_{n,\nu}(\theta)$ décroît de ρ_ν à $-\rho_\nu$ sur l'intervalle $[4\theta_*, 2\pi] \subseteq [0, 2\pi]$ si $\theta_* \in [0, \frac{\pi}{2})$ et décroît de ρ_ν à $-\rho_\nu$ sur l'intervalle $[0, 4\theta_* + 2\pi] \subseteq [0, 2\pi]$ si $\theta_* \in (-\frac{\pi}{2}, 0]$. D'après la remarque II-3 $|P_{n,\nu}(e^{i\theta})| = 1$ si et seulement si $\omega_{n,\nu}(\theta) = 0$.

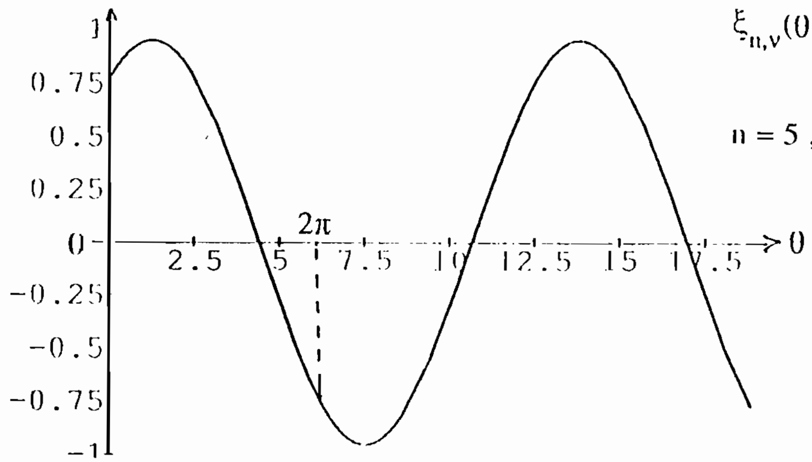
Soit ν impair. Alors, $T_n(\rho_\nu) = T_n(\cos\frac{\pi}{2n}) = 0$. De la formule (II-10) il suit que $\omega_{n,\nu}(\theta)$ s'annule si et seulement si $\sin\frac{\varphi_\nu-\theta}{2}\, T_n'(\xi_{n,\nu}(\theta)) = 0$, i.e. si $\theta = \varphi_\nu$ ou $\xi_{n,\nu}(\theta_\mu) = \cos\frac{\mu\pi}{n}$, $\mu = 1,\ldots,n-1$. Si nous nous référons à la formule (II-7) et nous rappelons que φ_ν satisfait l'équation (II-3) nous obtenons

$$\xi_{n,\nu}(\varphi_\nu) = \frac{1}{\rho_\nu} \cos\frac{\varphi_\nu}{2} = \cos\frac{\nu\pi}{2n}. \qquad \text{(II–13)}$$

En posant $\theta_{\frac{\nu+1}{2}} := \varphi_\nu$ on voit que les nombres θ_k sont bien caractérisés par (II–12) pour ν impair.

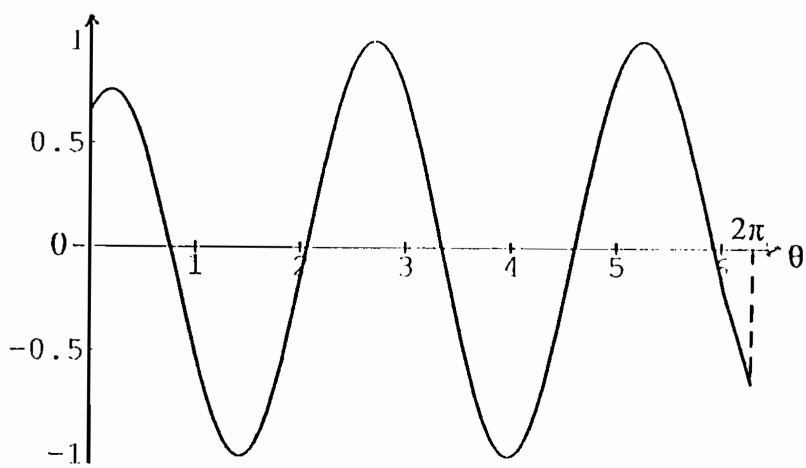
Considérons maintenant ν pair. Puisque $e^{in\frac{\theta}{2}}\,\omega_{n,\nu}(\theta) = Q(e^{i\theta})$, où Q est un polynôme de degré n, $\omega_{n,\nu}(z)$ a exactement n zéros dans la bande $0 \le \operatorname{Re} z < 2\pi$. Nous allons montrer qu'en fait tous ces zéros sont réels. Supposons que $\theta_* \in [\,0\,,\frac{\pi}{2})$ et étudions $T_n(\xi_{n,\nu}(\theta))$ si θ appartient à $[\,0, 2\pi\,)$. Pour $k = 1,\ldots,n-1$ soit ϑ_k la valeur dans $(\,0,\,2\pi\,)$ pour laquelle $\xi_{n,\nu}(\vartheta_k) = \cos\frac{k\pi}{n}$. Alors, $T_n(\xi_{n,\nu}(\vartheta_k)) = (-1)^k$ et $T_n'(\xi_{n,\nu}(\vartheta_k)) = 0$, ce qui implique, d'après (II–10), $\omega_{n,\nu}(\vartheta_k) = (-1)^k T_n(\rho_\nu)$. De l'étude de $\xi_{n,\nu}(\theta)$ il découle que $T_n(\xi_{n,\nu}(\theta))$ croît de $T_n(\rho_\nu)$ à $T_n(\rho_*)$ sur l'intervalle $[0, 2\theta_*]$ et décroît de $T_n(\rho_*)$ à -1 sur l'intervalle $[2\theta_*, \vartheta_1]$. Dans l'intervalle $[\vartheta_1\,, \vartheta_{n-1}\,]$ la courbe représentative de $T_n(\xi_{n,\nu}(\theta))$ a $n-2$ branches passant de -1 à 1 ou de 1 à -1. Enfin, quand θ varie de ϑ_{n-1} à 2π, $T_n(\xi_{n,\nu}(\theta))$ croît ou décroît suivant n de $(-1)^{n-1}$ à $(-1)^n T_n(\rho_\nu)$. Dautre part, un simple calcul montre que $\omega_{n,\nu}(0) = 1$ et $\omega_{n,\nu}(2\pi) = (-1)^n$. De ce qui précéde il découle donc que $\omega_{n,\nu}(\theta)$ s'annule au moins une fois dans chacun des n intervalles $(\,0\,,\vartheta_1\,)\,,(\vartheta_1\,,\vartheta_2\,)\,,\ldots,(\vartheta_{n-1}\,,2\pi)$. Si nous supposons maintenant que $\theta_* \in (-\frac{\pi}{2}, 0]$ l'allure de la courbe de $T_n(\xi_{n,\nu}(\theta))$ change mais, de façon analogue au cas précédent, nous aboutissons à la même conclusion pour le nombre de zéros de $\omega_{n,\nu}(\theta)$

A titre d'illustration nous donnons ci–dessous les graphes de $\xi_{n,\nu}(\theta)$ et $T_n(\xi_{n,\nu}(\theta))$ sur $[0, 2\pi\,)$ dans les deux cas $\theta_* \in [\,0\,,\frac{\pi}{2})$ et $\theta_* \in (-\frac{\pi}{2}\,, 0]$ pour $n = 5$ et $n = 6$.



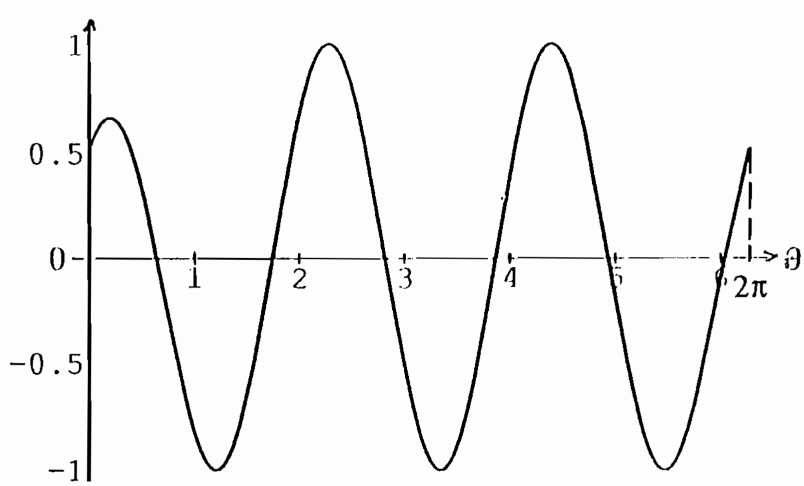
$\xi_{n,\nu}(\theta) = \rho_* \cos\left(\theta_* - \frac{\theta}{2}\right)$ avec

$n = 5$, $\rho_* = .95$ et $\theta_* = \frac{\pi}{5}$



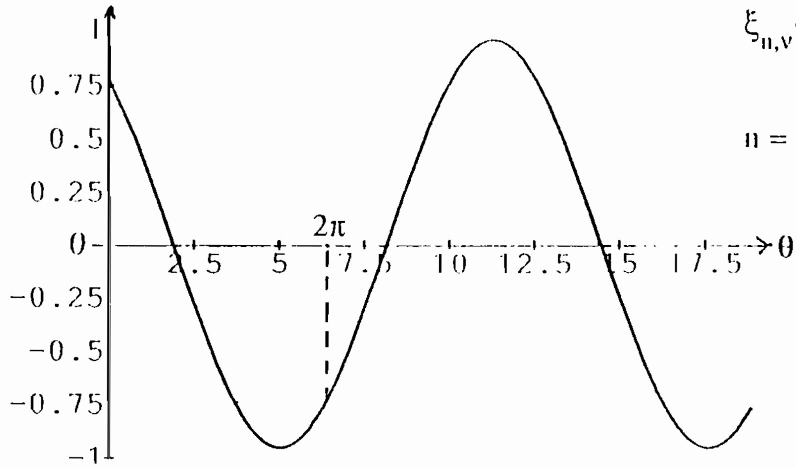
$T_5(\xi_{5,\nu}(\theta))$ avec

$\rho_* = .99$ et $\theta_* = \frac{\pi}{30}$



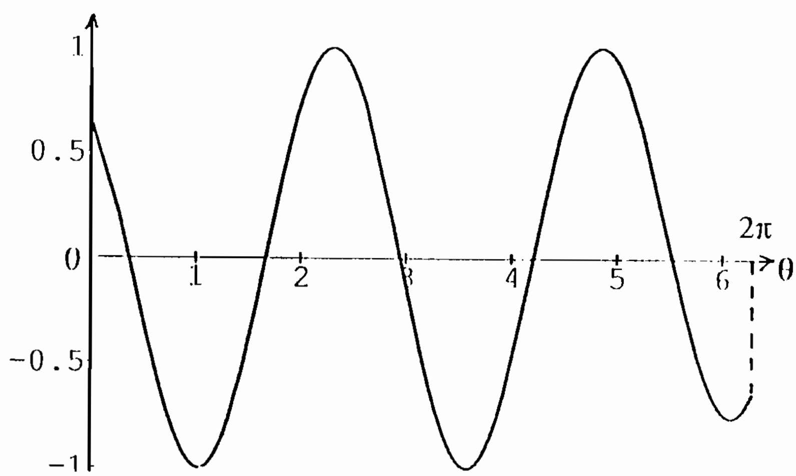
$T_6(\xi_{6,\nu}(\theta))$ avec

$\rho_* = .99$ et $\theta_* = \frac{\pi}{30}$



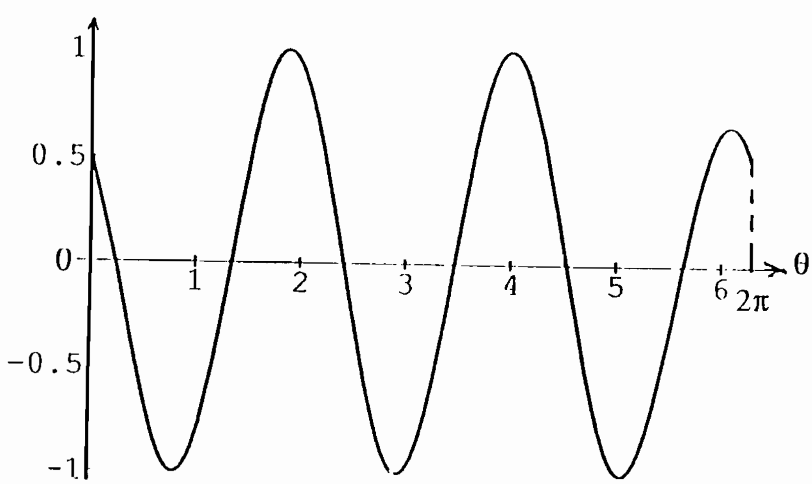
$\xi_{n,\nu}(\theta) = \rho_* \cos\left(\theta_* - \frac{\theta}{2}\right)$ avec

$n = 5$, $\rho_* = .95$ et $\theta_* = -\frac{\pi}{5}$



$T_5(\xi_{5,\nu}(\theta))$ avec

$\rho_* = .99$ et $\theta_* = -\frac{\pi}{30}$



$T_6(\xi_{6,\nu}(\theta))$ avec

$\rho_* = .99$ et $\theta_* = -\frac{\pi}{30}$

Si , comme précédemment , nous notons θ_k $(1 \le k \le n)$ les zéros de $\omega_{n,v}$, alors d'après (II-10) , il suit que

$$T_n(\rho_v)T_n(\xi_{n,v}(\theta_k)) + \frac{1-\rho_v^2}{n^2}T_n'(\rho_v)\frac{\sin\frac{\varphi_v-\theta_k}{2}}{\sin\frac{\varphi_v}{2}}\,T_n'(\xi_{n,v}(\theta_k)) = 0 \;,k = 1,...,n. \quad \text{(II-14)}$$

En utilisant les expressions de $T_n(\rho_v)$ et $T_n'(\rho_v)$ obtenues en remarque II-1 il vient

$$\rho_v\sqrt{1-\xi_{n,v}^2(\theta_\kappa)}\,\sin\frac{\varphi_v}{2}\,T_n(\xi_{n,v}(\theta_k))$$
$$+\sqrt{n^2(\rho_v^2-\cos^2\frac{\varphi_v}{2})\sin^2\frac{\varphi_v}{2}-\rho_v^2(1-\rho_v^2)}\,\sin\frac{\varphi_v-\theta_k}{2}\,\sqrt{1-\xi_{n,v}^2(\theta_\kappa)}\,\frac{T_n'(\xi_{n,v}(\theta_k))}{n}=0.$$

Cela , compte tenu de l'identité

$$n^2\,T_n^2\,(\xi_{n,v}(\theta_k)) + (1-\xi_{n,v}^2(\theta_k))\left\{T_n'(\xi_{n,v}(\theta_k))\right\}^2 = n^2$$

nous donne

$$T_n(\xi_{n,v}(\theta_k)) =$$

$$\pm\frac{\sqrt{n^2(\rho_v^2-\cos^2\frac{\varphi_v}{2})\sin^2\frac{\varphi_v}{2}-\rho_v^2(1-\rho_v^2)}\;\sin\frac{\varphi_v-\theta_k}{2}}{\sqrt{\rho_v^2(1-\xi_{n,v}^2(\theta_k))\sin^2\frac{\varphi_v}{2}+(n^2(\rho_v^2-\cos^2\frac{\varphi_v}{2})\sin^2\frac{\varphi_v}{2}-\rho_v^2(1-\rho_v^2))\sin^2\frac{\varphi_v-\theta_k}{2}}}$$

et

$$T_n'(\xi_{n,v}(\theta_k)) =$$

$$\pm\frac{n\rho_v\sin\frac{\varphi_v}{2}}{\sqrt{\rho_v^2(1-\xi_{n,v}^2(\theta_k))\sin^2\frac{\varphi_v}{2}+(n^2(\rho_v^2-\cos^2\frac{\varphi_v}{2})\sin^2\frac{\varphi_v}{2}-\rho_v^2(1-\rho_v^2))\sin^2\frac{\varphi_v-\theta_k}{2}}}.$$

Soit maintenant $\theta_* \in [0, \frac{\pi}{2})$. Puisque ν est pair et φ_ν satisfait (II–13) alors,

$$T_n(\xi_{n,\nu}(\varphi_\nu)) = T_n(\cos\frac{\nu\pi}{2n}) = \cos\frac{\nu\pi}{2} = (-1)^{\frac{\nu}{2}}$$

d'où, φ_ν est une des valeurs ϑ_k ($k = 1,2,\ldots, n-1$). Nous observons également que $T_n'(\xi_{n,\nu}(\theta))$ est alternativement négative et positive dans les intervalles $(2\theta_*, \vartheta_1)$, $(\vartheta_1, \vartheta_2)$, ..., $(\vartheta_{n-1}, 2\pi)$; de plus $T_n(\xi_{n,\nu}(\theta_k))\, T_n'(\xi_{n,\nu}(\theta_k))$ est négatif (resp. positif) si $\varphi_\nu > \theta_k$ (resp. $\varphi_\nu < \theta_k$). Ces remarques et l'identité

$$\rho_\nu^2(1-\xi_{n,\nu}^2(\theta_k))\sin^2\frac{\varphi_\nu}{2} + (n^2(\rho_\nu^2 - \cos^2\frac{\varphi_\nu}{2})\sin^2\frac{\varphi_\nu}{2} - \rho_\nu^2(1-\rho_\nu^2))\sin^2\frac{\varphi_\nu - \theta_k}{2} =$$
$$(\rho_\nu^2 - \cos^2\frac{\varphi_\nu}{2})(n^2\sin^2\frac{\varphi_\nu}{2}\sin^2\frac{\varphi_\nu-\theta_k}{2} + \sin^2\frac{\theta_k}{2})$$

nous conduisent aux résultats énoncés dans la seconde partie du lemme II–2. Le même raisonnement reste valable si $\theta_* \in (-\frac{\pi}{2}, 0]$.

Dans le lemme II–3 qui suit nous évaluons $P_{n,\nu}(z)$ aux points $z_k := e^{i\theta_\kappa}$, $1 \le k \le n$.

LEMME II-3. *Soit* ν *un entier dans* $[1, 2n-1]$ *et* $z_k := e^{i\theta_\kappa}$ $(1 \le k \le n)$ *les points où* $|P_{n,\nu}(z)|$ *atteint son maximum. Alors, si* ν *est impair*

$$P_{n,\nu}(e^{i\theta_\kappa}) = (-1)^k e^{-i(\frac{n}{2}-1)\varphi_\nu} e^{in\frac{\theta_\kappa}{2}}, \quad 1 \le k \le \frac{\nu+1}{2} - 1$$

$$P_{n,\nu}(e^{i\theta_{\frac{\nu+1}{2}}}) = e^{i\nu\frac{\pi}{2}} e^{i\varphi_\nu}, \quad \theta_{\frac{\nu+1}{2}} := \varphi_\nu$$

$$P_{n,\nu}(e^{i\theta_\kappa}) = (-1)^{k-1} e^{-i(\frac{n}{2}-1)\varphi_\nu} e^{in\frac{\theta_\kappa}{2}}, \quad \frac{\nu+1}{2} + 1 \le k \le n$$

tandis que si ν *est pair*

$$P_{n,\nu}(e^{i\theta_\kappa}) = (-1)^k e^{-i(\frac{n}{2}-1)\varphi_\nu} e^{in\frac{\theta_\kappa}{2}} \frac{-n\sin\frac{\varphi_\nu}{2}\sin\frac{\varphi_\nu-\theta_\kappa}{2} + i\sin\frac{\theta_k}{2}}{\sqrt{n^2\sin^2\frac{\varphi_\nu}{2}\sin^2\frac{\varphi_\nu-\theta_\kappa}{2} + \sin^2\frac{\theta_k}{2}}}, \quad 1 \le k \le n.$$

Démonstration. Soit ν impair, alors par définition $\rho_\nu = \cos\frac{\pi}{2n}$. En vertu des formules (II–11), (II–8) et (II–9) nous obtenons, pour $1 \le k \le n$,

$$P_{n,\nu}(e^{i\theta_\kappa}) = e^{-i(\frac{n}{2}-1)\varphi_\nu} e^{in\frac{\theta_\kappa}{2}} \left(T_n(\xi_{n,\nu}(\theta_k)) + i\,\frac{\sqrt{\rho_\nu^2 - \cos^2\frac{\varphi_\nu}{2}}}{n\,\rho_\nu \sin\frac{\varphi_\nu}{2}}\,\sin\frac{\theta_k}{2}\,T_n'(\xi_{n,\nu}(\theta_k))\right).$$

Alors, en faisant appel à la première partie du lemme II–2, nous aboutissons aux résultats du lemme II–3 pour ν impair.

Maintenant soit ν pair. D'après les formules (II–8) et (II–9), la remarque II–1 ainsi que la seconde partie du lemme II–2 il suit que

$$R_{n,\nu}(\theta_k) = (-1)^{k+1} \frac{n \sin\frac{\varphi_\nu}{2}\sin\frac{\varphi_\nu-\theta_\kappa}{2}}{\sqrt{n^2\sin^2\frac{\varphi_\nu}{2}\sin^2\frac{\varphi_\nu-\theta_\kappa}{2} + \sin^2\frac{\theta_k}{2}}}$$

$$I_{n,\nu}(\theta_k) = (-1)^k \frac{\sin\frac{\theta_k}{2}}{\sqrt{n^2\sin^2\frac{\varphi_\nu}{2}\sin^2\frac{\varphi_\nu-\theta_\kappa}{2} + \sin^2\frac{\theta_k}{2}}}.$$

Par conséquent, pour avoir la conclusion désirée il suffit de remplacer $R_{n,\nu}(\theta_k)$ et $I_{n,\nu}(\theta_k)$ par leurs valeurs dans (II–11).

Calculons maintenant $|P_{n,\nu}'(z)|$ aux points de E_n.

LEMME II–4. *Soit* ν *un entier dans* $[1, 2n-1]$, φ_ν *et* $P_{n,\nu}$ *définis comme précédemment. Alors,*

$$|P_{n,\nu}'(e^{i\varphi_\nu})| = \frac{n}{2}\left|\frac{\sqrt{\rho_\nu^2 - \cos^2\frac{\varphi_\nu}{2}}}{\sin\frac{\varphi_\nu}{2}} + \frac{\sqrt{1-\rho_\nu^2}}{n}\,T_n'(\rho_\nu)\right| \qquad, 1 \le \nu \le 2n-1.$$

Démonstration. Un simple calcul montre qu'en dérivant (II–11) par rapport à θ on obtient, en $\theta = \varphi_\nu$,

$$P'_{n,\nu}\,(e^{i\varphi_\nu}) = A_{n,\nu} + i\,B_{n,\nu} \qquad (1 \le \nu \le 2n-1)\ ,$$

où

$$A_{n,\nu} = \frac{\sqrt{1-\rho_\nu^2}}{2}\,T_n'(\rho_\nu)\,T_n(\xi_{n,\nu}(\varphi_\nu)) + \frac{\sqrt{\rho_\nu^2-\cos^2\frac{\varphi_\nu}{2}}}{2n\rho_\nu\sin\frac{\varphi_\nu}{2}}\cos\frac{\varphi_\nu}{2}\,T_n'(\xi_{n,\nu}(\varphi_\nu))$$

$$+\frac{\sqrt{\rho_\nu^2-\cos^2\frac{\varphi_\nu}{2}}}{n\rho_\nu}\,\xi'_{n,\nu}(\varphi_\nu)\,T_n''(\xi_{n,\nu}(\varphi_\nu))$$

$$B_{n,\nu} = \left(\frac{\sqrt{\rho_\nu^2-\cos^2\frac{\varphi_\nu}{2}}}{2\rho_\nu} - \frac{\sqrt{1-\rho_\nu^2}}{n}\,\xi'_{n,\nu}(\varphi_\nu)\,T_n'(\rho_\nu) - \frac{\sqrt{1-\rho_\nu^2}}{2n\sin\frac{\varphi_\nu}{2}}\,T_n(\rho_\nu)\right)T_n'(\xi_{n,\nu}(\varphi_\nu))\,.$$

De (II–7) nous déduisons

$$\xi'_{n,\nu}(\varphi_\nu) = -\frac{\rho_\nu^2-\cos^2\frac{\varphi_\nu}{2}}{2\rho_\nu\sin\frac{\varphi_\nu}{2}}\,. \qquad \text{(II–15)}$$

Soit ν impair, alors $\rho_\nu = \cos\frac{\pi}{2n}$. A l'aide des formules (II–3), (II–13), (II–15) et l'équation différentielle $(1-x^2)\,T_n''(x) - x\,T_n'(x) + n^2\,T_n(x) = 0$ nous obtenons

$$A_{n,\nu} = 0 \quad , \quad B_{n,\nu} = e^{i(\nu-1)\frac{\pi}{2}}\,\frac{n}{2}\left(\frac{\sqrt{\rho_\nu^2-\cos^2\frac{\varphi_\nu}{2}}}{\sin\frac{\varphi_\nu}{2}} + 1\right),$$

d'où

$$P'_{n,v}(e^{i\varphi_v}) = e^{iv\frac{\pi}{2}}\,\frac{n}{2}\left(\frac{\sqrt{\rho_v^2-\cos^2\frac{\varphi_v}{2}}}{\sin\frac{\varphi_v}{2}} + 1\right)$$

Maintenant soit v pair. Dans ce cas, les formules (II–3), (II–13), (II–15) et l'équation différentielle que l'on vient de citer nous conduisent à

$$B_{n,v} = 0 \quad , \quad P'_{n,v}(e^{i\varphi_v}) = A_{n,v} = e^{iv\frac{\pi}{2}}\,\frac{n}{2}\left(\frac{\sqrt{\rho_v^2-\cos^2\frac{\varphi_v}{2}}}{\sin\frac{\varphi_v}{2}} + \frac{\sqrt{1-\rho_v^2}}{n}\,T'_n(\rho_v)\right).$$

Le lemme est ainsi démontré.

II–4. Preuve du théorème II

Soit $n \in \mathbb{N}$ et v un entier dans $[1, 2n-1]$. De plus soit $p \in \mathcal{P}^*_{n,1}$. Par la formule d'interpolation de Lagrange

$$p(z) = \sum_{k=1}^{n+1} p(z_k)L_k(z) = \sum_{k=1}^{n} p(z_k)\,L_k(z)\,,\ z_k = e^{i\theta_k}\ \ (1 \le k \le n)\,,\ z_{n+1} = 1 \quad \text{(II–16)}$$

avec

$$L_k(z) = \frac{z-1}{z_k-1}\prod_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{n}\frac{z-z_m}{z_k-z_m}$$

et $z_k = e^{i\theta_k}$, $1 \le k \le n$ sont les n points sur le cercle unité où $|P_{n,v}(z)|$ atteint son maximum . De (II–16) il suit

$$p'(e^{i\varphi_\nu}) = \sum_{k=1}^{n} p(e^{i\theta_k})\, L_k'(e^{i\varphi_\nu}) \quad , 1 \le \nu \le 2n-1 . \tag{II–17}$$

Puisque θ_k $(1 \le k \le n)$ sont les zéros de $\omega_{n,\nu}(\theta)$ on a

$$L_k(e^{i\theta}) = \frac{e^{in\frac{\theta}{2}} \sin\frac{\theta}{2}}{e^{in\frac{\theta_k}{2}} \sin\frac{\theta_k}{2}} \; \frac{\omega_{n,\nu}(\theta)}{2\sin\frac{\theta-\theta_k}{2}\; \omega_{n,\nu}'(\theta_k)}$$

et alors

$$L_k'(e^{i\theta}) = -\frac{i\, e^{i(\frac{n}{2}-1)\theta}}{2e^{i\frac{n}{2}\theta_k} \sin\frac{\theta_k}{2}\; \omega_{n,\nu}'(\theta_k)} \left\{ \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2} \frac{\omega_{n,\nu}(\theta)}{\sin\frac{\theta-\theta_k}{2}} + \right.$$

$$\left. \left(\frac{\omega_{n,\nu}(\theta)}{\sin\frac{\theta-\theta_k}{2}} \right)' \sin\frac{\theta}{2} + i\frac{n}{2} \sin\frac{\theta}{2} \frac{\omega_{n,\nu}(\theta)}{\sin\frac{\theta-\theta_k}{2}} \right\} \tag{II–18}$$

Nous démontrerons tout d'abord les propriétés suivantes: *si* ν *est impair*, *alors*

$$L_k'(e^{i\varphi_\nu}) = e^{i\nu\frac{\pi}{2}}\, \overline{P_{n,\nu}(e^{i\theta_k})}\, |\, L_k'(e^{i\varphi_\nu})\, | \qquad (k = 1,\dots, n), \tag{II–19}$$

tandis que si ν *est pair*

$$L_k'(e^{i\varphi_\nu}) = e^{i(\frac{\nu}{2}+1)\pi}\, \overline{P_{n,\nu}(e^{i\theta_k})}\, |\, L_k'(e^{i\varphi_\nu})\, | \qquad (k = 1,\dots, n). \tag{II–20}$$

On remarque en premier lieu que $\omega_{n,\nu}'(\theta_k) = (-1)^k\, |\, \omega_{n,\nu}'(\theta_k)\, |$ $\quad (1 \le k \le n)$.

En effet, puisque $\omega_{n,\nu}(\theta_1) = 0$ et $\omega_{n,\nu}(0) > 0$ alors $\omega'_{n,\nu}(\theta_1) < 0$. Le même raisonnement montre que $\omega'_{n,\nu}(\theta_2) > 0$, $\omega'_{n,\nu}(\theta_3) < 0$,... etc. Ainsi, $\omega'_{n,\nu}(\theta)$ change de signe en $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ respectivement.

Soit ν impair. Nous distinguerons trois cas :

Cas (i). $1 \le k \le \frac{\nu+1}{2} - 1$. Alors, $\varphi_\nu \neq \theta_k$ et d'après (II–10) et (II–13) $\omega_{n,\nu}(\varphi_\nu)=0$.

D'autre part, un simple calcul montre que

$$\frac{\omega_{n,\nu}(\theta)}{\sin\frac{\theta-\theta_k}{2}} = \frac{1-\rho_\nu^2}{n^2}\, T'_n(\rho_\nu)\, \frac{\sin\frac{\varphi_\nu-\theta}{2}}{\sin\frac{\varphi_\nu}{2}}\; \frac{T'_n(\xi_{n,\nu}(\theta))}{\sin\frac{\theta-\theta_k}{2}},$$

$$\left(\frac{\omega_{n,\nu}(\theta)}{\sin\frac{\theta-\theta_k}{2}}\right)'\Bigg|_{\theta=\varphi_\nu} = e^{i(\nu+1)\frac{\pi}{2}}\, \frac{\rho_\nu\sqrt{1-\rho_\nu^2}}{2\sin\frac{\varphi_\nu}{2}\,\sin\frac{\varphi_\nu-\theta_k}{2}\sqrt{\rho_\nu^2-\cos^2\frac{\varphi_\nu}{2}}}.$$

D'où, d'après (II–18)

$$L'_k(e^{i\varphi_\nu}) = -\, e^{i\frac{\pi}{2}}\, e^{i(\frac{n}{2}-1)\varphi_\nu}\, e^{-i\frac{n}{2}\theta_k}\,(-1)^k\, e^{i(\nu+1)\frac{\pi}{2}}\; \frac{\rho_\nu\sqrt{1-\rho_\nu^2}}{4|\omega'_{n,\nu}(\theta_k)|\,\sin\frac{\theta_k}{2}\,\sin\frac{\varphi_\nu-\theta_k}{2}\sqrt{\rho_\nu^2-\cos^2\frac{\varphi_\nu}{2}}}$$

$$= e^{i\nu\frac{\pi}{2}}(-1)^k\, e^{i(\frac{n}{2}-1)\varphi_\nu}\, e^{-i\frac{n}{2}\theta_k}\,|\,L'_k(e^{i\varphi_\nu})\,|$$

$$= e^{i\nu\frac{\pi}{2}}\,\overline{P_{n,\nu}(e^{i\theta_k})}\,|\,L'_k(e^{i\varphi_\nu})\,| \qquad \text{par le lemme II–3.}$$

Cas (ii) . $k=\frac{\nu+1}{2}$. Dans ce cas $\theta_{\frac{\nu+1}{2}}=\varphi_\nu$ et $\dfrac{\omega_{n,\nu}(\theta)}{\sin\frac{\theta-\varphi_\nu}{2}}=-\dfrac{\sqrt{1-\rho_\nu^2}}{n\sin\frac{\varphi_\nu}{2}}\,T_n'(\xi_{n,\nu}(\theta))$,

d'où

$$\left(\frac{\omega_{n,\nu}(\theta)}{\sin\frac{\theta-\varphi_\nu}{2}}\right)_{\Big|\theta=\varphi_\nu}=e^{i(\nu+1)\frac{\pi}{2}}\frac{\rho_\nu\sqrt{1-\rho_\nu^2}}{\sin\frac{\varphi_\nu}{2}\sqrt{\rho_\nu^2-\cos^2\frac{\varphi_\nu}{2}}}\,,$$

et

$$\left(\frac{\omega_{n,\nu}(\theta)}{\sin\frac{\theta-\varphi_\nu}{2}}\right)'_{\Big|\theta=\varphi_\nu}=(-1)^{\frac{\nu+1}{2}}\frac{\rho_\nu\sqrt{1-\rho_\nu^2}}{\sin\frac{\varphi_\nu}{2}\sqrt{\rho_\nu^2-\cos^2\frac{\varphi_\nu}{2}}}\,\frac{\xi_{n,\nu}(\varphi_\nu)\,\xi'_{n,\nu}(\varphi_\nu)}{1-\xi^2_{n,\nu}(\varphi_\nu)}$$

$$=-e^{i(\nu+1)\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\frac{\varphi_\nu}{2}}{2\sin^2\frac{\varphi_\nu}{2}}\,\frac{\rho_\nu\sqrt{1-\rho_\nu^2}}{\sqrt{\rho_\nu^2-\cos^2\frac{\varphi_\nu}{2}}}\,.$$

De la formule (II–18) et des deux dernières relations il découle

$$L_k'(e^{i\varphi_\nu})=e^{-i\varphi_\nu}\frac{n\rho_\nu\sqrt{1-\rho_\nu^2}}{4|\omega'_{n,\nu}(\varphi_\nu)|\,\sin\frac{\varphi_\nu}{2}\sqrt{\rho_\nu^2-\cos^2\frac{\varphi_\nu}{2}}}$$

$$=e^{-i\varphi_\nu}\,|\,L_k'(e^{i\varphi_\nu})\,|$$

$$=e^{i\nu\frac{\pi}{2}}\,\overline{P_{n,\nu}(e^{i\varphi_\nu})}\,|\,L_k'(e^{i\varphi_\nu})\,|\qquad\text{par le lemme II–3.}$$

Cas (iii) . $\frac{\nu+1}{2}+1 \leq k \leq n$. Comme dans le cas (i) , on a $\omega_{n,\nu}(\varphi_\nu)=0$ et $\varphi_\nu \neq \theta_k$.

Alors ,

$$\left(\frac{\omega_{n,\nu}(\theta)}{\sin\frac{\theta-\theta_k}{2}}\right)'_{\theta=\varphi_\nu} = e^{i(\nu-1)\frac{\pi}{2}} \frac{\rho_\nu\sqrt{1-\rho_\nu^2}}{2\sin\frac{\varphi_\nu}{2}\sin\frac{\theta_k-\varphi_\nu}{2}\sqrt{\rho_\nu^2-\cos^2\frac{\varphi_\nu}{2}}}$$

et

$$L_k'(e^{i\varphi_\nu}) = e^{i\nu\frac{\pi}{2}}(-1)^{k-1} e^{i(\frac{n}{2}-1)\varphi_\nu} e^{-i\frac{n}{2}\theta_k} \frac{\rho_\nu\sqrt{1-\rho_\nu^2}}{4|\omega_{n,\nu}'(\theta_k)|\sin\frac{\theta_k}{2}\sin\frac{\theta_k-\varphi_\nu}{2}\sqrt{\rho_\nu^2-\cos^2\frac{\varphi_\nu}{2}}}$$

$$= e^{i\nu\frac{\pi}{2}}(-1)^{k-1} e^{i(\frac{n}{2}-1)\varphi_\nu} e^{-i\frac{n}{2}\theta_k} |L_k'(e^{i\varphi_\nu})|$$

$$= e^{i\nu\frac{\pi}{2}} \overline{P_{n,\nu}(e^{i\theta_k})} |L_k'(e^{i\varphi_\nu})| \qquad \text{par le lemme II–3.}$$

Maintenant soit ν pair . De (II–10) et (II–13) on tire

$$\omega_{n,\nu}(\varphi_\nu) = e^{i\nu\frac{\pi}{2}} T_n(\rho_\nu) \quad , \quad \omega_{n,\nu}'(\varphi_\nu) = 0 ,$$

$$\left(\frac{\omega_{n,\nu}(\theta)}{\sin\frac{\theta-\theta_k}{2}}\right)'_{\theta=\varphi_\nu} = -\frac{\cos\frac{\varphi_\nu-\theta_k}{2}}{2\sin^2\frac{\varphi_\nu-\theta_k}{2}} e^{i\nu\frac{\pi}{2}} T_n(\rho_\nu) .$$

Alors ,

$$L_k'(e^{i\varphi_\nu}) = e^{i(\frac{\nu}{2}+1)\pi}(-1)^k e^{i(\frac{n}{2}-1)\varphi_\nu} e^{-i\frac{n}{2}\theta_\kappa} \frac{-n\sin\frac{\varphi_\nu}{2}\sin\frac{\varphi_\nu-\theta_k}{2} - i\sin\frac{\theta_k}{2}}{\sqrt{n^2\sin^2\frac{\varphi_\nu}{2}\sin^2\frac{\varphi_\nu-\theta_k}{2}+\sin^2\frac{\theta_k}{2}}}$$

$$\frac{T_n(\rho_\nu)\sqrt{n^2\sin^2\frac{\varphi_\nu}{2}\sin^2\frac{\varphi_\nu-\theta_k}{2}+\sin^2\frac{\theta_k}{2}}}{4|\omega_{n,\nu}'(\theta_k)|\sin\frac{\theta_k}{2}\sin^2\frac{\varphi_\nu-\theta_k}{2}}$$

$$= e^{i(\frac{\nu}{2}+1)\pi}\,\overline{P_{n,\nu}(e^{i\theta_k})}\,|L_k'(e^{i\varphi_\nu})| \qquad \text{par le lemme II–3 .}$$

Appliquons finalement l'interpolation de Lagrange à $P_{n,\nu}$. De l'égalité

$$P_{n,\nu}(z) = \sum_{k=1}^{n} P_{n,\nu}(e^{i\theta_\kappa})\, L_k(z)$$

il découle , pour ν impair ,

$$P_{n,\nu}'(e^{i\varphi_\nu}) = \sum_{k=1}^{n} P_{n,\nu}(e^{i\theta_\kappa})\, L_k'(e^{i\varphi_\nu})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} e^{i\nu\frac{\pi}{2}} \frac{\overline{L_k'(e^{i\varphi_\nu})}}{|L_k'(e^{i\varphi_\nu})|} L_k'(e^{i\varphi_\nu}) \qquad \text{par (II–19)}$$

$$= e^{i\nu\frac{\pi}{2}} \sum_{k=1}^{n} |L_k'(e^{i\varphi_\nu})| \,, \tag{II–21}$$

et , pour ν pair ,

$$P_{n,\nu}'(e^{i\varphi_\nu}) = \sum_{k=1}^{n} e^{i(\frac{\nu}{2}+1)\pi} \frac{\overline{L_k'(e^{i\varphi_\nu})}}{|L_k'(e^{i\varphi_\nu})|} L_k'(e^{i\varphi_\nu}) \qquad \text{par (II–20)}$$

$$= e^{i(\frac{\nu}{2}+1)\pi} \sum_{k=1}^{n} | L_k'(e^{i\varphi_\nu}) | . \qquad \text{(II–22)}$$

Par conséquent, d'après (II–17), on obtient

$$| p'(e^{i\varphi_\nu}) | \le \sum_{k=1}^{n} | p(e^{i\theta_k}) | \, | L_k'(e^{i\varphi_\nu}) |$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} | L_k'(e^{i\varphi_\nu}) |$$

$$= | P_{n,\nu}'(e^{i\varphi_\nu}) | \qquad \text{par (II–21) ou (II–22)},$$

ce qui, avec le lemme II–4, démontre le résultat (II–6) énoncé dans le théorème II.

Il reste enfin à prouver que l'égalité a lieu si et seulement si $p = e^{i\gamma} P_{n,\nu}$, avec $\gamma \in \mathbb{R}$. Si $p = e^{i\gamma} P_{n,\nu}$ il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que

$$| p'(e^{i\varphi_\nu}) | = | P_{n,\nu}'(e^{i\varphi_\nu}) | ,$$

i.e.

$$\left| \sum_{k=1}^{n} p(e^{i\theta_k}) L_k'(e^{i\varphi_\nu}) \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} P_{n,\nu}(e^{i\theta_k}) L_k'(e^{i\varphi_\nu}) \right|$$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} p(e^{i\theta_k}) L_k'(e^{i\varphi_\nu}) \right| = \sum_{k=1}^{n} | L_k'(e^{i\varphi_\nu}) | \qquad \text{par (II–21) ou (II–22)}$$

Cette dernière égalité a lieu si et seulement si

$$p(e^{i\theta_k}) = \varepsilon \frac{\overline{L_k'(e^{i\varphi_\nu})}}{| L_k'(e^{i\varphi_\nu}) |} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \text{ avec } | \varepsilon | = 1.$$

Par conséquent, d'après (II–19) et (II–20),

$$p(e^{i\theta_k}) = \varepsilon\, e^{-i\nu\frac{\pi}{2}}\, P_{n,\nu}(e^{i\theta_k}) \qquad (k = 1,\ldots, n)\,,$$

ou

$$p(e^{i\theta_k}) = \varepsilon\, e^{-i(\frac{\nu}{2}+1)\pi}\, P_{n,\nu}(e^{i\theta_k}) \qquad (k = 1,\ldots, n)\,;$$

de plus ,

$$p(1) = P_{n,\nu}(1) = 0\,.$$

D'où

$$p = \varepsilon\, e^{-i\nu\frac{\pi}{2}}\, P_{n,\nu} \qquad \text{ou} \qquad p = \varepsilon\, e^{-i(\frac{\nu}{2}+1)\pi}\, P_{n,\nu}\,,$$

ce qui compléte la preuve du théorème .

REMARQUE II–4. Si $\nu = n$ et n est impair alors $\rho_\nu = \cos\frac{\pi}{2n}$ et $\varphi_\nu = \pi$. On voit alors facilement que $P_{n,\nu}$ coïncide avec le polynôme P défini par (II–5) .

CONCLUSION

Dans le chapitre I de la thèse nous avons obtenu des réponses satisfaisantes au problème posé pour toutes les valeurs de k sauf pour $k = 2$. Ce cas qui reste à étudier sera un projet intéressant et nous souhaitons l'entreprendre dans le cadre d'une recherche postdoctorale.

Dans le chapitre II on a trouvé , pour un ensemble de points $z_{n,\nu}$, $\nu = 1,\ldots,2n-1$, le supremum de $|p'(z_{n,\nu})|$ pour tous les polynômes de degré n s'annulant en $z = 1$ et tels que $|p(z)| \leq 1$ sur $|z| = 1$. Il serait intéressant de trouver le supremum en tout point du cercle unité.

BIBLIOGRAPHIE

[1]. **R. J. Duffin and A. C. Schaeffer,** *A refinement of an inequality of the brothers Markoff,* Trans. Amer. Math. Soc. **50** (1941), 517–528.

[2]. **C. Frappier, Q. I. Rahman and St. Ruscheweyh ,** *On polynomials with a prescribed zero ,* Constr. Approx. 2 (1986) , 171 – 177.

[3]. **A. Giroux and Q. I. Rahman ,** *Inequalities for polynomials with a prescribed zero ,* Trans. Amer. Math. Soc. **193** (1974) , 67 – 98.

[4]. **W. A. Markoff,** *Über Polynome, die in einem gegebenen Intervalle möglichst wenig von Null abweichen,* Math. Ann. **77** (1916), 218–258.

[5]. **R. Pierre and Q. I. Rahman,** *On a problem of Turán about polynomials* II, Canad. J. Math. **33** (1981), 701–733.

[6]. **R. Pierre and Q. I. Rahman,** *On a problem of Turán about polynomials* III, Canad. J. Math. **34** (1982), 888–899.

[7]. **R. Pierre, Q. I. Rahman and G. Schmeisser,** *On polynomials with curved majorants,* J. Approximation Theory **57** (1989), 211–222.

[8]. **Q. I. Rahman,** *On a problem of Turán about polynomials with curved majorants ,* Trans. Amer. Math. Soc. **163** (1972), 447–455.

[9]. **Q. I. Rahman and G. Schmeisser,** *Markov – Duffin – Schaeffer inequality for polynomials with a circular majorant* , Trans. Amer. Math. Soc. **310** (1988), 693–702.

[10]. **T. J. Rivlin,** *Chebyshev polynomials: from approximation theory to algebra and number theory*, 2nd ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1990.

REMERCIEMENTS

Je voudrais exprimer toute ma gratitude au professeur Q. I. Rahman qui m'a fait profiter de son immense expérience. Il m'a guidé durant toutes ces années dans le domaine exigeant de la recherche. J'ai beaucoup appris avec lui , non seulement sur le plan des connaissances mathématiques mais aussi sur celui de la persévérance et de la rigueur dans le travail. Je voudrais aussi lui témoigner ma reconnaissance pour le support moral et financier qu'il m'a apporté pendant des périodes difficiles que j'ai eu à traverser.

J'ai eu de multiples consultations avec Mr P. Olivier au sujet du problème considéré au chapitre II . Je lui exprime mes sincères remerciements pour sa collaboration . J'apprécie la patience et le soutien de ma famille durant ces années d'absence. J'adresse également mes remerciements aux familles Diallo, Diop , Guèye , Marcoux , Olivier , Pam et Tardif pour leur amitié avec une mention spéciale pour Mme Hélène Tardif

Enfin , à tous ceux qui , de près ou de loin , ont contribué à l'aboutissement de ce projet je dis merci.