UNIVERSITÉ D'ETAT DE LÉNINGRAD
=:=:=:=:=:=:=:=:=:=:=:=:=:=:=:=:=

DIALLO Boubacar

Distributions de probabilités dans les espaces des suites

01.01.05 - Théorie des probabilités et
Statistique mathématique

Thèse en vue de
l'obtention du
grade de candidat es-sciences

Directeur de Thèse
Docteur ès-sciences
V.N. Sudakov

TABLE DES MATIÈRES

Pages

INTRODUCTION

La présente thèse est consacrée à l'étude de deux problèmes liés aux distributions de probabilité dans les espaces de suites.

Primo, on montre que pour $1 \leq p \leq 2$, pour chaque mesure de probabilité dans l'espace l_p, il existe un sous espace hilbertien $H \subset l_p$ de mesure unité. De là en particulier à l'aide du théorème de Minlos - Sazonov on peut immédiatement obtenir un critère pour la vérification de la possibilité du prolongement en une mesure dans les espaces l_p des distributions faibles. On montre aussi que pour $p > 2$ il est impossible de formuler un critère de prolongement d'une distribution faible en une mesure dans l'espace l_p en termes de continuité de la fonctionnelle caractéristique dans une certaine topologie. Secundo on établit l'alternative équivalence - singularité pour une paire de mesures gaussiennes dans l'espace vectoriel E, factorisées au préalable selon une partition de l'espace en rayons (concrêtement les mesures considérées sont interprêtées comme les distributions relatives à des suites de variables aléatoires gaussiennes indépendantes).

La nécessité de considérer des mesures dans les espaces vectoriels a surgi au départ lors de l'étude des processus aléatoires, étant donné que tout processus aléatoire peut-être interprété comme une mesure de probabilité dans l'espace des trajectoires. Les premières constructions de mesures dans les espaces fonctionnels et les premiers théorèmes sur les processus aléatoires (les travaux de Wiener en 1923, [8], les théorèmes de Kolmogorov sur les trois séries, les théorèmes sur la continuité des trajectoires, la loi du logarithme itéré, le théorème de Kolmogorov en 1933 sur le prolongement d'un système de repartitions cohérentes de dimensions finies jusqu'à une mesure, [25] , etc...) peuvent être interprétés comme des théorèmes sur l'existence de mesures de probabilité dans tel ou tel espace vectoriel.

Une des branches les plus anciennes et des plus élaborées de la théorie des probabilités est constituée par le domaine des théorèmes limites (loi forte des grands nombres, théorème central limite,...). Une formulation précise de cette classe de problèmes et leur résolution complète conduisent inévitablement à l'introduction de mesures de probabilités dans les espaces de suites. Ces espaces - généralisation naturelle des espaces de dimension finie - furent l'objet de recherches intenses de Frechet, lusin et Levy dans les années vingt.

Le premier essai de construction sous une forme explicite d'une mesure dans l'espace des suites apparut en 1909 dans un travail de Borel [1] dans lequel on étudie à l'aide de méthodes probabilistes les propriétés de la décomposition dyadique de tout nombre appartenant à l'intervalle [0,1]. Un peu plus tard en 1923, Steinhauss [47] démontra rigoureusement les résultats de Borel et construisit une mesure de probabilités (isomorphe à la mesure de Lebesgue sur le segment [0,1]) correspondant au shéma de Bernoulli à 2 issues équiprobables. A cette fin, Steinhauss utiliser le travail de Daniell [15] sur la construction de mesures un un espace de dimension infinie. La méthode de Daniell fut redecouverte en 1934 par Jessen [21].

Plusieurs concepts de la théorie de la mesure dans les espaces fonctionnels, en particulier celui de fonctionnelle caractéristique furent introduits [26] par Kolmogorov et remontent aux années 30. Cependant le développement systématique de la théorie de la mesure dans les espaces vectoriels débute son histoire à partir du moment où fut fondée la théorie des processus aléatoires. A cet effet il est important de souligner la grande influence qu'à joué le celèbre Chef d'Oeuvre de Doob "Processus stochastiques" dans le processus de cristallisation du concept de théorie de la mesure dans les espaces vectoriels de dimension infinie. Dans les années 50 fut également fondée la théorie des espaces localement convexes et en liaison étroite avec cette dernière celle des distributions de L. Schwartz. Il fut également introduit le concept stimulant de processus aléatoire généralisé dans un cycle de travaux de Gelfand [11] et K. Ito [22]. Enfin dans les années 40 fut développé l'appareil de la classe la plus usitée d'espaces munis d'une mesure, appelés fréquemment espaces de Lebesgue dont la théorie fut élaborée par Rokhlin [37].

Simultanément apparut la nécessité d'une théorie de la mesure dans les espaces de dimension infinie indépendamment de la théorie des probabilités et la statistique mathématique dans différents domaines de la mathématique et de la physique (théorie des opérateurs, physique mathématique, en particulier la théorie des équations aux dérivées partielles). Plusieurs problèmes de la physique liés au comportement de systèmes ayant un nombre infini de degrés de liberté (théorie du champ, théorie quantique du corps solide, mécanique statistique) conduisent à des expressions qui peuvent être interprétées comme des intégrales selon une certaine mesure dans tel ou tel espace fonctionnel. Déjà dans la première édition parue en 1922 de la monographie de P. Levy "Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle" [29], on rencontre un grand nombre d'exemples de cette sorte, qui constituent un grand intérêt pour un développement ultérieur de l'analyse mathématique dans les espaces fonctionnels. Un point de une analogue est reflété dans une publication récente de A.V. Skorohod "Intégration dans l'espace de Hilbert" [39], au sein de laquelle on généralise certains concepts et certains résultats de l'analyse mathématique classique comme par exemple la formule de Gauss.

Les difficultés qui surgissent lors de l'étude de mesures dans les espaces de dimension infinie sont avant tout liées à l'inexistence de la propriété de compacité locale. Il n'existe aucune mesure standard semblable à la mesure de Haar sur les groupes localements compacts, à l'aide de laquelle, on aurait pu donner d'autres mesure par leurs densités.

Le caractère spécifique des mesures dans les espaces de dimension infinie réside en particulier dans le fait qu'il est pratiquement impossible de mettre en évidence un sous-espace vectoriel propre de mesure unité.

Dans cette thèse on étudie les mesures de probabilités dans les espaces des suites $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$ i.e. des fonctions d'ensembles non négatives, dénombrablement additives et normées (la mesure de tout l'espace est égale à l'unité). Les mesures gaussiennes seront notées $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \ldots$; comme d'habitude l'espace hilbertien abstrait sera noté H. Les symboles l, l_p, C_o, et $c = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$ représenteront les espaces de suites. $\mathbb{R}^T$ désignera l'espace-produit de droites réelles numérotées à l'aide des éléments de l'ensemble T ; $\mathbb{R}^n$ représentera l'espace euclidien de dimension n. Si M est un sous-ensemble d'un certain espace vectoriel, $\mathcal{L}$ M désignera l'enveloppe linéaire de M.

Dans le premier chapitre de ce travail, on rappelle certaines définitions utilisées par la suite ; on précise le sens de certains concepts et on établit un certain nombre de résultats préliminaires autour de l'usage desquels il n'existe pas de tradition communément admise.

Le second chapitre est consacré à l'étude des propriétés des mesures de probabilités dans les espaces l_p, pour $p \geq 1$, c'est-à-dire à l'étude des propriétés des trajectoires d'un processus aléatoire. Le premier théorème relatif à la possibilité de prolongement d'une distribution faible jusqu'en une mesure dans un espace vectoriel concret, l'espace de toutes les fonctions sur un ensemble paramétrique fut le théorème de Kolmogorov [25] permettant de parler des trajectoires en général. Ainsi nous donnons une nouvelle formulation font commode du théorème de Minlos - Sazonov et nous demontrons son équivalence avec la forme due à Sazonov. Un autre résultat nouveau donné dans ce chapitre est le suivant : dans un espace de Banach séparable muni d'une mesure gaussienne centrée, toute boule de rayon strictement positif est de mesure positive.

D'autres propositions de ce chapitre permettent de mieux caractériser les propriétés des sous-espaces hilbertiens d'espace vectoriels topologiques. La plupart sont nouveaux.

A la fin des années 50 des efforts furent entrepris en vue d'obtenir des critères sur la possibilité de prolongement d'une distribution faible en une mesure dans un espace localement convexe en termes de continuité de la fonctionnelle caractéristique χ de la distribution faible considérée dans telle ou telle topologie, définie comme une topologie de E. Ces efforts aboutirent à un succès dans 2 cas voisins : lorsque E est un espace hilbertien (V.V. Sazno [38] - utilisant un résultat de Prohorov) et lorsque E est un espace conjugué à un espace dénombrablement hilbertien nucléaire (Minlos [32] démontrant une hypothèse de Gelfand).

Dans le cas des distributions faibles gaussiennes dans les espaces l_p , fut décrite une topologie sur l'espace conjugué, dans laquelle la continuité de la fonctionnelle caractérisque est nécessaire et suffisante pour le prolongement de la distribution faible en une mesure (Vakhania [3]). Les résultats du second chapitre précisent les propriétés des mesures de probabilités dans les espaces l_p. On démontre que pour $1 \leq p \leq 2$, pour chaque mesure de probabilité dans l_p , il existe un sous-espace hilbertien H l_p de mesure unité. Pour le cas $p > 2$, dans chaque espace l_p, $p > 2$, on construit une mesure gaussienne qui n'est concentrée sur aucun sous-espace hilbertien ; on donne aussi des exemples de mesures essentiellement non gaussiennes dotées de propriétés analogues. Mieux, pour chaque $p > 2$, on montre qu'un théorème type Minlos-Sazonov n'est pas possible : il n'existe pas de topologie sur l'espace conjugué telle que la continuité de la fonctionnelle caractéristique d'une distribution faible dans cette topologie soit nécessaire et suffisante pour que cette fonctionnelle caractéristique soit la transformée de Fourier d'une certaine mesure dénombrablement additive dans l_p .

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de l'équivalence et de la singularité des images de deux mesures gaussiennes quelconques γ_o et γ_1 dans l'espace vectoriel E (que l'on peut considérer comme coïncidant avec l'espace des suites) selon une application spéciale non linéaire. Plus précisément, supposons que l'application considérée fasse correspondre à tout point de l'espace E un élément d'un certain espace Ω , de telle sorte qu'à deux éléments distincts x et y correspond un même élément de l'espace Ω si et seulement si il existe un nombre positif λ, tel que $x = \lambda y$ et la σ - algèbre sur Ω est la plus fine σ - algèbre par rapport à laquelle l'application considérée est mesurable. (Une telle situation se présente par exemple dans le problème de vérification d'hypothèses statistiques, lorsque l'oservation de la trajectoire du processus aléatoire est supposée être connue à une constante positive multiplicative près). Naturellement l'équivalence des mesures γ_o et γ_1 implique l'équivalence de leurs images ; cependant le contraire n'est pas vrai et ainsi se pose la question de l'établissement d'un critère d'équivalence des mesures images de γ_o et γ_1 ainsi que la question selon laquelle l'alternative "équivalence ou singularité" pour les images des mesures γ_o et γ_1 a-t-elle lieu, comme c'est le cas pour les mesures gaussiennes ([9] et [49]).

Le troisième chapitre donne une réponse complète à ces questions. On démontre que l'alternative ci-dessus a effectivement lieu et que les mesures images de γ_o et γ_1 sont équivalentes si et seulement s'il existe une homothétie de l'une de ces mesures (supposées centrées) laquelle transforme cette mesure en une autre mesure équivalente à la deuxième. Autrement dit les images des mesures γ_0 et γ_1 sont équivalentes si et seulement si parmi toutes les mesures gaussiennes dont les images par l'application non linéaire considérée ci-dessus coïncident avec l'image de γ_1 , on en trouve une équivalente à γ_0 . De ce résultat en particulier, peuvent être facilement déduits les théorèmes de Kosin sur les mélanges de mesures gaussiennes [28]. Dans le dernier paragraphe de ce chapitre on trouve des formules pour la densité des mesures factorisées.

Les résultats de ce travail ont été exposés au séminaire du laboratoire des méthodes statistiques de L O M I (Institut de Mathematiques de l'Académie des Sciences de l'URSS, section de Leuingrad) et à une séance de travail de la chaire de théorie des probabilités et de statistique mathématique de l'Université d'Etat de Leningrad. Les résultats des deuxièmes et troisième chapitres ont été publiés [18], [18 bis], Chapitre I

Notions préliminaires

§.1. Sous-espaces hilbertiens d'espaces vectoriels

1. Définitions fondamentales

Définition 1

Un sous-ensemble $\mathcal{E} \subset H$ d'un espace hilbertien H est appelé ellipsoïde, si $\mathcal{E}$ est l'image de la boule unité $V_H \subset H$ par une application linéaire (continue) $A : H \longrightarrow H$.
Chaque ellipsoïde est un ensemble faiblement compact.

Si on considère un ellipsoïde comme la boule unité de son enveloppe linéaire, alors cette enveloppe linéaire se transforme en espace hilbertien (canoniquement isomorphe à l'espace - quotient de l'espace selon le noyau de l'application A).

Définition 2

L'ellipsoïde $\mathcal{E} \subset H$ est appelé ellipsoïde de type Hilbert-Shmidt, s'il est l'image de la boule unité de l'espace H par une certaine application de $H \longrightarrow H$ de type Hilbert-Shmidt.

Si est un ellipsoïde compact, alors il existe une suite orthonormée $\{e_k\}$ $K = 1,2,\dots$ d'éléments de l'espace H ainsi qu'une suite de nombres $\{C_K \downarrow 0 \ , \ k = 1,2,\dots\}$ telles que

$$\mathcal{E} = \left\{ x \in H \ : \ \sum_{K=1}^{\infty} \frac{(x_1 e_K)^2}{C_K^2} \leq 1 \right\}$$

est un ellipsoïde de type Hilbert. Schmidt si et seulement si

$$\sum_{K=1}^{\infty} C_K^2 < \infty \ .$$

Les directions des vecteurs e_k sont appelées directions des axes principaux de l'ellipsoïde (elles sont définies de façon biunivoque si $C_i \neq C_K$ pour $i \neq k$), et les nombres C_k sont appelés longueurs des demi-axes de l'ellipsoïde par analogie avec le cas de dimension finie.

Nous allons également considérer les polaires $\mathcal{E}^\circ$ relatives aux ellipsoïdes $\mathcal{E}$: $\mathcal{E}^\circ = \{x \in H : (x,y)_H \leq 1$ pour tous les $y \in \mathcal{E}\}$. La polaire $\mathcal{E}^\circ$ relative à l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ peut-être considérée comme un ellipsoïde (généralisé) ayant les mêmes directions des axes principaux que chez l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ et ayant pour longueurs des demi-axes les nombres C_k^{-1}. Bien entendu l'espace vectoriel normé $(\mathcal{L}\mathcal{E}^\circ, \|\cdot\|_{\mathcal{E}^\circ})$ avec l'ensemble $\mathcal{E}^\circ$ en guise de boule-unité n'est pas obligatoirement complet (et ne sera certainement pas complet si l'ensemble $\mathcal{E}^\circ$ n'est pas borné, c'est-à-dire si $\mathcal{E}$ n'est pas un voisinage de zéro dans H).

De manière analogue on définit le concept d'ellipsoïde dans un espace vectoriel topologique quelconque E.

Définition 3

Un sous-ensemble $\mathcal{E}$ d'un espace vectoriel topologique E est appelé ellipsoïde si $\mathcal{E}$ est l'image de la boule unité $V_H \subset H$ d'un espace hilbertien H par une certaine application linéaire (continue) $A : H \longrightarrow E$.

Tout comme dans le cas $\mathcal{E} \subset H$, chaque ellipsoïde transforme son enveloppe linéaire en espace hilbertien. Ainsi à chaque ellipsoïde $\mathcal{E} \subset E$ correspond un sous-espace H hilbertien dans sa propre norme de l'espace E avec une inclusion $H_{\mathcal{E}} \subset E$ continue.

Définition 4

On appelle sous-espace hilbertien de l'espace vectoriel topologique E tout sous-espace de E, image d'un espace hilbertien H par une application linéaire continue A de H dans E.

En passant en cas de nécessité à l'espace quotient de l'espace H selon le noyau de l'application A, nous trouvons que $AH \subset E$ est un espace hilbertien dans sa topologie propre (le sous-espace AH est isomorphe, compte-tenu du théorème d'isomorphisme, à l'espace hilbertien $H/A^{-1}(o)$). Cette remarque nous permet de donner une autre définition du sous-espace hilbertien.

Définition 5

On appelle sous-espace hilbertien d'un espace vectoriel normé E un sous-espace vectoriel H de E, enveloppe linéaire d'un certain sous-ensemble convexe, fermé et équilibré $\mathcal{E} \subset E$ qui devient un espace hilbertien, si on le munit de la norme suivante $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$

$$\|x\| = \inf\{\lambda : \lambda > 0 \quad , \quad x \in \lambda\mathcal{E}\}.$$

Un sous-ensemble $\mathcal{E}$ possédant la propriété indiquée est appelé ellipsoïde.

L'équivalence des définitions précédentes se démontre à l'aide de la proposition suivante :

Proposition 1

Si H est un sous-espace hilbertien d'un espace de Banach E, alors l'inclusion de H dans E est topologique.

Démonstration

Si H E est un sous-espace hilbertien de l'espace de Banach E, alors la sphère unité S de l'espace H est nécessairement continue à l'intérieur d'une certaine sphère de E. En effet l'espace de Banach E et le sous-espace hilbertien H admettent un système total de fonctionnelles continues (les fonctionnelles coordonnées), d'où résulte d'après un théorème de Makarov [31] , que l'inclusion de H dans E est topologique.

Proposition 2

Soit H un espace hilbertien $\mathcal{E} \subset H$ un ellipsoïde tel que la somme des carrés des longueurs de ses demi-axes est égale à l'unité - Soit f une application linéaire continue de H dans un certain espace hilbertien H_1, étant entendu que l'image de la sphère unité de H coïncide avec la sphère unité de H_1. Alors l'image de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ est un ellipsoïde $\mathcal{E}_1$ dans H_1 dont la somme des carrés des longueurs des demi-axes ne dépasse pas l'unité.

Démonstration

En effet on peut supposer que l'opérateur f est un projecteur orthogonal de H sur un certain sous-espace H_2 H, (orthogonal au noyau de l'application f) ; après cette remarque la proposition devient évidente compte-tenu du fait que la somme des carrés des longueurs des demi-axes de l'ellipsoïde

$$\mathcal{E}_1 \text{ vaut } \sum_k d_K^2 \text{ , où :}$$

$$d_K = \sup_{x \in \mathcal{E}} |(x,e_K)| ,$$

$\{e_k\}$ - une base orthogonale quelconque dans H.

(x,y) - le produit scalaire dans H.

2. Propriétés de certains ellipsoïdes dans l'espace l_1

Proposition 3

Soit dans la boule unité V_1 de l'espace l_1 un certain ellipsoïde (non nécessairement orienté) ; alors :

$$\sum_{K=1}^{\infty} a_K^2 \leq 1 \text{ , où}$$

a_K : longueurs des demi-axes de l'ellipsoïde (dans la norme l_2).

Démonstration

Soit dans l'espace $\mathbb{R}^n$ $(= l_2(n))$:

$\phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \dots , \phi^{(n)}$ une base orthonormée ne coïncidant pas nécessairement avec la base naturelle.

$a_1, a_2, \dots, a_n$, des nombres strictement positifs.

$\mathcal{E}^{(n)}$ - un ellipsoïde, paramétré sous la forme suivante :

$$\mathcal{E}^{(n)} = \left\{ x : x = \sum_{k=1}^{n} a_K C_K \phi^{(K)} , \sum_{K=1}^{n} C_K^2 \leq 1 \right\}$$

Dans ces conditions si :

$$\mathcal{E}^{(n)} \subset V_1^{(n)}(\subset l_1(n)), \quad \text{alors} \quad \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leq 1.$$

En effet considérons un point $x \in \mathcal{E}^{(n)}$:

$$x = \sum_{k=1}^{n} a_k C_k \phi^{(k)} = \sum_{k=1}^{n} a_k C_k \left(\sum_{i=1}^{n} \phi_i^{(k)} e_i^{(n)}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k C_k \phi_i^{(k)}\right) e_i^{(n)},$$

avec $e_i^{(n)} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{(i-1)\ \text{fois}}, 1, 0, \ldots 0)$

$(\phi_i^{(k)})$ représente une matrice orthogonale, c.a.d. $\sum_{i=1}^{n} \phi_i^{(k)} \phi_i^{l} = \delta_l^k$

(δ_l^k - le symbole de Kroneker).

En supposant que $x \in \mathcal{E}^{(n)}$ ($V_1^{(n)}$), nous aurons :

$$\|x\|_{l_1(n)} = \sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{k=1}^{n} a_k c_k \phi_i^{(k)}\right| \leq 1 .$$

Désignons par ε_i l'un quelconque des signes $\{-1,+1\}$ et par τ l'application de $\{1,2,\ldots, n\} \longrightarrow \{-1,+1\}$

$$i \longrightarrow \tau(i) = \varepsilon_i .$$

Dans ces conditions nous pouvons écrire :

$$\|x\|_{l_1(n)} = \sum_{i=1}^{n} \left|\tau(i) \sum_{k=1}^{n} a_k C_k \phi_i^{(k)}\right| = \sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{k=1}^{n} a_k C_k \tau(i) \phi_i^{(k)}\right| \leq 1 \quad ;$$

Mais

$$1 \geq \sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{k=1}^{n} a_k C_k \tau(i) \phi_i^{(k)}\right| \geq \left|\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_k C_k \tau(i) \phi_i^{(k)}\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n} C_k \left(a_k \sum_{i=1}^{n} \tau(i) \phi_i^{(k)}\right)\right|.$$

Etant donné que $\{C_k\}$ est une suite quelconque numérique telle que $\sum_{k=1}^{n} C_k^2 \leq 1$, il en résulte que

$$1 \geq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\tau(i)\phi_i^{(k)}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \left(1 + 2 \sum_{i<j} \tau(j)\phi_i^{(k)}\phi_j^{(k)}\right) ,$$

Soit :

$$1 \geq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \left(\sum_{i<j} \tau(i)\ \tau(j)\ \phi_i^{(k)}\ \phi_j^{(k)} \right) \quad (*)$$

En considérant toutes les 2^n applications τ, nous obtenons 2^n inégalités analogues à $(*)$ et après sommation membre à membre de ces 2^n inégalités $(*)$, nous trouvons :

$$2^n \geq 2^n \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \left(\sum_{\tau} \sum_{i<j} \tau(i)\tau(j)\phi_i^{(k)}\phi_j^{(k)} \right), \quad (**) .$$

En supposant i et j fixés, nous obtenons 2^{n-2} choix des signes $\tau(\cdot)$ et nous pouvons ainsi réalisé une partition de l'ensemble $S=\{\tau\}$ en quatre classes, ayant chacune 2^{n-2} éléments.

De sorte que pour chaque k fixé

$$\sum_{\tau} \tau(i)\ \tau(j)\ \phi_i^{(k)}\ \phi_j^{(k)} = 0 \qquad ***$$

De cette dernière relation il découle que

$$2^n \geq 2^n \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot 0 ,$$

soit $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leq 1$. C.Q.F.D.

Proposition 4

Soit dans l'espace l_1 une suite de points $\{x^{(k)}\}$; alors il existe un ellipsoïde $\mathcal{E}$ (non nécessairement orienté), contenu dans la boule unité V_1 de l'espace l_1 et une suite de nombres positifs $\{b_k\}$ tels que :

1. $b_k\ x^{(k)} \in \mathcal{E}$

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^{2p} < \infty$, où p est un nombre donné fixé à l'avance vérifiant $0 < p < 1$.

a_k - longueurs des demi-axes de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$.

Démonstration

La suite de points $\{x^{(k)}\}$ engendre un sous - espace vectoriel $l(\{x_k\})$ de l'espace l_1. On peut supposer que les points $\{x^k\}$ sont linéairement indépendants.

Ainsi au système $\{x^{(k)}\}$ on peut appliquer le procédé d'orthogonalisation de Schmidt et obtenir une base orthonormée dans l'espace $l(\{x^{(k)}\})$ dans la norme de l_2. Soit $\{\phi^{(k)}\}$ la base orthonormée ainsi obtenue.

A présent considérons un ellipsoïde $\mathcal{E}$ dont les axes principaux coïncident avec les directions définies par les vecteurs $\phi^{(k)}$, et désignons par a_k les longueurs des demi-axes de cet ellipsoïde dans la norme l_2. Choisissons a_k de telle manière que les conditions de la proposition 4 soient vérifiées.

Soit $x \in \mathcal{E}$ c'est-à-dire :

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k C_k \phi^{(k)} \qquad \text{(convergence dans } \|\cdot\|_{\mathcal{E}})$$

$$\|x^{(n)}\|_{l_1} \leq \sum_{k=1}^{n} a_k C_k \|\phi^{(k)}\|_{l_1}$$

Posons $_k = 2^{-k} \left(\|\phi^{(k)}\|\right)^{-1}$; alors

$$\|x\|_{l_1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |C_k| \, 2^{-k} \left(\|\phi^{(k)}\|_{l_1} \right)^{-1} . \|\phi^{(k)}\|_{l_1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1.$$

Par ailleurs

$$\sum_{k=1}^{\infty} {}_k^{2p} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-2kp} \left(\|\phi^{(k)}\|_{l_1} \right)^{-2p} \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-kp} = \frac{1}{2^p - 1} < \infty$$

Il reste à démontrer le premier point. Soit $\mathcal{L}\mathcal{E} = H_{\mathcal{E}}$; l'enveloppe linéaire de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$. $H_{\mathcal{E}}$ est un espace hilbertien muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$, avec :

$$\|x\|_{\mathcal{E}}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i^2}{a_i^2} , \quad \text{et} \quad x = \sum_i x_i \, \phi^{(i)} .$$

Chaque point $x^{(k)}$ est une combinaison linéaire de vecteurs $\phi^{(k)} \in H_{\mathcal{E}}$, d'où il résulte que $x^{(k)} \in H_{\mathcal{E}}$.

En posant $b_k = \|x^{(k)}\|_{\mathcal{E}}^{-1}$, nous trouvons immédiatement que $b_k \, x^{(k)} \in \mathcal{E} \; (\subset V_1)$.

C.Q.F.D.

Remarque

On peut montrer que l'ellipsoïde orienté dont les carrés des longueurs des demi-axes valent $a_k^2 = \sup|x_k^{(i)}|$ est tel que son enveloppe linéaire contient la suite de points $\{x^{(i)}\}$ contenus dans la boule unité de l'espace l_1 .

§.2. Distributions de probabilités dans l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$ et ses sous-espaces

1. Distributions dans $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$

Soit $\{\Omega,\mathfrak{U},P\}$ un espace de probabilité et $\xi = \{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ une suite aléatoire sur l'ensemble paramétrique $\mathbb{Z}_+$,. c.a.d une suite de variables aléatoires $\xi_n = \xi_n(\omega)$ de $\omega \in \Omega$.
Les variables aléatoires $\xi_n = \xi_n(\omega)$ qui sont des fonctions mesurables sur l'espace mesurable $\{\Omega,\mathfrak{U}\}$ définissent les valeurs de la suite aléatoire $\xi = \{\xi_n\}$. Pour chaque $\omega \in \Omega$ fixé, la suite réelle $\xi_\bullet(\omega) = \{\xi_n(\omega)\}$ de variable n est appelée trajectoire de la fonction aléatoire ξ $\{\xi_n\}$.

Désignons par $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$ l'espace de toutes les uites numériques définies sur l'ensemble paramétrique $\mathbb{Z}_+$. Ainsi toutes les trajectoires de la suite aléatoire $\xi = \{\xi_n\}$ appartiennent à l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$.

Notons $\mathfrak{A}_{\mathbb{Z}_+}$, la σ - algèbre minimale de sous-ensembles de l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$, engendrée par les ensembles cylindriques A de cet espace ; l'ensemble A est constitué de toutes les trajectoires ξ_n pour lesquelles les valeurs $[\xi_{n_1}, \xi_{n_2},\dots, \xi_{n_r}]$ prises aus aux points $n_1, n_2, \ldots, n_r$ de $\mathbb{Z}_+$ donnent un vecteur appartenant à un sous-ensembles borélien Γ de l'espace euclidien de dimension r, $\mathbb{R}^r$. Remarquons qu'un ensemble cylindrique constitué d'une seule trajectoire est mesurable, ce qui n'est pas toujours le cas si l'ensemble paramétrique n'est pas dénombrable.

Ainsi la suite aléatoire $\xi = \{\xi_n\}_{\mathbb{Z}_+}$ peut-être considérée comme un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$ car l'application $\xi = \{\xi_n\}$ est une fonction mesurable de $\{\Omega, \mathfrak{U}, P\}$ dans l'espace mesurable $\{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}, \mathfrak{A}_{\mathbb{Z}_+}\}$ et la σ algèbre $\mathfrak{A}_{\mathbb{Z}_+}$ des ensembles cylindriques est engendrée à son tour le vecteur aléatoire $\xi = \{\xi_n\}$.

Dans l'espace $\{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}, \mathfrak{A}_{\mathbb{Z}_+}\}$, la variable aléatoire $\xi = \{\xi_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ induit une mesure de probabilités,

$$P_\xi = \mu \qquad (1)$$

de la manière suivante :

$$\mu(A) = P_\xi(A) = P\{\omega : \xi(\omega) = \{\xi_n(\omega)\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \in A\} \qquad (2)$$

avec $A \in \mathfrak{A}_{\mathbb{Z}_+}$.

D'une certaine façon, on peut dire que nous avons ainsi obtenu une linéarisation de l'espace fondamental Ω par passage de Ω à l'espace des trajectoires $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$. C'est un point de vue général. On confond le point $\omega \in \Omega$ avec la trajectoire $\{\xi_n(\omega)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ et on peut considérer la valeur particulière $\xi_n(\omega)$ comme la nième coordonnée du point ω (bien entendu le point ω est supposé fixé à l'avance).

Il est bien connu que la mesure $\mu = P_\xi$, induite par la suite aléatoire $\xi = \{\xi_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ est définie de façon biunivoque par les distributions de dimension finie $P_{n_1, \dots n_r}$, c.a.d. par les fonctions de répartition conjonites des collections de variables aléatoires $\xi_{n_1}, \dots, \xi_{n_2}$.

Selon le théorème de Kolmogorov tout système cohérent de distributions de dimension finie $\{P_{n_1, \dots n_r}\}$, $n_i \in \mathbb{Z}_+$ peut-être prolongé en une mesure dans $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$ de toutes les suites sur les σ algèbre $\mathfrak{N}_{\mathbb{Z}_+}$ des sous-ensembles cylindriques

2. Concept de fonctionnelle aléatoire

Considérons à présent le vecteur aléatoire $\xi = \{\xi_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$ et soit $\mathbb{R}_{\mathbb{Z}_+}$ l'espace conjugué de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$, autrement dit son dual. Tout élément $\mu \in \mathbb{R}_{\mathbb{Z}_+}$ peut-être considéré comme une fonctionnelle linéaire définie sur l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$, c.a.d. la relation

$$u(\xi) = \sum_{k=1}^{n} U_k \, \xi_k(\omega)$$

définit une variable aléatoire réelle dépendant de $\omega \in \Omega$ sur l'espace de probabilité $\{\Omega, \mathfrak{U}, P\}$. Ainsi, $\xi(\omega)$ pour chaque ξ fixé est une fonction aléatoire définie sur l'espace paramétrique $\mathbb{R}_{\mathbb{Z}_+}$.

La donnée des trajectoires du processus aléatoire $\xi = \{\xi_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ et par conséquent équivalente à la donnée d'une fonctionnelle linéaire sur l'espace fonctionnel paramétrique $\mathbb{R}_{\mathbb{Z}_+}$.

On peut généraliser ce concept et considérer à la place de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$ n'importe lequel de ses sous-espaces vectoriels E ainsi que son conjugué F ; par exemple pour E on peut prendre

$E = l_p \subset \mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$ et $F = l_q \subset \mathbb{R}_{\mathbb{Z}_+}$, avec

$$p^{-1} + q^{-1} = 1 \quad ; \quad 1 \leq p < \infty$$

Soient $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$ et F deux espaces duaux.
On appelle (E,F) - processus aléatoire (brièvement (E,F) - processus) toute application linéaire $\xi : F \longrightarrow S(\Omega)$, continue sur chaque sous-espace de dimension finie.

Ici $S(\Omega)$ désigne l'espace de toutes fonctions réelles mesurables définies sur l'espace mesurable $\{\Omega, \mathfrak{U}\}$

Tout processus aléatoire défini sur l'espace paramétrique $\mathbb{Z}_+$ $\xi : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow S(\Omega)$ engendre comme nous venons de le voir un certain $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}, \mathbb{R}_{\mathbb{Z}_+})$ - processus ξ et inversement.

L'étude des (E,F) - processus comprend l'étude des processus aléatoires habituels sur un ensemble paramétrique quelconque.

Nous allons à présent lier au concept de (E,F) - processus ξ deux objets fondamentaux : la notion de fonctionnelle caractéristique et celle de distribution faible.

La <u>fonctionnelle caractéristique</u>. χ sur l'espace F correspondant au (E,F) - processus aléatoire ξ est définie de la manière suivante :

$$\chi^{\xi}(f) = \int_{\Omega} \exp i(\xi f)(\omega)\, dP(\omega) = \int_{E} \exp i\, (\xi f)(x)\, d\mu^{\xi}(x). \quad (3)$$

χ^{ξ} est une fonctionnelle définie positive, continue sur chaque sous-espace vectoriel de dimension finie F_n et normée par la condition

$$\chi^{\xi}(o) = 1$$

Des fonctionnelles ayant des propriétés analogues, indépendamment de leur origine sont dites définies positives.

Soient (E,F) deux espaces en dualité, $(E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+})$ et soit $\mathfrak{A}_E$ le σ - algèbre engendrée par les sous-ensembles cylindriques de E et basés sur les ensembles finis $\{f_1, f_2, \dots f_r\}$, où f_k est une fonctionnelle linéaire sur E.

La distribution faible μ^{ξ} engendrée par le (E,F) - processus aléatoire ξ est la mesure normée positive finie additive sur le σ - algèbre des ensembles cylindriques de E de la manière suivante :

$$\mu^{\xi}\{x \in E : \{(f_i,x)\}\ i = 1,2,.., r \in \Gamma \subset \mathbb{R}^r\} =$$

$$= P\{\omega \in \Omega : \{(\tilde{\xi f_i})(\omega)\}_{i = 1,2,\dots,r} \in \Gamma\} , \quad (4)$$

avec μ désignant un sous-ensemble borelière de $\mathbb{R}^r$.

Nous allons noter $\mu_{f_1, f_2, \dots f_r}$ la mesure dans $\mathbb{R}^r$, induite par la projection de la distribution faible à l'aide de l'application de $E \xrightarrow{\{f_i\}_{i = 1,2,..r}} \mathbb{R}^r$. Le système $\{\mu_{f_1,f_2}, \dots f_2\}$ de telles mesures forme un système cohérent de distributions de dimensions finies, que l'on peut prolonger en une mesure dans l'espace $\mathbb{R}^F$. Mais tout distribution faible μ^{ξ} ne peut pas toujours être prolongé en une mesure dans l'espace $E(\subset \mathbb{R}^F)$. En réalité si les fonctionnelles f_i sont des combinaisons linéaires des fonctionnelles coordonnées formant un ensemble dense (même dans la topologie faible), alors la distribution faible peut-être prolongée jusqu'à une mesure dans l'espace E.

3. Le problème du prolongement

Toute distribution faible sur E n'est pas nécessairement engendrée par un certain (E,F) - processus aléatoire ; cependant on peut toujours élargir l'espace E de telle sorte que sur l'espace élargi, il puisse exister une mesure, engendrant la distribution faible donnée.

Théorème 1

Soit (E,F) deux espaces en dualité ($E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$) et une distribution faible sur E. Alors il existe une mesure μ dénombrablement additive dans l'espace de toutes les formes linéaires sur F, F^* ($\supset E$), prolongement ν .

Démonstration

Il suffit de choisir dans l'espace F une base algébrique notée $T \subset \mathbb{Z}_+$; alors $F \sim \mathbb{R}_T$ et $F^* \sim \mathbb{R}^T$. Dans les conditions, d'application du théorème classique de Kolmogorov.

Ainsi le théorème de Kolmogorov peut-être interprété comme une solution au problème du prolongement d'une distribution faible en une mesure dans le cas où $E = \mathbb{R}^T$ et $F = \mathbb{R}_T$.
Dans l'espace $\mathbb{R}^T$ toute distribution faible se prolonge en une mesure ou de manière équivalente : pour toute fonctionnelle définie positive sur l'espace $\mathbb{R}_T$, continue sur les sous-espaces de dimension finie

a lieu le théorème de Bochner.

Si T est un ensemble fini, c'est le théorème classique de Bochner.

Le problème sur les conditions de possibilité de prolongement d'une distribution faible en une mesure a été résolu dans deux cas voisins :

a) $E = H$ est un espace hilbertien et $F = H'$ (théorème de Sazonov).

b) F est un espace nucléaire dénombrablement hilbertien et E son conjugué (théorème de Minlos

Nous aurons besoin du théorème de Minlos-Sazonov sous la forme suivante :

Théorème 2

Pour qu'une distribution faible puisse être prolongée en une mesure dans l'espace Hilbertien H, il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$, on trouve un ellipsoïde $\mathcal{E}_\varepsilon$ H de type Hilbert Schmidt tel que pour toute fonctionnelle linéaire continue f, on ait :

$$\mu_f(f(\mathcal{E}_\varepsilon)) \geq 1 - \varepsilon \quad , \quad \text{avec}$$

μ_f comme répartition de la fonctionnelle f et $f(\mathcal{E}_\varepsilon)$ l'image de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_\varepsilon$ par l'application f.

Bien que ce théorème ne soit formulé sous cette forme ni dans les travaux Uinlos, ni dans ceux de Sazonov, en réalité la variante formulée ci-dessus est équivalente aux variantes habituelles (par exemple à la continuité de la fonctionnelle caractéristique dans la topologie J, comme c'est le cas dans les travaux de Sazonov). En effet la condition formulée ci-dessus est équivalente à la continuité de la fonctionnelle caractéristique dans la topologie J. Soit $\varepsilon_n \downarrow 0$ et soit $\mathcal{E}_{\varepsilon_n}$ la suite correspondante d'ellipsoïdes de type Hilbert - Schmidt. Montrons que la fonctionnelle caractéristique est continue dans la topologie définie par un système de polaires relatives aux ellipsoïdes $\mathcal{E}_{\varepsilon_n}$ comme système fondamental de voisinages de l'origine.

En effet si $f \in \varepsilon_n \mathcal{E}_n$, alors en appliquant des procédés bien connus d'estimation nous trouvons.

$$|\chi(f) - \chi(0)| \quad \left|\int_H \exp i(f,u)\, d\mu(x) - 1\right| =$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{\infty} \exp i\, u\, d\mu_f(u) - 1\right| \quad \left|\int_{-\varepsilon_n}^{\varepsilon_n} \exp i\, u\, d\mu_f(u) + \int_{|u|>\varepsilon_n} \exp i\, u\, d\mu_f(u) - 1\right|$$

$$\leq \left| \int_{-\varepsilon_n}^{\varepsilon_n} \exp i\, u\, d\mu_f(u) - 1 \right| + \varepsilon_n \ ;$$

Le premier terme peut-être rendu aussi petit que l'on veut compte-tenu de la petitesse de ε_n ; comme pour $u \in [-\varepsilon_n, \varepsilon_n]$, $\exp i\, u$ est voisin de 1, et $\int_{-\varepsilon_n}^{\varepsilon_n} d\mu_f(u) = \mu_f\left(f(\mathcal{E}_{\varepsilon_n})\right)$ car la condition $f \in \varepsilon_n \mathcal{E}_{\varepsilon_n}$ signifie que $f(x) \in [-\varepsilon_n, \varepsilon_n]$ pour $x \in \mathcal{E}_{\varepsilon_n}$.

D'où résulte, si les inégalités suivantes sont vérifiées

$$\mu_f\left(f(\mathcal{E}_{\varepsilon_n})\right) \geq \lambda - \varepsilon_n \ ,$$

la continuité de la fonctionnelle caractéristique dans la topologie évoquée ci-dessus et par suite dans la topologie J plus forte (laquelle est construite à partir de tous les ellipsoïdes de type Hilbert Schmidt).

Inversement, si $\chi(f)$ est continue dans la topologie J, alors il existe une suite d'ellipsoïdes de type Hilbert. Schidt tels que sur leurs polaires la fonctionnelle caractéristique diffère de l'unité d'une quantité non supérieure à $\varepsilon_n \downarrow 0$; par analogie à la démonstration précédente, nous trouvons que dans ce cas les ellipsoïdes $\mathcal{E}_{\varepsilon_n}$ évoqués dans la formulation du théorème existent et vérifient la condition $\left(\mu_f(f(\mathcal{E}_\varepsilon)\right) \geq 1 - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit

Remarque :

Etant donné que dans le théorème de Minlos - Sazonov, les ellipsoïdes formant un système fondamentale de voisinages de la topologie critique peuvent être choisis orientés par rapport une base orthogonale fixée dans H, la condition nécessaire dans la formulation du théorème peut-être renforcée par l'exigence de l'orientation fixée (c.a.d. les directions des axes principaux) des ellipsoïdes $\mathcal{E}$

Cette remarque nous sera utile par la suite.

§.3. Mesures gaussiennes

1. Une suite de variables aléatoires $\xi = \{\xi_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ sur l'espace de probabilité $\{\Omega, \mathfrak{U}, P\}$ est dite gaussienne si toutes ses distributions finidimensionnelles sont gaussiennes. La mesure de probabilité P définifinie sur les σ - algèbre $\mathfrak{U}_\xi$ engendrée par toutes les variables aléatoires ξ_n, $n \in \mathbb{Z}_+$ sera dite également gaussienne.

Rappelons qu'une distribution de probabilité P dans l'espace $\mathbb{R}^n$ sera dite gaussienne si sa fonction caractéristique

$$\phi(u) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp i(u,x)\, dP(x), \quad u \in \mathbb{R}^n$$

admet la forme suivante

$$\phi(u) = \exp\left\{ i(u,a) - \frac{1}{2}(Bu,u)\right\}, \quad (5)$$

où $(u,x) = \sum_{k=1}^{n} u_k x_k$ représente le produit scalaire des vecteurs

$U = (u_k)$ et $x = (x_k)$, $k = 1,2, \dots n$ et

$$(u,a) = \int_{\mathbb{R}^n} (u,x)\, dP(x) \quad (6)$$

$$(Bu,v) = \int_{\mathbb{R}^n} [(u,x) - (u,a)][(v,x) - (v,a)]\, dP(x) \quad (7)$$

et $u,v \in \mathbb{R}^n$:

La densité de probabilité de la distribution gaussienne P, concentrée dans $\mathbb{R}^n$, a la forme suivante

$$p(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \det^{-\frac{1}{2}} B \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(B^{-1}(x-a),(x-a)\right)\right\} \quad (8)$$

2. Distributions gaussiennes dans $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$

Une distribution γ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$ est dite gaussienne si les variables aléatoires $\xi(f)$, $f \in \mathbb{R}_{\mathbb{Z}_+}$ admettent une distribution gaussienne sur la droite réelle.

Donnons sans démonstration la proposition suivante.

Proposition 5 (Soudakov - [42]).

Soit γ une gaussienne dans l'espace E et soit E_1 E un sous-espace vectoriel mesurable de E. Alors soit $\gamma(E_1) = 0$, soit $\gamma(E_1) = 1$.

Il est également connu (Sudakov, [40] que les translations à partir des éléments de l'ellipsoïde de dispersion et de son enveloppe linéaire conservent le type de la mesure γ .

Théorème 3

Soit γ une mesure gaussienne centrée quelconque dans l'espace de Banach séparable E. Alors la γ - mesure de toute boule dans E (de rayon non nul) est strictement positive.

Démonstration

Tout d'abord remarquons que l'on peut supposer la mesure γ non dégénérée, c'est-à-dire qu'elle n'est concentrée sur aucun sous espace vectoriel fermé. Dans le cas contraire, on se ramènera à ce sous-espace.

Par ailleurs l'ensemble des vecteurs pour lesquels la mesure γ est-quasi-invariante par translations est dense dans l'espace E. En effet, pour une mesure gaussienne cet ensemble coïncide avec l'enveloppe linéaire de son ellipsoïde de dispersion (Sudakov, [40]). Si cet ensemble n'était pas dense dans E muni de sa norme, alors il n'aurait pas été non plus faiblement dense et on aurait ainsi

trouvé une fonctionnelle linéaire sur E dont le noyau contiendrait l'ellipsoïde de dispersion de γ.
Dans ce cas sa distribution serait dégénérée - C'eût été la mesure de Dirac δ à l'origine et son noyau aurait été un sous-espace vectoriel fermé de mesure unité, ce qui contredirait l'hypothèse de non - dégénérescence.

A présent considérons un voisinage V de zéro admettant par rapport à γ une mesure égale à zéro et soit $\{x_k\}_{k=1,2,\ldots}$ un sous-ensemble dénombrable dense dans E de l'enveloppe linéaire de l'ellipsoïde de dispersion. Alors $\bigcup_{k=1}^{\infty} (V + x_k) = E$, et par quasi-invariance de la mesure γ par rapport aux translations x_k, $\gamma(V+x_k) = 0$ et par conséquent $\gamma(\bigcup_{k=1}^{\infty} (V + x_k))$ doit être égal à zéro, c'est-à-dire $\gamma(E) = 0$, ce qui est impossible car $\gamma(E) = 1$

4. <u>Exemples de distributions dans l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$</u>

a) Soit $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ une suite de variables aléatoires indépendantes gaussiennes de moyennes nulles et de dispersion σ_k^2.
Cest-à-dire $\xi_k \in N(0,\sigma_k^2)$.

La donnée d'une telle suite équivaut à la donnée d'une mesure gaussienne γ dans l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$. γ est une mesure - produit dont la fonctionnelle caractéristique $\chi_\gamma(f)$ dans l'espace $\mathbb{R}_{\mathbb{Z}_+}$ admet la forme suivante

$$\chi_\gamma(f) = \exp -\frac{1}{2} \sum_k \sigma_k^2 \, f_k^2$$

Sous-espaces hilbertiens de mesure unité dans les espaces l_p .

§.1. Position du problème

Soit $\{l_p, M_p, \mu\}$ un espace de probabilité, où $1 \leq p$ et M_p les σ - algèbre engendrée par les sous-ensembles cylindriques de l'espace l_p, et μ une mesure de probabilité dans l'espace mesurable $\{l_p, M_p\}$. Dans ce chapitre, nous allons étudier les sous-espaces hilbertiens de mesure unité dans les espaces l_p .

On démontrera, que pour $p \leq 2$ pour chaque mesure de probabilité μ il existe un sous-espace hilbertien de mesure-unité (pour $p = 2$ l'affirmation est bien sûr triviale). Par ailleurs pour chaque p, $2 < p \leq \infty$, on construira des exemples de mesures de probabilité aussi bien gaussiennes que non gaussiennes telles que la mesure de chaque sous-espace hilbertien de l_p soit égale à zéro. En guise d'application des résultats obtenus on formulera et on démontrera à l'aide du théorème de Minlos-Sazonov en termes de continuité de la fonctionnelle caractéristique un critère pour vérifier la possibilité de prolongement d'une distribution faible en une mesure dans les espaces l_p, $p \leq 2$. Par contre on démontrera que dans les espaces l_p , $p > 2$ en de tels termes un critère analogue n'existe pas.

Sous une autre forme et par une méthode différente, des critères de prolongement d'une distribution faible en une mesure dans l'espace l_p, $p < 2$ ont été obtenus par V.N Sudakov [40] et ensuite par Kuelles et Mandrekar [24].

§.2. Cas où $1 < p < 2$

Théorème 4

Toute mesure de probabilité μ dans l_p, $(1 \leq p < 2)$ est concentrée sur un sous-espace hilbertien.

Avant tout remarquons, que l'ensemble $\mathcal{E} = \{x \in l_p : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k^2}{a_k^2} \leq 1\}$ est un ellipsoïde dans l'espace l_p, si de la convergence de la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k^2}{a_k^2}$ découle la convergence de la série $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$ (nous verrons que cette condition est équivalente à la condition $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\frac{2p}{2-p}} < \infty$). En effet, dans ce cas le sous-espace $H = \{x \in l_p : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k^2}{a_k^2} < \infty\}$ muni de la norme $\|x\|_H = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k^2}{a_k^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ est un espace de Hilbert, dont l'inclusion dans l_p est continue.

Tout d'abord, nous allons démontrer quelques lemmes.

Lemme 1

Soit $\{a_k\}$ une suite de réels positifs et soit

$$\mathcal{E}_{(a_k)} = \left\{ x = (x_k) \; : \; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k^2}{a_k^2} \leq 1 \right\} \quad (1)$$

l'ellipsoïde orienté dont les axes principaux coïncident avec les directions des vecteurs de la base naturelle de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$ et dont les longueurs des demi-axes valent a_k mesurés dans la norme de l_2.

Si $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2p}{a_k^{2-p}} < \infty$ (2)

alors l'ellipsoïde $\mathcal{E}_{(a_k)}$ est contenu dans l_p.

Démonstration

Il suffit d'utiliser l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x_k}{a_k} \right)^p a_k^p \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{pr} \right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{|x_k|}{a_k} \right)^{ps} \right)^{\frac{1}{s}} \tag{3}$$

avec $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$.

En posant dans l'inégalité (3)

$r = \dfrac{2}{2 - p}$ et $s = \dfrac{2}{p}$, on obtient immédiatement

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\frac{2p}{2-p}} \right)^{\frac{2-p}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k^2}{a_k^2} \right)^{p/2} \tag{4}$$

De la définition de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_{(a_k)}$ (1) et de l'inégalité (2), il résulte que dans l'inégalité (4), nous avons $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$, c'est-à-dire que l'ellipsoïde $\mathcal{E}_{(a_k)}$ est contenu dans l'espace l_p pour $1 \leq p \leq 2$.

Lemme 2

Soit V_p la boule - unité de l'espace l_p et considérons l'application $\phi : l_p \longrightarrow V_p(l_p)$ ainsi définie :

$$\phi(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\|x\|_p} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Soit $\nu = \mu\phi^{-1}$ - l'image de la mesure μ par l'application ϕ. Si ν est concentrée dans un sous-espace hilbertien H, alors $\mu(H) = 1$.

Démonstration

En effet, si $\nu(H) = 1$, nous aurons :

$$1 = (\mu\phi^{-1})(H) = (\mu\phi^{-1})(\phi(H)) = \mu(\phi^{-1}\phi)(H) = \mu(H).$$

Remarque 1

Compte-tenu du lemme 2, nous supposerons par la suite que la mesure μ est concentrée sur la boule-unité V_p de l'espace l_p .

Lemme 3

Soit

$$a_k = \left(\int |x_k|^p \, d\mu(x) \right)^{\frac{2-p}{2p}} \quad (5)$$

les longueurs des demi-axes de l'ellipsoïde orienté $\mathcal{E}_{(a_k)}$. Alors l'ellipsoïde $\mathcal{E}_{(a_k)}$ est contenu dans la boule unité V_p de l'espace l_p.

Démonstration

D'après le théorème de Beppo-Levi, nous avons la relation suivante :

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\frac{2p}{2-p}} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{V_p} |x_k|^p \, d\mu(x) = \int_{V_p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right) d\mu(x) \leq 1$$

(6).

Ainsi, compte-tenu de la condition (2) du lemme 1, on voit que l'ellipsoïde $\mathcal{E}_{(a_k)}$ est contenu dans la boule unité V_p .

Remarque 2

Soit $H_p = \mathcal{L}\mathcal{E}_{(a_k)}$, l'enveloppe linéaire de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_{(a_k)}$ dont les longueurs des demi-axes ont été définis à partir des relations du lemme 3. Si on considère $\mathcal{E}_{(a_k)}$ comme une boule unité, alors l'espace H_p qui est son enveloppe linéaire se transforme en espace hilbertien.

Lemme 4

Soit $\varepsilon > 0$ et posons

$$b_k = a_k^{\frac{2}{2-p}} \varepsilon^{-1} = \left(E(|x_k|^p)\right)^{\frac{1}{p}} \varepsilon^{-1} \quad (7)$$

les longueurs des demi-axes de l'ellipsoïde orienté $\mathcal{E}_\varepsilon(b_k)$. Alors $\mathcal{E}_\varepsilon(b_k)$ est un ellipsoïde de type Hilbert-Shmidt dans l'espace Hilbertien $H_p = \mathcal{L}\left(\mathcal{E}_{(a_k)}\right)$. Ici EX désigne l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .

Démonstration

Il est facile de vérifier que $\mathcal{E}_\varepsilon(b_k)$ "de façon nucléaire" est contenu dans l'ellipsoïde $\mathcal{E}_{(a_k)}$, c'est-à-dire que la somme des carrés des longueurs des demi-axes de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_\varepsilon(b_k)$ par rapport à l'ellipsoïde $\mathcal{E}_{(a_k)}$ est finie. En effet :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k^2}{a_k^2} = \varepsilon^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\frac{2p}{2-p}} \leq \varepsilon^{-2}.\, 1 < \infty .$$

Il est également aisé de vérifier, que si $x \in \mathcal{E}_\varepsilon(b_k)$, alors $x \in \mathcal{E}_{(a_k)}$. Ainsi $\mathcal{E}_\varepsilon(b_k)$ est un ellipsoïde de type Hilbert-Shmidt dans H_p .

Enfin nous allons démontrer que $\mu(H_p) = 1$. Pour cela remarquons, que la donnée d'une mesure de probabilité μ dans l'espace l_p engendre naturellement une distribution faible $\{\mu_{f_1 \dots f_n}\}$ c'est-à-dire un système cohérent de distributions dans $\mathbb{R}^n$, où $\mu_{f_1,\dots f_n}$ désigne la distribution du vecteur aléatoire $(f_1,\dots f_n)$ et $f_k \in l_q$, l'espace conjugué de $l_p (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$. A présent considérons μ comme une distribution faible dans l'espace hilbertien H_p. Pour vérifier que $\mu(H_p) = 1$, il nous suffit d'appliquer le théorème de Minlos-Sazonov pour des combinaisons linéaires finies de fonctionnelles coordonnées de la forme suivante :

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e_k \ , \quad \text{où}$$

$e_k(x) = x_k$ pour tout $x = (x_k)$ et $C_k \in \mathbb{R}$.

En utilisant l'inégalité de Markov et compte-tenu de l'inégalité

$$|a + b|^p \leq 2^{p-1} |a|^P + 2^{P-1} |b|^P \quad (\text{pour } p \geq 1)$$

nous obtenons

$$1 - \mu_f\left(f\left(\mathcal{E}_\varepsilon(b_k)\right)\right) = \mu \ \{x : |\sum_{k=1}^{n} C_k x_k| > \sum_{k=1}^{n} |C_k| b_k\} \leq$$

$$\leq \frac{E\,|\sum_{k=1}^{n} C_k x_k|}{\left(\sum_{k=1}^{n} |a| b_k\right)^P} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} |C_k|^P \, E\,|x_k|^P}{\sum_{k=1}^{n} |C_k| \, E\,|x_k|^P} \, 2^{P-1} \varepsilon^P = 2^{P-1} \varepsilon^P .$$

Etant donné que $1 \leq p < 2$ et ε un réel strictement positif arbitraire, il en résulte que $\mu(H) = 1$.

Le théorème 4 peut prendre la forme suivante.

Théorème (4 bis)

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ une suite de variables aléatoires sur l'espace de probabilité (Ω, A, P).

Si la série $\sum_{k=1}^{\infty} |X_k(\omega)|^p$ converge presque sûrement, alors il existe une suite de réels positifs (a_k) tels que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2p}{a_k^{2-p}} < \infty \quad \text{et la série} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k^2}{a_k^2}(\omega) \quad \text{converge}$$

presque sûrement.

En effet, la suite aléatoire (X_k) sur l'espace de probabilité (Ω, A, P) définit une variable aléatoire X à valeurs dans l_p dont la distribution dans l_p $(1 \leq p < 2)$ est la mesure $P_X = \mu$.

Autrement dit cela signifie que si les trajectoires de la suite aléatoire $X = (X_k)$ appartiennent presque sûrement à $l_p (1 \leq p < 2)$, alors on peut considérer qu'avec une probabilité égale à l'unité, ces trajectoires sont des éléments d'un sous-espace hilbertien.

Le théorème 4 peut-être utilisé pour la déduction d'un critère de prolongement en une mesure d'une distribution faible dans l'espace l_p, $1 \leq p < 2$ en termes semblables à ceux du théorème de Minlos - Sazonov dans le cas hilbertien.

Théorème 5

Pour qu'une distribution faible puisse être prolongée en une mesure dans l'espace l_p , $p < 2$, il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ellipsoïde $\mathcal{E}_\varepsilon$ de la forme :

$$\mathcal{E}_\varepsilon = \left\{ x \in l_p : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k^2}{a_k^2} \leq 1 \right\}$$

où $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^p < \infty$, et que pour toute fonctionnelle linéaire $f \in l_q$ la condition suivante puisse être vérifiée :

$$\mu_f(f(\mathcal{E}_\varepsilon)) \geq 1 - \varepsilon .$$

(Ici μ_f représente la distribution de la fonctionnelle f).

Démonstration

La condition est nécessaire. D'après le théorème 4, il existe un espace de Hilbert orienté H l_p de mesure égale à l'unité, c'est-à-dire qu'il existe des réels a_k tels que

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\frac{2p}{2-p}} < \infty \quad \text{et} \quad \mu \left\{ x \in l_p : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k^2}{a_k^2} < \infty \right\} < 1 .$$

D'après le théorème de Minlos - Sazonov, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un ellipsoïde de type Hilbert - Schmidt $\mathcal{E}_\varepsilon$ et d'axes b_k tel que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k^2}{a_k^2} < \infty .$

Mais étant donné que

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^p \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k^2}{a_k^2} \right)^{p/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\frac{2p}{2-p}} \right)^{\frac{2-p}{2}}$$

et compte-tenu de l'inclusion de $H \subset l_p$, il en résulte que

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^p < \infty .$$

La condition est suffisante

Soit $\varepsilon_n \downarrow 0$ et $\mathcal{E}_{\varepsilon_n}$ la suite correspondante d'ellipsoïdes d'axes $\{b_k^{(n)}\}$. Pour chaque ellipsoïde on peut associer un sous-espace de Hilbert "orienté" $H_n \subset l_p$, dans lequel cet ellipsoïde est de type Hilbert-Schmidt. Comme on le montre (cf 45) on peut trouver un sous-espace Hilbertien H de l_p contenant chaque sous-espace H_n. Chaque ellipsoïde $\mathcal{E}_{\varepsilon_n}$ dans H sera également de type Hilbert - Schmidt, de sorte que nous nous trouvons dans les conditions d'application du théorème de Minlos-Sazonov dans l'espace $H \subset l_p$. Ainsi la distribution faible selon ce théorème peut-être prolongé en une mesure dans l'espace H et par conséquent dans l'espace l_p.

Ce théorème peut-être reformulé sous la forme suivante :

Théorème 6

Une distribution faible peut-être prolongée en mesure dans l'espace l_p, $1 \leq p < 2$ si et seulement si, sa fonctionnelle caractéristique est continue dans la topologie de convergence uniforme sur les ellipsoïdes de la forme :

$$= \left\{ x \in l_p \ : \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k^2}{a_k^2} \leq 1 \right\}$$

pour tous b_k tels que $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^p < \infty$.

§.3 Cas de l'espace l_∞

Considérons dans l'espace l_∞ des suites bornées la mesure suivante $\mu = \times\, \mu_k$, où μ_k est une mesure sur la droite réelle ainsi définie

$$\mu_k(-1) = \mu_k(+1) = \frac{1}{2} .$$

Désignons par Δ l'ensemble de tous les sommets du cube unité de l'espace l_∞ muni de sa norme usuelle d'espace de Banach. Il est connu que la mesure μ est définie seulement sur le σ - algèbre engendrée par les fonctionnelles coordonnées et qu'elle est concentrée sur l'ensemble Δ .

Remarquons que la donnée de la mesure μ dans l'espace l_∞ est équivalente à la donnée d'une suite de variables aléatoires indépendantes $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ indentiquement distribuées selon le schéma de Bernoulli c'est-à-dire qu'elles sont telles sur l'espace de probabilité $\{\Omega,u,P\}$ que nous ayons :

$$P\{\omega : \xi(\omega) = 1\} = P\{\omega : \xi(\omega) = -1\} = \frac{1}{2} \quad , \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+ .$$

Comme l'a si justement remarqué Doob dans son livre celèbre sur les processus aléatoires, même pour un schéma aussi simple certains problèmes ne peuvent être résolus sans l'introduction d'échantillons formés d'une suite infinie d'épreuves. La démonstration du théorème suivant confirme cette affirmation.

<u>Théorème 7</u>

Pour tout sous-espace hilbertien H contenu dans l'espace l_∞ , $\mu(H) = 0$.

Pour démontrer ce théorème il nous faut d'abord examiner quelques lemmes.

<u>Lemme 1</u>

Dans l'espace l_∞, relativement à la mesure μ , il n'existe pas de sous-espace hilbertien de mesure - unité.

Démonstration

Supposons qu'il existe un sous-espace hilbertien H de mesure unité. Soit $\mathcal{E}$ la boule unité de H muni de sa norme hilbertienne correspondante. La boule $\mathcal{E}$ est un ellipsoïde dont l'enveloppe linéaire coïncide avec H c'est-à-dire $\mathcal{L}\mathcal{E} = H$. Alors selon le théorème de Uinlos - Sazonov (dans la forme de Sazonov) il existe un ellipsoïde $\mathcal{E}_1$ dont l'inclusion dans $\mathcal{E}$ est de type Hilbert. Schmidt et ayant la forme suivante :

$$\mathcal{E}_1 = \left\{ x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \leq \beta \right\} . \quad (1)$$

En effet la fonctionnelle caractéristique de la mesure μ peut-être calculée de la manière suivante :

$$\chi_\mu(f) = \int_{1_\infty} \exp i(f,x)\, d\mu(u) =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp i\, f_k\, x_k\, d\mu_k(x_k) =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \cos f_k \, , \quad \text{avec } (f_k) = f = (1_\infty)'$$

Au voisinage de zéro, nous avons :

$$\chi_\mu(f) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 + \sigma(\sum_k f_k^2) \qquad (2)$$

Du théorème de Minlos - Sazonov, il découle que χ_μ est continu par rapport à une norme (pré) hilbertienne, telle que la sphère conjuguée soit incluse dans H de façon nucléaire ; mais χ_μ dans notre cas est continue par rapport à la topologie définie par la norme de l_2 , mais non par rapport à une topologie plus faible [7]. Par conséquent l'inclusion de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_1$) dans H est de type Hilbert - Schmidt. On pourra également supposer que l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ est contenu dans la boule $V_{\infty,R}$ de rayon R de l'espace l_∞ (proposition 1 du §.I) et que

$$\mathcal{E}_1 = \left\{ u = (u_k) : \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2 \leq 1 \right\} \quad (3)$$

Nous avons ainsi supposé $\beta = 1$ dans l'équation (1) .

Supposons en outre que la somme des carrés des longueurs des demi-axes de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_1$ par rapport à la métrique de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ inférieure à 1. Dans ces conditions considérons l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ basé sur les n premières coordonnées vectorielles de l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$, espace de toutes les suites numériques. Soient $\mathcal{E}^{(n)}$, $\mathcal{E}_1^{(n)}$, $V_{\infty,R}^{(n)}$ les projections selon la projection canonique de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$ sur $\mathbb{R}^n$ des ensembles $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_1$ et $V_{\infty,R}$ respectivement. Si nous notons $\ell_k^{(n)}$ les longueurs des demi-axes de l'ellipsoïde $\mathcal{E}^{(n)}$ dans la métrique euclidienne usuelle, alors l'inégalité suivante a lieu (voir proposition 2 du chapitre I) :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell_k^{(n)-2} \leq 1 \; ; \quad (4)$$

démontrons à présent que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell_k^{(n)^2} \leq n\, R^2 \quad (5)$$

En effet soit

$$e_i^{(n)} = (\underbrace{0,\dots,0}_{(i-1)\text{ fois}}\ 1,\ 0,\ \dots,\ 0)$$

les vecteurs de base dans l'espace $\mathbb{R}^n$.

Désignons par :

$\{C_k\}$ une suite de nombres réels telle que $\sum_{k=1}^{n} C_k^2 \leq 1$, $\forall n$,

$\phi^{(n)} = \left(\phi_{k,i}^{(n)}\right)$ une matrice orthogonale de dimension $n \times n$.

Alors quelque soit le point $x^{(n)} = \left(x_i^{(n)}\right)$ $i = 1,2,\dots n$ appartenant à l'ellipsoïde $\mathcal{E}^{(n)}$ la relation suivante est vérifiée :

$$x^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{(n)} e_i^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)} C_k \phi_k^{(n)} = \sum_{k=1} b_k^{(n)} C_k \left(\sum_{i=1}^{n} \phi_{k_i}^{(n)} e_i^{(n)} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)} C_k \phi_{k_i}^{(n)} \right) e_i^{(n)} ,$$

avec $\phi_k^{(n)}$ comme vecteurs de base unité dirigés selon les axes principaux de l'ellipsoïde $\mathcal{E}^{(n)}$ et formant une base orthogonale.

De là il résulte aisément que :

$$x_i^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)} C_k \phi_{k_i}^{(i)} \quad \text{pour tout } i = 1,2,\dots, n .$$

Par conséquent, compte tenu de l'inclusion $\mathcal{E}^{(n)} \subset V_{\infty,R}^{(n)}$ nous avons :

$$\left| \sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)} C_k \phi_{k_i}^{(n)} \right| \leq R \quad \text{pour tout } i = 1,2,\dots, n .$$

Etant donné que $\{C_k\}$ est une suite quelconque de nombres réels tels que $\sum_{k=1}^{n} C_k^2 \leq 1$, alors l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\sum_{k=1}^{n} {b_k^{(n)}}^2 {\phi_{k_i}^{(n)}}^2 \leq R^2 \qquad (6) \quad \text{pour tout } i = 1,2,\dots n.$$

Lemme 2

Dans l'espace l_∞ il n'existe pas de sous-espace hilbertien de mesure μ positive.

Démonstration

Supposons qu'il existe un ellipsoïde $\mathcal{E}$ contenu dans une certaine boule $V_{\infty,R}$ de l_∞ (R 0) de mesure μ positive. Soit $H = \mathcal{L}\mathcal{E}$ son enveloppe linéaire. Considérons le groupe $\mathfrak{G}$ des transformations constituées par les permutations de signes d'un nombre fini de coordonnées d'éléments de l'espace l_∞. Par définition la mesure μ invariante par rapport aux transformations du groupe $\mathfrak{G}$. Le groupe $\mathfrak{G}$ est un ensemble discret qui opère ergodiquement c'est-à-dire que tout ensemble invariant admet une mesure égale à 0 ou à 1 (la paire $(\mu,\mathfrak{G})$ est isomorphe comme on le sait à la paire $(\lambda,\mathfrak{D})$, où λ est la mesure de Lebesque sur la circonférence de rayon unité et $\mathfrak{D}$ le groupe de rotations sur l'arc de longueur dyado-rationnelle : le changement de signe de la $k_{\text{ième}}$ coordonnée signifie une translation égale à 2^{-k}).

Considérons à présent l'ensemble $M = \bigcup_{g \in a} g(H)$, où $g(H)$ est l'image du sous-espace hilbertien H selon la permutation g. Ainsi g(H) est un sous-espace hilbertien muni de la norme :

$$\| x' \|_H = \| g(x) \|_{g(H)} \quad , \quad x \in H$$

et du produit scalaire

$$(x,h)_H = (g(x) \; , \; g(y))_{g(H)} \quad , \; x \; , \; y \in H \; .$$

Enfin on peut ajouter membre à membre les n inégalités (6) selon l'indice $i = 1,2,\dots, n$ et obtenir :

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)^2}\,\phi_{k_i}^{(n)^2}\right) \leq nR^2 \quad , \text{ soit}$$

$$R^2 n \geq \sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)^2}\left(\sum_{i=1}^{n} \phi_{k_i}^{(n)^2}\right) = \sum_{k=1}^{n} b_i^{(n)^2} \quad .$$

(utilisant le fait que $\phi^{(n)} = \left(\phi_{k_i}^{(n)}\right)$ est une matrice orthogonale).

Ainsi l'inégalité (5) est démontrée .

Pour acheter la démonstration de lemme 1 il suffit de montrer qu'il n'existe pas une suite de collections de nombres $\{b_k^{(n)}\}_{k = 1,2,\dots,\; n = 1,2,\dots}$ avec les propriétés suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)-2} \leq 1$ (4)

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)^2} \leq nR^2$ (5)

En effet en supposant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)^2} = C = \text{const}, \sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)-2}$ devient minimal pour $b_1^{(n)} = b_2^{(n)} = \dots = b_n^{(n)}$. Partant si

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)-2} = n\, b_k^{(n)-2} \leq 1 \ ,$$

alors $b_k^{(n)} \geq \sqrt{n}$; d'où il résulte que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)^2} \geq n^2$,

c'est-à-dire que la condition (5) n'est déjà plus vérifiée pour des valeurs de n assez grandes et pour R fixé (par exemple pour $R \geq 1$).

Le lemme 1 est démontré .

Il est clair que M est un ensemble invariant et en vertu de l'ergodicité du groupe $\mathfrak{G}$ admet une mesure égale à 1, car M contient le sous-espace $H = e(H)$ - lequel par définition admet une mesure positive (Ici e représente l'élément neutre du groupe $\mathfrak{G}$).

A présent construisons le sous-espace hilbertien contenant l'ensemble M et contenu dans l'espace l_∞. A cette fin on peut utiliser la méthode de construction d'espace hilbertien d'un travail de 1 . Schwartz (voir [45]).

En effet soit ν une mesure discrète sur le groupe $\mathfrak{G}$ et posons

$$\hat{H} = \int_{\mathfrak{G}} g(H)\, d\nu(g) = \sum_{g \in H} p_g\, g(H), \quad \text{avec}$$

$$\sum_{g \in \mathfrak{G}} p_g = 1 \quad \text{et} \quad p_g > 0 .$$

$$\hat{x} = \sum_{g \in \mathfrak{G}} p_g\, x_g \quad \text{avec} \quad x_g \in g(H) .$$

Comme on le montre dans l'article ([45]), l'espace $\hat{H}$, muni de la norme

$$\| \hat{x} \|_{\hat{H}} = \inf \sum_{g \in \mathfrak{G}} \| x_g \|^2_{g(H)} ,$$ où l'infimum est

relatif à toutes représentations possibles de l'élément $\hat{x}$ de l'espace $\hat{H}$, est un espace hilbertien, c'est-à-dire un sous-espace hilbertien de l'espace l_∞. Etant donné que $\hat{H} \supset M$ et que M est un ensemble invariant de mesure 1, il en résulte que l'espace $\hat{H}$, admet la mesure unité. De cette façon il existe un sous-espace hilbertien $\hat{H}$ de mesure unité, ce qui est impossible car cela contredit le lemme 1. Ainsi le lemme 2 est démontré et par suite le théorème 7.

Maintenant nous allons donner l'exemple d'une mesure gaussienne γ dans l'espace l_∞ montrant que l'on ne peut pas toujours trouver un sous-espace hilbertien de mesure unité (on aurait pu sans changer le raisonnement prendre l'espace c_0 des suites tendant vers zéro).

Théorème 8

Soit γ le produit infini des mesures gaussiennes γ_k sur la droite de dispersions $\sigma_k^2 = \mathrm{lu}^{-1}(k+1)$ et de moyennes nulles, c'est-à-dire que :

$$\gamma = \overset{\infty}{\underset{k}{\times}} \gamma_k \,, \quad \text{avec} \quad \gamma_k \in N(0,\sigma_k^2) \,,$$

alors $\gamma(l_\infty) = 1$ et pour tout sous-espace hilbertien $H \quad l_\infty$, on a $\gamma(H) = 0$.

Démonstration

Dans le but de simplifier l'exposé, nous allons changer l'échelle, nous allons changer l'échelle sur les axes de coordonnées. Pour cela nous allons considérer l'espace $E \quad \mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$ constitué des suites $u = \{\xi_k\}$ telles que $\sup \mathrm{lu}^{-1/2}(k+1)\,|\xi_k| < \infty$:

Alors la mesure γ devient un produit de mesures identiques sur les axes de coordonnées.

Etant donné que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int^{+} \exp - \frac{1^2}{2}\, dt = 1 - \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\exp - \frac{x^2}{2}}{u} \left(1 + O(u^{-2})\right),$$

la mesure de l'ensemble

$$S_R = \left\{ u : u = \{\xi_k\},\ \sup_k \operatorname{lu}^{-1/2}(k+1)\, |\xi_k| \leq R \right\},$$

(boule de E de rayon R) est calculée de la manière suivante :

$$\gamma(S_R) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{(k+1)^{-\frac{R^2}{2}}}{R \operatorname{lu}^{1/2}(k+1)} \left(1 + \left(R^{-2} \operatorname{lu}^{-1}(k+1)\right)\right).$$

Le produit infini placé à droite converge si $R > \sqrt{2}$, et c'est pourquoi pour de telles valeurs de R , $\gamma(S_R) > 0$ et par conséquent $\gamma(E) > 0$, c'est-à-dire $\gamma(E) = 1$ en vertu de la loi du zéro - un , soit $\gamma(1_\infty) = 1$.

Pour démontrer qu'aucun sous-espace hilbertien H de 1_∞ n'admet la mesure unité (et en général de mesure positive), il nous suffit de démontrer que l'ellipsoïde de dispersion $\mathcal{E}_1 = \{ x : \sum_k \xi_k^2 \leq 1 \}$ de la mesure γ n'est contenu de façon nucléaire dans aucun ellipsoïde $\mathcal{E}$ contenu dans une certaine sphère S_R . En réalité, si $H \subset 1_\infty$ est un sous-espace hilbertien, alors la sphère unité de H est nécessairement contenue à l'intérieur d'une certaine sphère de 1_∞ en vertu de la proposition 1 du chapitre I.

Supposons à présent qu'il existe un ellipsoïde $\mathcal{E}$, contenu dans la sphère S_R et contenant de manière nucléaire l'ellipsoïde de dispersion de la mesure γ , c'est-à-dire l'ensemble

$\mathcal{E}_1 = \{u : \sum_k u_k^2 \leq 1\}$. On peut supposer d'ailleurs que la somme des carrés des longueurs des demi-axes de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_1$ par rapport à $\mathcal{E}$ est inférieure à 1 .

Considérons l'espace $\mathbb{R}^n$ basé sur les n premièrs vecteurs-coordonnées de l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$. Soient $S_R^{(n)}$, $\mathcal{E}^{(n)}$, $\mathcal{E}_1^{(n)}$ les projections de S_R , $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_1$ selon la projection canonique de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$ sur $\mathbb{R}^n$. Si nous désignons par $b_k^{(n)}$ les longueurs des demi-axes de $\mathcal{E}^{(n)}$ par rapport à $\mathcal{E}_1^{(n)}$, c'est-à-dire les longueurs des demi-axes de $\mathcal{E}^{(n)}$ dans la métrique euclidienne ; alors $\sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)-2} \leq 1$. De la même manière, étant donné que

$\mathcal{E}^{(n)} \subset S_R^{(n)}$, nous avons :

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)2} \leq \sum_{k=1}^{n} R^2 \, \mathrm{lu}(k+1) = R^2 \, \mathrm{lu}(n+1)\,! = R^2 n \ln n + \quad (1).$$

Tout comme dans la démonstration du théorème 7, on peut prouver qu'il n'existe pas une suite de collections de nombres $\{b_k^{(n)}\}_{k = 1,2,\dots,n \;;\; n = 1,2,\dots}$ telle que les 2 conditions suivantes soient simultanément vérifiées :

1. $\sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)-2} \leq 1$

2. $\sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)\,2} \leq \mathbb{R}^2 \, n \, \mathrm{lu}\, n + \quad (1)$

$(b_k^{(n)} \geq 0$, R fixé).

§.4 Cas de l_p , $2 < p < \infty$

Considérons dans l'espace l_p $(2 < p < \infty)$ une mesure μ définie de la manière suivante.

$$\mu = \underset{k=1}{\overset{\infty}{\times}} \mu_k \text{ , avec}$$

$$\mu_k\{a_k\} = \mu_k\{-a_k\} = \frac{1}{2} \qquad (8)$$

et $a_k^2 = k^{-\frac{2}{p}(1+\varepsilon)}$, $k = 1,2,\ldots,$ $a_k > 0$, $0 < \varepsilon < \frac{p}{2} - 1$.

Il est évident que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^p < \infty$ et $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \infty$.

Moyennant les conditions ci-dessus, le résultat suivant a lieu :

Théorème 9

Quel que soit le sous-espace hilbertien H de l'espace l_p, on a $\mu(H) = 0$

Avant de démontrer ce théorème nous allons examiner quelques lemmes.

Lemme 3

Dans l'espace l_p $(2 < p < \infty)$, il n'existe pas de sous-espace hilbertien de mesure unité.

Démonstration

Nous allons considérer la mesure μ dans l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$ de toutes les suites numériques. Pour des raisons de simplicité nous changerons l'échelle sur les axes et nous considérons à la place de l'espace l_p , l'espace $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$ des éléments $x = (x_k)$

pour lesquels

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \; a_k^p < \infty .$$

Ainsi la mesure μ se transforme en produit de mesures identiques sur les axes. Soit $S_R = \{x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \, a_k^p \leq R^p \}$

Pour $R > 1$ il est évident que S_k admet la mesure unité. Montrons qu'il n'existe pas d'ellipsoïde $\mathcal{E}$ contenu dans l'espace l_p , c'est-à-dire contenu dans une certaine sphère S_R et contenant un ellipsoïde $\mathcal{E}_1$ de type Hilbert - Schmidt relativement à la mesure μ dans les conditions du théorème de Minlos - Sazonov (sous la forme de Sazonov), c'est-à-dire que pour tout espace hilbertien $H \subset l_p$, nous avons $\mu(H) < 1$.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, c'est-à-dire qu'il existe un ellipsoïde $\mathcal{E}$ contenu dans S_R et contenant l'ellipsoïde $\mathcal{E}_1$ de type Hilbert-Schmidt relativement à la mesure μ . Alors tout comme précedemment nous pouvons calculer la fonctionnelle caractéristique de la mesure μ , c'est-à-dire

$$\chi_\mu(f) = \prod_{k=1}^{\infty} \cos a_k \; f_k \text{ , avec}$$

$$(f_k) = f \in l_q \quad \text{et} \quad p^{-1} + q^{-1} = 1 \; ;$$

et trouver la forme générale de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_1 = \{x = (x_k), \sum_k x_k^2 \leq \beta\}$. Pour des raisons de simplicité, on peut prendre $\beta = 1$. Supposons que la somme des carrés des longueurs des demi-axes de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_1$ relativement à $\mathcal{E}$ est inférieure à l'unité.

Introduisons l'espace $\mathbb{R}^n$ basé sur les n premières

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)^2} \phi_{k_i}^{(n)^2} \leq R^2 a_i^{-2} \quad , \quad i = 1,2,\ldots, n \ , \quad (11).$$

Maintenant on peut sommer les n unégalités (11) selon l'indice i et obtenir

$$R^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^{-2} \geq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)2} \phi_{k_i}^{(n)^2} = \sum_{k=1}^{n} b_K^{(n)^2} \left(\sum_{k=1}^{n} \phi_{k_i}^{(n)^2} \right) = \sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)^2}$$

Si à présent nous posons $a_i^2 = i^{-\frac{2}{p}(1+\varepsilon)}$, $i = 1,2,\ldots, n$, alors nous obtenons :

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)^2} \leq R^2 \sum_{i=1}^{n} i^{\frac{2}{p}(1+\varepsilon)} \leq R^2 \int_1^n u^{\frac{2}{p}(1+\varepsilon)} dx \leq$$

$$\leq R^2 C_p \cdot n^{\frac{2}{p}(1+\varepsilon)+1} = 0(n^{\frac{2}{p}(1+a)}) \ ,$$ avec la condition

$0 < \frac{\varepsilon}{2} < \frac{p}{2} - 1$.

Ainsi l'inégalité (10) est démontrée.

Pour terminer la démonstration il suffit de remarquer comme auparavant qu'il n'existe pas de suite de collections de nombres $\{b_k^{(n)}\}$. $k = 1,2,\ldots n$, $n = 1,2,\ldots$ avec les propriétés suivantes :

1. $\sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)^{-2}} \leq 1$ (9)

2. $\sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)^2} \leq R^2 n^{\frac{2}{p}(1+\varepsilon)+1}$ (10) .

Ainsi le lemme 3 se trouve démontré .

Lemme 4

Dans l'espace l_p , $2 < p < \infty$, il n'existe pas de ...

coordonnées de l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$. Tout comme auparavant soient $\mathcal{E}^{(n)}$, $\mathcal{E}_1^{(n)}$ et $S_R^{(n)}$ les projections de $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_1$ et S_R respectivement selon la projection canonique de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$ sur $\mathbb{R}^n$. Si les $b_k^{(n)}$ représentent les longueurs des demi-axes de $\mathcal{E}^{(n)}$ par rapport à $\mathcal{E}_1^{(n)}$, c'est-à-dire les longueurs des demi-axes de $\mathcal{E}^{(n)}$ dans la métrique euclidienne ; on aura ;

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)-2} \leq 1 \qquad (9)$$

Montrons que

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)^2} \leq R^2 \, n^{\frac{2}{p}(1+\varepsilon)+1} \qquad (10)$$

Soit $x^{(n)} = \left(x_i^{(n)}\right) \in \mathcal{E}^{(n)}$ $(\subset \mathbb{R}^n)$. Tout comme avant on peut représenter $x^{(n)}$ sous la forme suivante :

$$x^{(n)} = \sum_{i=1} x_i^{(n)} e_i^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)} C_k \phi_{k_i}^{(n)} \right) e_i^{(n)}$$

et par conséquent on trouve aisément :

$$x_i^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)} C_k \phi_{k_i}^{(n)} \quad \text{pour tout } i = 1,2,\dots, n .$$

Mais étant donné que l'inclusion $\mathcal{E}^{(n)} \subset S_R^{(n)}$ est vraie, nous aurons

$$\|x^{(n)}\|_p^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i^{(n)}|^p a_i^p = \sum_{k=1} \left| \sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)} C_k \phi_{k_i}^{(n)} \right|^p a_i^p \leq R^p ,$$

et par suite :

$$a_i^p \left| \sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)} C_k \phi_{k_i}^{(n)} \right|^p \leq R^p \quad \text{pour tout } i = 1,2,\dots,n$$

Mais étant donné que $\{C_k\}$ est une suite quelconque de nombres réels tels que $\sum_{k=1}^{n} C_k^2 \leq 1$, de là il résulte que :

Alors d'après le théorème 3 du chapitre I il est clair que la mesure par γ de la boule S_1 est positive strictement. Pour montrer qu'aucun espace hilbertien H contenu dans E n'admet la mesure unité (et en général une mesure positive) il nous suffit de montrer que son ellipsoïde de dispersion $\mathcal{E}_1 = \{x : \sum_k u_k^2 \leq 1\}$ n'est contenu de façon nucléaire dans aucun ellipsoïde contenu dans la boule S_1 .

La démonstration est analogue à celle des lemmes précédentes. Nous l'effectuerons - Remarquons seulement qu'il suffit de remarquer qu'il n'existe pas une suite de collections de nombres

$\{b_k^{(n)}\}$ tels que :

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)-2} \quad 1 \quad \text{et} \quad (12)$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)^2} \leq C_p \, n^{\frac{2}{p}(1+\varepsilon)+1} \quad (13) \quad \text{avec} \quad 0 < \varepsilon < \frac{p}{2} - 1 \; .$$

Ainsi le théorème 10 est démontré.

A présent nous allons revenir aux critères sur la possibilité de prolongement d'une distribution faible en une mesure dénombrablement additive dans les espace l_p $(2 \leq p \leq \infty)$.
Nous allons montrer qu'il n'existe pas de topologie "critique" dans les espaces l_q $(q < 2)$ c'est-à-dire qu'il n'existe pas de topologie dans laquelle la continuité de la fonctionnelle caractéristique relative à la distribution faible donnée soit une condition nécessaire et suffisante pour que cette distribution faible puisse être prolongée en une mesure σ - additive dans l'espace l_p, $p^{-1}+q^{-1} = 1$.

sous-espaces hilbertiens de mesure unité.

Démonstration

Remarquons tout d'abord que la mesure μ dans l'espace l_p est invariante par rapport au groupe G des transformations constituées par les permutations de signes d'un nombre fini de coordonnées d'éléments de l'espace l_p (on de l'espace E). Le groupe G opère ergodiquement. Par suite la démonstration du lemme 4 s'effectue de manière analogue à celle du lemme 2. Ainsi le théorème 9 est démontré.

Théorème 10

Soit γ une mesure gaussienne dans $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$, produit infini des mesures gaussiennes indépendantes définies sur la droite de dispertions σ_k^2 et de moyennes nulles, c'est-à-dire que :

$$\gamma = \underset{k=1}{\overset{\infty}{\times}} \gamma_k \text{ , avec } \gamma_k \in N(0,k^{-\frac{2}{p}(1+\varepsilon)}) \quad \text{et}$$

$0 < \varepsilon < p/2 - 1$.

Alors la mesure γ est concentrée dans $l_p (p > 2)$ et pour tout sous-espace hilbertien $H(l_p)$, $\gamma(H) = 0$.

Démonstration

Etant donné que $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^p < \infty$, il est évident (voir [3]) que la mesure gaussienne γ est concentrée dans l_p , pour $p > 2$. Maintenant montrons que pour tout sous-espace hilbertien H l_p , nous avons $\gamma(H) = 0$. Nous allons changer d'échelle sur les axes et introduire le nouvel espace E $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$ constitué des suites $x = (x_k)$ telles que $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^p \, |x_k|^p < \infty$.

A cette fin, dans chacun des espaces l_p, $(2 < p \leq \infty)$ seront décrites deux distributions faibles parmi lesquelles, seulement une pouvant engendrer une mesure dans l_p et simultanément les ensembles de Lebesgue $\{x \in l_g : |\chi(x) - \chi(0)| < \varepsilon\}$ constituent les bases d'un même filtre, c'est-à-dire que pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un certain $\varepsilon' > 0$ tel que l'ensemble de Lebesgue ci-dessus relatif à la première mesure et correspondant à ε' est contenu dans l'ensemble de Lebesgue relatif à la seconde mesure correspondant à ε et inversement. Si cette condition est remplie il en résulte que si l'une des fonctionnelles caractéristiques est continue à l'origine dans une certaine topologie, la seconde sera également continue dans la même topologie. En effet la continuité signifie que le filtre du voisinage de l'origine dans la topologie considérée est plus fine que le filtre des ensembles de Lebesgue de la forme indiquée plus haut, et par conséquent la continuité a lieu on n'a pas lieu simultanément pour les deux fonctionnelles caractéristiques, car les filtres ayant pour base les ensembles de Lebesgue coïncident.

Dans le cas de l'espace l_∞, nous allons introduire les 2 distributions faibles suivantes. La première sera le processus gaussien γ d'ellipsoïde de dispersion :

$$= \quad x = \{(x_k) : \sum_k x_k^2 \leq 1\}.$$

Il est aisé de vérifier que $\gamma(l_\infty) = 0$ et que la fonctionnelle caractéristique $\chi_\gamma(f)$, $f \in l_1$ est continue de façon précise sur la topologie l_2. Ainsi γ n'est pas une mesure dans l_∞. Pour seconde distribution faible nous allons considérer la mesure μ donnée au théorème f du §.3 du chapitre II. Nous avons déjà vu que

$\mu(1_\infty) = 1$ et que sa fonctionnelle caractéristique ne peut pas être continue dans une topologie plus faible que celle de l'espace 1_2.

A présent nous allons donner des exemples relatifs à tous les espaces 1_p, $2 \ll p < \infty$.

En guise de distribution faible engendrée par une mesure nous allons considérer une distribution faible gaussienne correspondant à une suite de variables aléatoires indépendantes gaussiennes de dispersions σ_k^2, avec $\sigma_k = k^{-\frac{2}{2+p}}$. Comme on peut aisément le vérifier à partir du théorème général de N.N. Vakhania sur les conditions de prolongement d'une distribution faible gaussienne en une mesure dans l'espace 1_p, la mesure gaussienne correspondante dans l'espace des suites est concentrée dans l'espace 1_p.

Considérons à présent

$$p(u) = \begin{cases} \dfrac{2+p}{8+2_p} & \text{si} \quad |u| \le \left(\dfrac{8+2_p}{2+p}\right)^{\frac{2}{2+p}}, \\[2ex] \dfrac{1}{4^{2+P/2}} & \text{si} \quad |u| > \left(\dfrac{8+2_p}{2+p}\right)^{\frac{2}{2+p}} \end{cases}$$

On vérifie aisément que $p(\mu)$ est une densité de probabilité et que par ailleurs :

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2 \, p(u) \, du < \infty \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{1+P/2} \, p(u) \, du = \infty .$$

Maintenant, nous allons montrer à l'aide du théorème de

Kolmogorov relatif aux trois séries [30] que les variables aléatoires ξ_k indépendantes de densité de probabilité $p_k(u)=p(\frac{1}{\sigma_k}u)$ sont telles que la série $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p$ diverge presque sûrement. En effet pour que cette dernière série converge, il faut et il suffit que les séries suivantes convergent :

$$\sum_k P\{|\xi_k|^p > C^p\} \ , \ \sum_k \int |\xi_k|^p \, dp \ , \quad \text{et} \quad \{|\xi_k| \leq C\}.$$

$$\sum_k \left(\int_{\{|\xi_k| \leq C} |\xi_k|^{2p} \, dP - \left(\int_{\{|\xi_k| \leq C} |\xi_k|^p \, dp \right)^2 \right)$$

où C est une certaine constante positive. Dans notre cas la première série diverge car $P\{|\xi_k| > C\} = \int_{\frac{C}{\sigma_k}}^{\infty} p(u)\,du =$

$$= C' \sigma_k^{1+P/2} = \frac{c'}{k} \quad \text{et} \quad \sum_k P\{|\xi_k| > C\} = \sum_k P\{|\xi_k|^p > C^p\}_{\infty}$$

Par conséquent l'espace $l_p \subset \mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$ admet la probabilité égale à 0 et la distribution faible indiquée n'est pas engendrée par une mesure dans l_p. Comme on l'indique dans l'article de A.M. Vershik et V.N. Soudakov (voir [7]) dans le cas de variables aléatoires indépendantes de dispersions σ_k^2 le filtre de base formée des ensembles de Lebesgue définis par la fonctionnelle caractéristique engendre une topologie de la convergence uniforme sur l'ellipsoïde

$\sum_k \frac{x_k^2}{\sigma_k^2} \leq 1$, c'est-à-dire que les topologies construites pour les deux distributions faibles coïncident, ce qui termine la démonstration sur l'impossibilité d'existence d'un critère de prolongement d'une distribution faible jusqu'à une mesure dans l'espace l_p, $2 < p < \infty$ en termes de continuité de la fonctionnelle caractéristique.

Résumons ce qui vient d'être démontré sous la forme du théorème suivant :

Théorème 11

Il est impossible de formuler un critère de prolongement jusqu'à une mesure d'une distribution faible dans l_p, $p > 2$ en termes de continuité de la fonctionnelle caractéristique dans une certaine topologie : il n'existe pas de topologie dans l'espace lq, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ telle que la fonctionnelle caractéristique d'une distribution faible soit continue dans cette topologie si et seulement si la distribution faible est engendrée par une mesure dans l'espace l_p.

Chapitre III

Equivalence et singularité des distributions gaussiennes infinidimensionnelles sur la σ - algèbre engendrée par des fonctionnelles homogènes.

§.1. Position du problème sur l'équivalence des mesures factorisées

Considérons le problème suivant de vérification d'hypothèses statistiques. Nous sommes en présence de deux hypothèses concurrentielles, chacune d'elles consistant au fait que la distribution de probabilités inconnue d'un processus aléatoire en observation est gaussienne de moyenne nulle et d'opérateur de conrrélation donné. Cependant on suppose qu'une trajectoire du processus aléatoire donné ne peut-être appréhendé par l'observateur qu'à une constante multiplicative près.

Nous nous intéressons à la question fondamentale suivante : pour quelle paire de mesures gaussiennes la distinction des hypothèses est-elle possible avec une probabilité égale à l'unité à partir d'un échantillon de taille unité (singularité). Pour une paire de mesures gaussiennes dans les espaces vectoriels l'alternative ci-dessous est bien connue : ces mesures sont soit singulières, soit équivalentes. (Hajek J. [9]).

Notre problème se ramène aisément à celui habituel de vérification d'hypothèses statistiques si nous examinons certains nouveaux espaces. En effet l'espace vectoriel considéré des trajectoires muni de chacune des mesures gaussiennes données γ_0 , γ_1 se transforme en espace de Lebesgue. Cette condition ne limite pas notre problème car

car personne n'a imaginé un seul exemple concret d'espace muni d'une mesure sur une σ - algèbre dénombrablement engendrée qui ne fut pas un espace de Lebesgue.

La condition d'être un espace de Lebesgue a été introduite afin que nous puissions librement parler du système de mesures conditionnelles sur les éléments de toutes les partitions mesurables possibles (voir article de V.A. Rokhlin [37]). Considérons la partition (mesurable) λ de l'espace (E,γ_k) , $k = 0,1$ en rayons. Cette partition est engendrée par l'ensemble de toutes les fonctionnelles mesurables, homogènes de degré nul, et c'est pourquoi elle est mesurable.

A présent on peut considérer l'espace quotient E/λ , muni des deux mesures factorisées (les images des mesures γ_o et γ_1 par l'application canonique $E \longrightarrow E/\lambda$) que nous noterons γ_o/λ et γ_1/λ . L'espace $(E/\lambda , \gamma_k/\lambda)$ ne possède plus déjà une structure linéaire. Néanmoins la classe des paires de mesure γ_k/λ , $k=0,1$ est suffisamment étroite. Pour une telle paire de mesures, l'étude du rapport de vraisemblance (la dérivée de Radon-Nilodym) présente un intérêt certain. Dans le paragraphe suivant en utilisant un schéma de raisonnements appliqué dans une autre situation (pour des mesures non factoriées) par A.V. Skoroklod (cf [12]) nous démontrons l'alternative "équivalence ou singularité" pour de telles mesures gaussiennes factorisées. Nous démontrons ainsi qu'une certaine condition suffisante (évidente) pour l'équivalence de telles mesures s'avère nécessaire également, c'est-à-dire que nous donnons un critère simple pour vérifier l'équivalence ou la singularité des mesures considérées.

Remarquons tout de suite que la forme concrète de l'espace E dans le problème touchant "l'équivalence ou la singularité des mesures γ_o/λ et γ_1/λ ne joue aucun rôle, tout comme d'ailleurs dans le cas des mesures gaussiennes. La continuité absolue (équivalence, singularité) est en réalité une propriété susceptible d'être vérifiée à partir des distributions faibles des mesures γ_o et γ_1 et c'est précisément en termes de distributions faibles que nous allons chercher la réponse à la question posée.

On peut aussi étudier le problème posé en d'autres termes, en parlant non pas de mesures factorisées sur l'espace quotient E/λ , mais de mesures sur les σ - algèbre des sous-ensembles de E, engendrés par des fonctionnelles mesurables homogènes de degré nul.

Par la suite, pour des raisons de simplicité de l'écriture, nous noterons l'espace quotient E/λ par E_λ et les mesures quotients γ_k/λ par $\gamma_{k,\lambda}$. On pourra également supposer que l'une des mesures gaussiennes considérées est réduite (standardisée) ; autrement dit on pourra supposer que sa fonctionnelle caractéristique à la forme $\exp(-\frac{1}{2}(f,f))$, où (f,f) représente une certaine forme quadratique réduite définie non-négative sur E et que l'autre mesure et donnée par sa fonctionnelle caractéristique $\exp(-\frac{1}{2} B(f,f))$, où $B(f,f) = (Bf,f)$ est une forme quadratique sur l'espace des formes linéaires et l'opérateur B est appelé opérateur de corrélation de la distribution faible engendrée par la mesure γ_1 . Ainsi notre problème se ramène à la recherche de tous les opérateurs B pour lesquels la mesure $\gamma_{o,\lambda}$ est équivalente à la mesure γ_1,λ et à la démonstration que pour tous les autres opérateurs B possibles ces mesures sont singulières.

Pour démontrer la singularité de ces mesures, il eût été suffisant de construire un sous-ensemble $M \quad E$, mesurable positivo-homogène tel que $\gamma_o(M) = 0$, $\gamma_1(M) = 1$.

Remarquons encore que les mesures gaussiennes γ_o et γ_1 sont singulières si l'opérateur B est proportionnel à l'opérateur unité avec un coefficient de proportionnable différent de l'unité et que dans ce cas les mesures $\gamma_{o,\lambda}$ et $\gamma_{1,\lambda}$ coïncident justement. En général, si parmi les opérateurs de la forme $a\,B$ il existe un certain opérateur (c'est-à-dire il existe un certain $a_o > 0$) tel que la mesure correspondant à l'opérateur a_oB soit équivalente à la mesure γ_o , les mesures $\gamma_{o;\lambda}$ et $\gamma_{1,\lambda}$ sont équivalentes, car toute cette famille d'opérateurs engendre une et une seule mesure factorisée $\gamma_{1,\lambda}$. Plus bas nous montrerons que la condition d'existence d'une constante a_o possédant la propriété indiquée est suffisante comme on l'a déjà dit pour l'équivalence des mesures factorisées et elle s'avère être en outre nécessaire et si un tel nombre a_o n'existe pas, alors les mesures quotients sont singulières.

§.2. <u>Démonstration du résultat fondamental</u>

<u>Théorème 12</u>

Les mesures $\gamma_{o,\lambda}$ et $\gamma_{1,\lambda}$ sont équivalentes si et seulement si il existe un nom-re positif a tel que les mesures γ_o et γ_1^a soient équivalentes. On note

$$\gamma_o \sim \gamma_1^a \qquad (1)$$

(Ici $\gamma_1^a(A) = \gamma_1(a\,A)$ pour tout sous-ensemble mesurable $A \quad E$)

Si pour tout $a > 0$, la condition (1) n'est pas vérifiée, alors les mesures $\gamma_{o,\lambda}$ et $\gamma_{1,\lambda}$ sont singulières.

Lemme 1

Si le spectre de l'opérateur B contient zéro on n'est pas borné, alors les mesures $\gamma_{o,\lambda}$ et $\gamma_{1,\lambda}$ sont singulières.

Démonstration

Pour fixer les idées supposons que le spectre de l'opérateur B contienne 0. Pour démontrer la singularité des mesures $\gamma_{o,\lambda}$ et $\gamma_{1,\lambda}$ nous allons construire un ensemble M mesurable par rapport à la partition λ tel que $\gamma_o(M) = 0$ et $\gamma_1(M) = 1$.

Tout d'abord si 0 est une valeur propre de l'opérateur B , alors on peut trouver une fonctionnelle linéaire qui est le vecteur propre correspondant à la valeur propre 0. Cette fonctionnelle linéaire admet une distribution dégénérée par rapport à la mesure γ_1 (mais non dégénérée par rapport à la mesure γ_o). Le noyau de cette fonctionnelle constitue justement l'ensemble cherché M.

Si à présent, 0 est un point limite du spectre de l'opérateur B , alors pour une suite quelconque $\varepsilon_n \downarrow 0$, pour chaque $n \geq 1$ on peut trouver des vecteurs $f_i^{(n)}$, $i = 1,2,\ldots, n$ pour lesquels les conditions suivantes sont vérifiées :

$$f_i^{(n)} , f_k^{(n)} = \delta_i^k , \quad \left(Bf_i^{(n)}, f_k^{(n)}\right) = \sigma_i^{(n)^2} \delta_i^k , \; i, k = 1,2,\ldots, n,$$

avec $\sigma_i^{(n)^2} \leq \varepsilon_n$.

Alors en posant $t_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f_k^{(n)^2}$, nous trouvons que $t_n(x)$

tend vers 0 presque sûrement par rapport à la mesure γ_1 . En posant $M = \{ x : \lim_n t_n(x) = 0\}$, nous voyons que l'ensemble M est λ - mesurable car $t_n(x)$ est une fonctionnelle homogène (de degré 2) et $\gamma_1(M) = 1$. En plus $\lim_n t_n(x) = 1$ presque sûrement par rapport à la mesure γ_o et par conséquent $\gamma_o(M) = 0$.

Si l'opérateur B est non borné, c'est-à-dire qu'il admet un spectre non borné, la démonstration s'effectue de manière analogue. Le lemme 1 est ainsi démontré.

Lemme 2

Si le spectre de l'opérateur B admet plus d'un point limite, alors les mesures factorisées $\gamma_{o,\lambda}$ et $\gamma_{1,\lambda}$ sont singulières.

Démonstration

Soient $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, deux points limites du spectre de l'opérateur B. Considérons deux suites appartenant respectivement à deux sous-espaces orthogonaux de l'espace hilbertien F de toutes les fonctionnelles linéaires mesurables définies sur l'espace (E,γ_o) muni du produit scalaire standardisé (c'est-à-dire défini à l'aide de la mesure γ_o), invariants par rapport à l'opérateur B et tels que ces sous-espaces soient aussi orthogonaux selon le produit scalaire (Bf,f) et les spectres de l'opérateur B supposé borné convergent sur eux respectivement vers les points σ_1^2 et σ_2^2 (l'existence de tels sous-espaces découle de la décomposition spectrale de l'opérateur B). En fixant dans chacun de ces sous-espaces un élément , nous obtenons une suite d'éléments f_k pour laquelle :

$$(f_i , f_j) = \delta_{ij}$$

$$(Bf_i, f_j) = \sigma_i^2 \delta_{ij}$$

$$\sigma^2_{2K+1} \longrightarrow \bar{\sigma}_1^2 \quad \text{et} \quad \sigma^2_{2K} \longrightarrow \bar{\sigma}_2^2$$

Considérons à présent la suite suivante de fonctionnelle homogènes degré 0 :

$$t_n(x) = \frac{\xi_n(x)}{\eta_n(x)} , \quad \text{avec}$$

$$\xi(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} f_i^2(x) , \quad \eta_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i^2(x) .$$

A l'aide de la loi forte des grands nombres, nous obtenons les relations suivantes :

$$\lim_n \eta_n(x) = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i^2(x) = 1 \quad \text{presque sûrement selon } \gamma_0 .$$

$$\lim_n \xi_n(x) = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} f_i^2(x) = 1 \quad \text{presque sûrement selon } \gamma_1 .$$

De là il découle en particulier que

$$\lim_n t_n(x) = \lim_n \xi_n(x) \quad (2) \quad \text{presque sûrement selon } \gamma_0 ,$$

$$\lim_n t_n(x) = \lim_n \eta^{-1}(x) \quad (3) \quad \text{presque sûrement selon } \gamma_1 .$$

Etant donné que :

$$\xi_{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i^2}{\sigma_i^2} = \frac{1}{2n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{f^2_{2K-1}}{\sigma^2_{2K-1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^2_{2K}}{\sigma^2_{2K}} \right) ,$$

pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier N_ε, tel que pour $k > N_\varepsilon$, on ait :

$$\left|\sigma^{-2}_{2K-1} - \sigma^{-2}_{1}\right| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \left|\sigma^{-2}_{2K} - \sigma^{-2}_{2}\right| < \varepsilon \ ;$$

On peut écrire :

$$\left|\xi_{2n} - \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{k=1}^{n} f^2_{2K-1} + \frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{k=1}^{n} f^2_{2K}\right)\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{N_\varepsilon}\left(\left(\frac{1}{\sigma^2_{2K-1}} - \frac{1}{\sigma^2_1}\right) f^2_{2K-1} + \left(\frac{1}{\sigma^2_{2K}} - \frac{1}{\sigma^2_2}\right) f^2_{2K}\right)\right| +$$

$$+ \left|\frac{1}{2n}\sum_{k=N_\varepsilon+1}^{n}\left(\left(\frac{1}{\sigma^2_{2K-1}} - \frac{1}{\sigma^2_1}\right) f^2_{2K-1} + \left(\frac{1}{\sigma^2_{2K}} - \frac{1}{\sigma^2_2}\right) f^2_{2K}\right)\right|$$

Pour ε fixé, nous allons à présent augmenter n. Ainsi :

$$\frac{1}{2n}\left(\frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{k=1}^{n} f^2_{2K-1} + \frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{k=1}^{n} f^2_{2K}\right) \longrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right) \quad \text{presque}$$

sûrement selon la mesure γ_o.

D'autre part le premier terme du premier membre de l'inégalité tend de façon évidente vers zéro et le second terme ne dépasse par la grandeur .

$$\varepsilon \cdot \left|\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} f^2_i\right| ,$$

et ainsi sa limite supérieure est inférieure à ε. De là il découle que pour les valeurs de n assez grande .

$$\left|\xi_{2n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)\right| < 2\varepsilon \quad \text{presque sûrement}$$

selon γ_o et comme ε est un nombre arbitraire, nous obtenons que presque sûrement par rapport à la mesure γ_o :

$$\xi_{2n} \longrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^{-2}} + \frac{1}{\sigma_2^{-2}}\right) \qquad \text{pour } n \text{ assez grand.}$$

Par conséquent la suite ξ_n tend vers la même limite selon γ_o :

$$\lim_n \xi_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^{-2}} + \frac{1}{\sigma_2^{-2}}\right) \quad (4) \quad \text{presque sûrement selon } \gamma_o .$$

Un raisonnement parfaitement analogue nous conduit à la conclusion que :

$$(5) \qquad \lim_n \eta_n^{-1} = \frac{2}{\sigma_1^{-2} + \sigma_2^{-2}} \qquad \text{presque sûrement selon } \gamma_1 .$$

A présent nous allons considérer l'ensemble M défini de la manière suivante :

$$M = \left\{ x : \lim_n t_n(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^{-2}} + \frac{1}{\sigma_2^{-2}}\right) \right\} .$$

Des relations (2) et (4) il découle immédiatement que $\gamma_o(M) = 1$ et $\gamma_1(M) = 0$ car des relations (3) et (5) il résulte que :

$$\lim_n t_n(x) = \frac{2}{\sigma_1^{-2} + \sigma_2^{-2}} \neq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^{-2}} + \frac{1}{\sigma_2^{-2}}\right) \quad \text{sur un ensemble}$$

de mesure égale à l'unité par rapport à la mesure γ_1 .

Etant donné que les fonctionnelles $t_n(x)$ sont homogènes de degré 0, l'ensemble M est mesurable par rapport à la partition λ et le lemme 2 se trouve ainsi démontré.

Ainsi nous constatons qu'une condition nécessaire d'équivalence des mesures $\gamma_{o,\lambda}$ et $\gamma_{1,\lambda}$ est que le spectre de l'opérateur de corrélation B soit discret et admette un seul point limite.

A partir de maintenant, nous pouvons pour des raisons de commodité supposer que E est l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$ de toutes suites $x = (x_1, x_2 \dots)$, qu'à la mesure γ_0, correspondant une suite de variables aléatoires gaussiennes indépendantes normées et qu'à la mesure γ_1 correspond une suite de fonctionnelles x_k cartésiennes distribuées selon la loi gaussienne de moyenne 0 et de dispersion σ_k^2 tendant vers σ^2 pour k assez grand.

Lemme 3

Soit B l'opérateur de corrélation de spectre discret et de valeurs propres σ_k^2 tendant vers la limite σ^2, $0 < \sigma^2 < \infty$. Si $\sum_{k=1}^{\infty} (\sigma^2 - \sigma_k^2)^2 = \infty$; alors les mesures $\gamma_{0,\lambda}$ et $\gamma_{1,\lambda}$ sont singulières). (Autrement dit si l'opérateur $(\sigma^2 I - B)$ n'est pas de type Hilbert-Schmidt, les mesures $\gamma_{0,\lambda}$ et $\gamma_{1,\lambda}$ sont singulières, I étant l'opérateur unité correspondant à la mesure γ_0).

Démonstration

Pour des raisons de simplicité nous supposons que $\sigma = 1$. Dans ce cas nous allons considérer la variable aléatoire suivante :

$$t_n(x) = s_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} (1-\sigma_k^2)(1 - x_k^2) ,$$

les variables aléatoires x_k sont supposées être distribuées selon la loi gaussienne N(0,1) par rapport à la mesure γ_0 et selon la loi $N(0,\sigma_k^2)$ par rapport à la mesure γ_1, et $s_n = \sum_{k=1}^{n} (1-\sigma_k^2)^2$.

Introduisons aussi la variable aléatoire suivante :

$$\tilde{t}_n(x) = s_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} (1-\sigma_k^2)\left(\frac{x_k^2}{\psi^2(x)} - 1\right) \quad \text{avec} \quad \psi(x) = \lim_n \sum_{k=1}^{n} x_t^2 .$$

Il est aisé de vérifier que

$$\tilde{t}_n(x) = t(x) \quad \text{presque sûrement}$$

tant par rapport à la mesure γ_o que par rapport à γ_1 .
Remarquons enfin $\tilde{t}^n$ (x) converge en moyenne quadratique vers zéro selon la mesure γ_o et vers 1 selon la mesure γ_1 .

En effet :

$$E_{\gamma_o} \tilde{t}_n = E_{\gamma_o} t_n = 0 ,$$

$$E_{\gamma_o} \tilde{t}_n^2 = E_{\gamma_o} \tilde{t}_n^2 = 2 \; s_n^{-1} ;$$

$$E_{\gamma_1} \tilde{t}_n = E_{\gamma_1} t_n = 1 ,$$

$$E_{\gamma_1} (\tilde{t}_n - 1)^2 = E_{\gamma_1} (t_n - 1)^2 = O(s_n^{-1}) .$$

Ici E_{γ_i} $i = 0,1$, désigne l'espérance mathématique par rapport à la mesure γ_i .

Ainsi pour n tendant vers l'infini, s_n tend vers l'infini et des relations ci-dessus il résulte que $\tilde{t}_n$ tend vers 0 selon la mesure γ_o et $\tilde{t}_n$ tend vers l'unité selon la mesure γ_1 . Comme $\tilde{t}_n$ est une fonctionnelle homogène de degré nul, alors l'ensemble M , λ - mesurable sur lequel la limite de la suite $\tilde{t}_n(x)$ vaut zéro sépare les mesures γ_o et γ_1 , ce qui démontre la singularité des mesures $\gamma_{o,\lambda}$ $\gamma_{1,\lambda}$.

Remarque

Si $\lim\limits_{k} \sigma_k^2 = \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < \infty$, alors

$$\lim_{n} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{u_k^2}{\sigma_k^2}}{\sum\limits_{k=1}^{n} u_k^2} = \frac{1}{\sigma^2}$$ presque sûrement tant selon γ_0 que selon γ_1.

En résumant ce qui a été dit dans les lemmes 1,2, et 3, formulons le critère de continuité absolue des distributions gaussiennes infinidimensionnelles factorisées par partition de l'espace en rayons.

Soient γ_0 et γ_1 deux mesures gaussiennes dans l'espace vectoriel E, données sur une même σ - algèbre dénombrablement engendrée ; $\gamma_{0,\lambda}$ et $\gamma_{1,\lambda}$ sont les mesures sur l'espace-quotient E_λ de l'espace E par une partition λ en rayons, canoniquement images des mesures γ_0 et γ_1 par l'application naturelle de $E \longrightarrow E_\lambda$.

Pour que les mesures $\gamma_{0,\lambda}$ et $\gamma_{1,\lambda}$ ne soient pas singulières il faut et il suffit qu'on puisse trouver une suite de formes linéaires f_k définies presque sûrement tant selon γ_0 que selon γ_1 sur l'espace, telles qu'elles soient indépendantes tant selon γ_0 que selon γ_1 et que la condition suivante soit vérifiée :

$$\lim_{k} \frac{\mathcal{D}_{\gamma_1} f_k}{\mathcal{D}_{\gamma_0} f_k} = \sigma^2$$ existe, différent de zéro et de l'infini et

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\mathcal{D}_{\gamma_1} f_k}{\mathcal{D}_{\gamma_0} f_k} - \sigma \right)^2 < \infty$$

et la suite f_k sépare les éléments de l'espace E (engendrer la σ - algèbre cherchée). (Cette dernière condition peut-être vérifiée car on a déjà démontré la nécessité que le spectre de l'opérateur de corrélation soit discret et par conséquent il existe une suite orthogonale complète de ses fonctions propres).

Il est pratiquement évident que cette condition nécessaire démontrée de non singularité est en outre suffisante pour l'équivalence des mesures $\gamma_{0,\lambda}$ et $\gamma_{1,\lambda}$. Supposons que nous ayons trouvé des fonctionnelles f_k satisfaisant à la condition demandée. Alors l'application de $E \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$

$$E \ni x \longrightarrow \left\{ \frac{f_k(x)}{\sqrt{\mathcal{D}_{\gamma_0} f_k}} \right\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels munis de mesures (E,γ_0) et (E,γ_1) avec l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$ muni des images des mesures γ_0 et γ_1 par l'application ci-dessus (ici il est essentiel que la suite $\{f_k\}$ sépare les points de l'espace E).

Dans l'espace des suites apparaissent ainsi deux mesures gaussiennes μ_0 et μ_1. La mesure μ_0 correspond à une suite de variables aléatoires gaussiennes indépendantes et normées alors que la mesure μ_1 correspond à une suite de variables aléatoires indépendantes gaussiennes et centrées de dispersions

$$\sigma_k^2 = \frac{\mathcal{D}_{\gamma_1} f_k}{\mathcal{D}_{\gamma_0} f_k}.$$ Des hypothèses faites ci-dessus il en résulte que $\sigma_k^2 \longrightarrow$ et $\sum_{k=1}^{n} (\sigma_k^2 - \sigma^2)^2 < \infty$. Considérons

maintenant une troisième mesure μ_2 correspondant à une suite de variables aléatoires indépendantes gaussiennes de dispersions σ^2 et de moyenne 0. Il est évident que la factorisée de cette mesure coïncide avec celle de μ_o ; par ailleurs, de la condition $\sum_{k=1}^{\infty} (\sigma_k^2 - \sigma^2)^2 < \infty$, résulte l'équivalence des mesures μ_1 et μ_2, par suite celle des mesures factorisées $\mu_{1,\lambda}$ et $\mu_{2,\lambda}$ et par conséquent l'équivalence de $\mu_{o,\lambda}$ et $\mu_{1,\lambda}$.

Ainsi, pour que deux mesures gaussiennes centrées γ_o et γ_1 dans l'espace vectoriel E soient équivalentes sur la σ - algèbre engendrée par les fonctionnelles homogènes de degré nul, il faut et il suffit qu'il existe un nombre a, $0 < a < \infty$, tel que les mesures γ_o et γ_1^a (avec $\gamma_1^a(A) = \gamma_1(aA)$) soient équivalentes. Dans le cas contraire les mesures $\gamma_{o,\lambda}$ et $\gamma_{1,\lambda}$ sont singulières.

Le théorème est démontré.

§.3. Calcul de la densité

Maintenant nous allons nous intéresser au calcul de la densité $\dfrac{d\gamma_{1,\lambda}}{d\gamma_{o,\lambda}}$ dans le cas où les mesures $\gamma_{o,\lambda}$ et $\gamma_{1,\lambda}$ sont équivalentes.

Nous allons obtenir une expression pour cette densité sous la forme d'une fonction définie presque partout dans l'espace (E,γ_o) et mesurable par rapport à la σ - algèbre engendrée par les fonctionnelles de degré nul, c'est-à-dire en fait une expression pour $\dfrac{d\gamma_{1,\lambda}}{d\gamma_{o,\lambda}}$, où $\gamma_{o,\lambda}$ et $\gamma_{1,\lambda}$ peuvent être considérées comme les restrictions des mesures γ_o et γ_1 à la σ - algèbre indiquée.

Il suffit en principe de trouver une expression de la densité dans le cas de dimension n. En effet, il est connu que si P et Q sont deux mesures équivalentes quelconques sur l'espace $\{\Omega,u\}$ transformé en l'occurence en espaces de Lebesgue, et $\xi_n \uparrow \varepsilon$ une suite de partitions mesurables tendant vers la partition ε , alors $\frac{dP}{dQ} = \lim_n \frac{dP_n}{dQ_n}$, où la dérivée dans le second membre est calculée à partir des restrictions P_n,Q_n des mesures P et Q sur la σ - algèbre engendrée par la partition λ .

Théorème 13

Si les mesures factorisées $\gamma_{o,\lambda}$ et $\gamma_{1,\lambda}$ sont équivalentes, alors leur densité de probabilité admet la forme suivante :

$$\frac{d\gamma_{1,\lambda}}{d\gamma_{o,\lambda}}(u) = p^{\lambda}(u) = \lim_n p_n^{( )}(u) \text{ , avec}$$

$$p_n^{(\lambda)}(u) = \left(\prod_{k=1}^{n} \sigma_k^{-1}\right)\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} u_k^2}{\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k^2}{\sigma_K^2}}\right)^{\frac{n}{2}}$$

Si en outre la condition suivante est vérifiée :

$$\sum_{k=1}^{n} |1 - \sigma_k^2| < \infty \text{ , alors}$$

$$p^{(\lambda)}(u) = \left(\prod_{k=1}^{\infty} \sigma_k^{-1}\right)\left[\lim_n \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} u_k^2}{\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k^2}{\sigma_k^2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right].$$

Démonstration

Soit $\{u_k\}_{k=1,2,\ldots,n}$ une base biorthogonale dans l'espace F et soit F_n le sous-espace de base - $(u_1, u_2,\ldots, u_n)$. Désignons par P_n l'opérateur de projection sur F_n et soient $\gamma_o^{(n)}$ et $\gamma_1^{(n)}$ les projections des mesures γ_o et γ_1 respectivement. Pour des raisons de simplicité on peut confondre F_n avec l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. En guise d'espace quotient on prendra alors la sphère unité de l'espace $\mathbb{R}^n$ que nous noterons S_n.

Soit $p_{1,n}(u)$ la densité de la mesure $\gamma_1^{(n)}$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Introduisons dans l'espace $\mathbb{R}^n$ les coordonnées sphériques :

$$
\begin{aligned}
u_1 &= r \cos \phi_1 \\
u_2 &= r \sin \phi_1 \cos \phi_2 \\
&\text{-----------------------------} \\
u_{n-1} &= r \sin \phi_1 \sin \phi_2 \ldots \cos \phi_{n-1} \\
u_n &= r \sin \phi_1 \sin \phi_2 \ldots \sin \phi_{n-1}
\end{aligned}
$$

$r \geq 0$, $0 \leq \phi_i \leq \pi$ $(i = 1,2,\ldots, n-2)$, $0 \leq \phi_{n-1} \leq 2\pi$.

On sait que la jacobien de cette transformation est égal à $r^{n-1}\,\theta$, avec

$$\theta = \sin^{n-2} \phi_1 \sin^{n-3} \phi_2 \ldots \sin^2 \phi_{n-3} \sin \phi_{n-2} .$$

Introduisons aussi la notation

$$d\Omega = \theta d\phi_1 \ldots d\phi_{n-1}, \quad \phi = (\phi_1, \ldots, \phi_{n-1}).$$