THÈSE DE 3ÈME CYCLE

PRÉSENTÉE

À L'UNIVERSITÉ DE DAKAR POUR L'OBTENTION DU GRADE

DE DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES

MENTION : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

PAR

MARY TEUW NIANE

"APPROXIMATION POLYÈDRALE D'UNE FONCTION CONVEXE S.C.I. APPLICATION À L'OPTIMISATION VECTORIELLE"

SOUTENUE LE 12 Avril 1984 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

MMM. S. NIANG	Président
C. BADJI	Examinateurs
A. COSTE	
E. FEDIDA	
H. SEYDI	
D.S. THIAM	

A ma mère

BIGUE SOW

" .... Celle qui s'élance à l'appel de mes peines

Celle qui s'appelle Amour des autres

Celle qui s'illumine au bonheur d'un enfant

C'est toi, maman

La mère au regard de paix ."

<u>David DIOP</u>

Ma reconnaissance va, en premier, à Monsieur le Professeur Sakhir THIAM qui a bien voulu m'accepter dans son groupe de mathématiques de la décision. Il a dirigé ce travail avec beaucoup de compréhension et m'a fait profité par ses conseils de sa grande compétence.

Je remercie monsieur le Doyen Souleymane NIANG d'avoir bien voulu présider le Jury.

Je remercie messieurs les Professeurs BADJI, COSTE, FEDIDA et SEYDI d'avoir bien voulu accepter de faire partie du Jury.

Je remercie, également, monsieur Maquette THIAM dont les encouragements et conseils ne m'ont jamais fait défaut.

Je remercie tous les membres du groupe de mathématiques de la décision, pour l'ambiance intellectuelle féconde et le climat amical, dans lesquels j'ai pû mener à bout ce travail.

Je remercie le camarade Amath DANSOKHO pour l'intérêt qu'il n'a cessé de porter à ce travail.

Je remercie tous les amis, parents, camarades du PIT-S et de l'UJTAN pour leurs encouragements.

Enfin, je remercie madame Delgado et monsieur Seck pour le soin qu'ils ont apporté à la dactylographie et à la multigraphie de ce travail.

TABLE DES MATIERES

ooOoo

.../...

I N T R O D U C T I O N

L'étude des minima de Paréto revêt une grande importance en économie mathématique ; puisque l'optimisation simultanée de plusieurs fonctions-objectifs ou critères n'a pas en général de solution. On est donc ramené, à chercher des valeurs des critères telles que ces dernières ne prennent aucune autre valeur "plus petite", c'est-à-dire des minima de Paréto des fonctions objectifs.

Nous partons, dans ce travail, d'une idée du Professeur D.S. THIAM, consistant à approcher les fonctions convexes vectorielles par des fonctions polyèdrales. La notion de convergence des ensembles introduite par Kuratowski et développée pour les fonctions, par Wijsman, a été l'outil utilisé pour l'obtention des théorèmes d'approximation.

Cette méthode d'étude des minima de Paréto des fonctions convexes s.c.i. vectorielles permet de se ramener

.../...

à l'étude des minima de Paréto de fonctions polyèdrales vectorielles donc à un programme de type programmation linéaire. Ainsi, cette méthode se prête-t-elle bien à une résolution numérique.

Le travail est composé comme suit. Dans la première partie, nous caractérisons les minima de Paréto d'un ensemble polyèdral quelconque (proposition I.10.).

La seconde partie est consacrée à l'étude des fonctions polyèdrales vectorielles, à la caractérisation de leurs minima de Paréto (proposition II.17) et à l'établissement d'une formule de type Kuhn et Tucker (théorème II.18).

Dans la troisième partie, nous étudions les propriétés de la convergence au sens des ensembles, de parties convexes fermées et nous en déduisons un théorème d'approximation des fonctions convexes s.c.i. vectorielles par des fonctions polyèdrales convexes (proposition III.26).

Dans la quatrième partie, nous utilisons l'existence d'une approximation polyèdrale pour les fonctions convexes s.c.i. propres pour démontrer le théorème de Fenchel généralisé proposé par C. Gros dans [3] .

La cinquième partie rassemble une étude des minima de Paréto d'ensembles convexes fermées non vides à cônes asymtotiques contenant $\mathbb{R}^k_+$, mis en évidence dans la première partie et deux conditions suffisantes d'existence de minima de Paréto de fonctions convexes vectorielles généralisant des résultats obtenus dans le cas scalaire.

PARTIE I

MINIMA DE PARETO ET ENSEMBLES POLYEDRAUX

1. Notations et définitions

Nous rappelons dans ce paragraphe, les notations et définitions, utilisées dans la suite de ce travail. Nous adoptons les notations de l'article de C. Gros [3].

a) Relations d'ordre sur $\mathbb{R}^k$

Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}^k$, avec $x = (x_1, \dots, x_k)$ et $y = (y_1, \dots, y_k)$ nous écrivons :

$x \leqq y$ si $x_i \leq y_i$ pour tout $i \in \{1,\dots,k\}$

$x \leq y$ si $x \leqq y$ et il existe un indice i_o tel que $x_{i_o} < y_{i_o}$

$x < y$ si $x_i < y_i$ pour tout $i \in \{1,\dots,k\}$

$x \nleq y$ si on n'a pas $x \leq y$

.../..

b) Notations

On note Θ_+ et Θ_- les ensembles suivants :

$\Theta_+ = \{ a \in \mathbb{R}^k \;/\; a \geq 0 \}$; c'est le semi-orthant positif

$\Theta_- = \{ a \in \mathbb{R}^k \;/\; 0 \geq a \}$; c'est le semi-orthant négatif.

On a $\Theta_- = -\Theta_+$

Si A est une partie nonvvide de $\mathbb{R}^k$, on pose

$$A^+ = A + \Theta_+ \quad \text{et} \quad A^- = A + \Theta_-$$

c) Remarques

Les ensembles Θ_+ et Θ_- sont convexes.

Si A est un convexe alors A^+ et A^- sont convexes.

2. Minima de Paréto

a) Majorants et minorants

- Définitions

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^k$.

Un élément b de $\mathbb{R}^k$ est dit majorant de A, si pour tout $a \in A$, on a $b \geq a$.

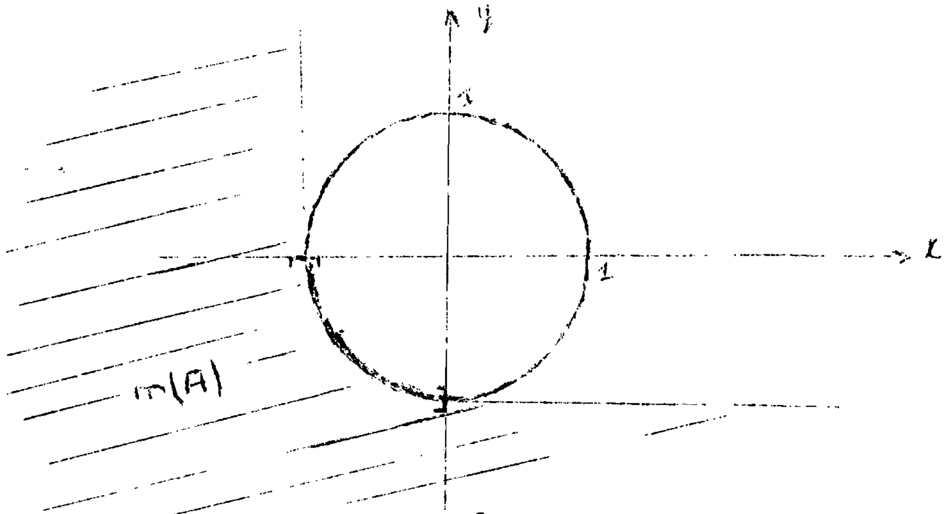
Un élément c de $\mathbb{R}^k$ est dit minorant de A, si pour tout $a \in A$, on a $a \geq c$.

On note $M(A)$ l'ensemble des majorants de A et $m(A)$ l'ensemble des minorants de A.

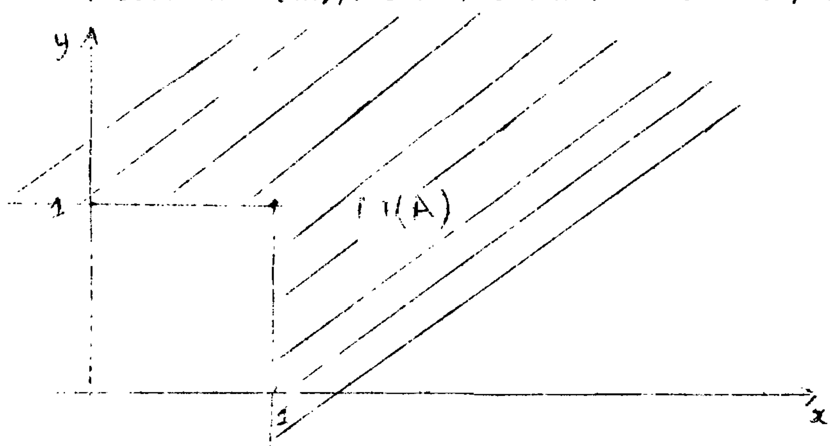
.../...

- Exemples

1) Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 1\}$



2) Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leq x \leq 1 \;\text{ et }\; 0 \leq y \leq 1\}$



Proposition I.1

$M(A)$ est le complémentaire de A^- dans $\mathbb{R}^k$

$m(A)$ est le complémentaire de A^+ dans $\mathbb{R}^k$.

Preuve

Montrons par exemple la première égalité.

$b \in M(A)$ équivaut à pour tout $a \in A$ et pour tout $\lambda \in \Theta_-$ on a $a + \lambda \neq b$, soit b est un élément du complémentaire de A^-.

.../...

Proposition I.2

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^k$ on a

$$-A^+ = (-A)^- \qquad et \qquad M(A) = -m(-A).$$

Preuve

On a $(-A)^- = -A + \Theta_-$ soit $(-A)^- = -(A + \Theta_+)$

d'où $(-A)^- = -A^+$.

Soit $b \in M(A)$ alors pour tout $a \in A$ et $\lambda \in \Theta_+$ on a

$b \nleq a - \lambda$ soit $-b \nleq -a + \lambda$ donc

$-b \notin (-A)^+$ d'où $b \in -m(-A)$ et réciproquement

b) Borne supérieure et inférieure d'une partie non vide de $\mathbb{R}^k$ au sens de Paréto

Si A est une partie de $\mathbb{R}^k$, la notation $\overline{A}$ désigne l'adhérence de A, pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}^k$.

- Borne inférieure de A :

A étant une partie non vide de $\mathbb{R}^k$, nous appelons borne inférieure de A au sens de Paréto, l'ensemble noté INF(A) et défini par

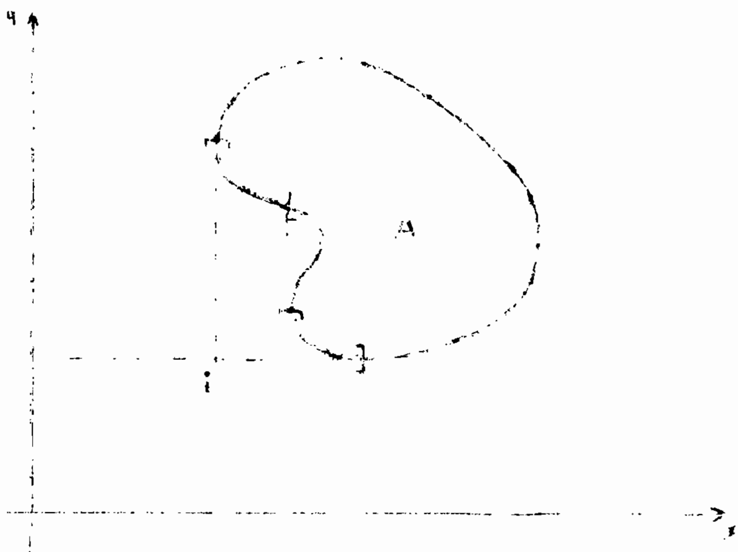
$$INF(A) = \overline{A^+} \bigcap m(\overline{A^+})$$

- Borne supérieure de A :

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^k$, nous appelons borne supérieure de A au sens de Paréto, l'ensemble noté SUP(A) et défini par :

$$SUP(A) = \overline{A^-} \bigcap M(\overline{A^-})$$

.../...



Sur cette figure $INF(A)$ est représentée en couleur foncée ; I est la borne inférieure pour l'ordre naturel de $\mathbb{R}^2$.

Remarque : $INF(A) = - SUP(-A)$

En effet $INF(A) = - \left[\overline{- A^+} \bigcap \left(-m(\overline{A^+})\right) \right]$

$= - \left[\overline{(-A)^-} \bigcap M\left(\overline{(-A)^-}\right) \right]$ d'après la proposition I.2.

Soit $INF(A) = -SUP(-A)$.

Ainsi dans la suite de ce travail, nous n'étudierons que $INF(A)$.

Proposition I.3 (Propriété de saturation).

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}^k$ telles que : $A \subset B \subset \overline{A^+}$, alors on a :

$$INF(A) = INF(B).$$

Preuve

D'abord, montrons que $\overline{\left(\overline{A^+}\right)}^+ = \overline{A^+}$

On a l'inclusion triviale suivante

$$\overline{A^+} \subset \overline{\left(\overline{A^+}\right)}^+$$

.../...

Maintenant soit $\alpha \in \overline{(\overline{A^+})^+}$, il existe une suite d'éléments (z_n) de $(\overline{A^+})^+$ telle que $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = \alpha$;
z_n s'écrit $z_n = y_n + \lambda_n$ avec $y_n \in \overline{A^+}$ et $\lambda_n \in \Theta_+$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $a_n \in A$ et $\nu_n \in \Theta_+$ tels $\|y_n - (a_n + \nu_n)\| \leqslant \frac{1}{2^n}$. Posons $\alpha_n = a_n + \nu_n + \lambda_n$ alors $\alpha_n \in A^+$ et on a $\|\alpha_n - \alpha\| \leqslant \|\alpha_n - z_n\| + \|z_n - \alpha\|$

soit $\|\alpha_n - \alpha\| \leqslant \frac{1}{2^n} + \|z_n - \alpha\|$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = \alpha$ soit $\alpha \in \overline{A^+}$

Comme $A \subset B \subset \overline{A^+}$ on a $A^+ \subset B^+ \subset (\overline{A^+})^+$

soit $\overline{A^+} \subset \overline{B^+} \subset \overline{(\overline{A^+})^+} = \overline{A^+}$

d'où $INF(A) = INF(B)$

Corollaire I.4

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^k$ on a :

$$INF(A) = INF(\overline{A}) = INF(\overline{A^+})$$

Preuve

Nous avons $A \subset \overline{A} \subset \overline{A^+}$; on applique la proposition précédente.

Proposition I.5

A est une partie non vide de $\mathbb{R}^k$. Si $INF(A)$ est non vide alors $INF(A) = \overline{A} \cap m(\overline{A^+})$.

Preuve

Comme $\overline{A} \subset \overline{A^+}$ alors $\overline{A} \cap m(\overline{A^+}) \subset INF(A)$.

.../...

Soit $\alpha \in \mathrm{INF}(A)$ alors $\alpha \in \overline{A^+} \cap C_{\mathbb{R}^k}\left[\overline{(A^+)}^+\right]$

d'où pour tout $a \in \overline{A^+}$, pour tout $\nu \in \Theta_+$, on a $\alpha \neq a + \nu$.

Soient (a_n) une suite d'éléments de A, (ν_n) une suite d'éléments de Θ_+ telles que $(a_n + \nu_n)$ admette une limite. Soit ν un élément de Θ_+. On a

$$\alpha \neq \lim_{n \to +\infty} (a_n + \nu_n + \nu) .$$

Donc pour tout $a_n \in A$ et $\mu_n \in \Theta_+$ tels que $\lim_{n \to +\infty} (a_n + \mu_n) = \alpha$, il n'existe pas un élément μ de Θ_+ tel que à partir d'un certain rang $\mu_n \geq \mu$ d'où $\lim_{n \to +\infty} \mu_n = 0$.

On en déduit que (a_n) converge et $\lim_{n \to +\infty} a_n = \alpha$; soit $\alpha \in \overline{A}$

c) Borne inférieure d'une application

Soit f une application de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$, on appelle borne inférieure de f au sens de Paréto (respectivement borne supérieure de f), l'ensemble noté $\mathrm{INF}(f)$ (resp. $\mathrm{SUP}(f)$) et défini par :

$\mathrm{INF}(f) = \mathrm{INF}\,\{f(x) \;/\; x \in \mathbb{R}^n\}$ (resp. $\mathrm{SUP}(f) = \{ f(x) \;/\; x \in \mathbb{R}^n \}$)

3. Ensembles polyèdraux : caractérisation de la borne inférieure d'un ensemble polyèdral

a) Ensembles polyèdraux de $\mathbb{R}^k$

- Définition

Un sous-ensemble P de $\mathbb{R}^k$ est dit polyèdral s'il existe un nombre fini d'éléments (c_i, d_i) de $\mathbb{R}^k \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$ avec $i = 1,\dots, s$ tels que :

$$P = \{ y \in \mathbb{R}^k \;/\; c_i y \geq \alpha_i \;;\; i = 1,\dots,n\} .$$

.../...

$\mathbb{R}^{k*}$ désigne le dual de $\mathbb{R}^k$

Nous énonçons les propositions suivantes dont nous aurons besoin par la suite (voir [9] Stoer-Witzgall, chap. 2).

Proposition I.6

Un ensemble polyèdral est convexe et fermé.

Proposition I.7

Soit P un ensemble polyèdral de $\mathbb{R}^k$.

L une application affine de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^s$ et

T une application affine de $\mathbb{R}^h$ dans $\mathbb{R}^k$ alors

$L(P)$ et $T^{-1}(P)$ sont des ensembles polyèdraux.

Proposition I.8

Un ensemble P est polyèdral si et seulement si il existe un nombre fini de points $x_1, \dots, x_s$ de P et des éléments $v_{s+1}, \dots, v_r$ de $\mathbb{R}^k$ tels que

$$P = \{ \sum_{i=1}^{s} \lambda_i x_i + \sum_{i=s+1}^{r} \mu_i v_i \;/\; \lambda_i \geq 0 \;,\; \mu_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1 \}$$

Proposition I.9

Si P et Q sont des ensembles polyèdraux alors $P + Q$ est un ensemble polyèdral.

b) Caractérisation de la borne inférieure (INF) d'un ensemble polyèdral

Théorème I.10

Soit P un ensemble polyèdral non vide de $\mathbb{R}^k$.

Si $INF(P)$ est non vide, on a :

un élément appartient à $INF(P)$ si et seulement si :

.../...

(i) *il existe* $c \in \mathbb{R}^k$ *tel que* $o < c$

(ii) $\alpha \in P$

(iii) ${}^t c\alpha \leqslant {}^t ca$ *pour tout* $a \in P$.

Preuve

Les conditions sont suffisantes :

Soit $y \in \overline{P^+}$ alors $y = \lim\limits_{n \to +\infty} (a_n + \nu_n)$ avec $a_n \in P$ et $\nu_n \in \Theta_+$.

D'après *(iii)* ${}^t c\alpha \leqslant {}^t ca_n$ donc ${}^t c\alpha \leqslant {}^t ca_n + {}^t c\nu_n$

d'où ${}^t c\alpha \leqslant {}^t cy$

Comme $o < c$, on n'a pas $y \leq \alpha$ donc

$\alpha \in m(\overline{P^+})$ or $\alpha \in P$ d'après *(i)*

d'où $\alpha \in \overline{P} \cap m(\overline{P^+})$, soit $\alpha \in$ INF(P

selon la proposition 1.5.

Les conditions sont nécessaires

On a $\overline{P^+} = P + \mathbb{R}^k_+$; en effet

$P + \mathbb{R}^k_+ = P \cup (P + \Theta_+) = P \cup P^+$

or P et P^+ sont contenus dans $\overline{P^+}$ d'où

$P + \mathbb{R}^k_+ \subset \overline{P^+}$.

Comme $P^+ \subset P + \mathbb{R}^k_+$ on a

$\overline{P^+} \subset \overline{P + \mathbb{R}^k_+}$

or P et $\mathbb{R}^k_+$ sont polyèdraux donc d'après la proposition 1.6 . $P + \mathbb{R}^k_+$ est fermé, soit

$\overline{P^+} \subset P + \mathbb{R}^k_+$.

Donc $P + \mathbb{R}^k_+ = \overline{P^+}$

.../...

Comme $\overline{P^+}$ est polyédral, on a :

$\overline{P^+} = \{y \,/\, c_j y \geq d_j \;;\; j=1,\ldots,r\}$ avec $c_j \in \mathbb{R}^{k^*} \setminus \{o\}$,

$d_j \in \mathbb{R}$ et $o \leq c_j$ pour $j = 1,\ldots,r$.

Soit $\alpha \in INF(P)$ et $I = \{ i \in \{1,\ldots,r\} \,/\, c_i\alpha = d_i\}$.

I est non vide puisque α n'appartient pas à l'intérieur de $\overline{P^+}$.

Supposons que toutes les composantes d'indice k_o de c_i, pour tout $i \in I$, sont nulles. Comme pour tout i n'appartenant pas à I, $c_i\alpha > d_i$, si

$$e_{k_o} = \left(\delta^1_{k_o}, \delta^2_{k_o}, \ldots, \delta^{k_o}_{k_o}, \ldots \delta^n_{k_o}\right) \text{ où } \delta^i_j \text{ désigne}$$

le symbole de Kronecker, alors il existe $t_o > o$ tel que

$\alpha - t_o e_{k_o} \in \overline{P^+}$ donc α n'appartient pas à $m(\overline{P^+})$;

donc les composantes des c_i pour $i \in I$ ne peuvent être tous nuls en même temps.

Si on pose $c = \sum_{i \in I} c_i$, alors on a :

$$o < c \text{ soit } \textit{(i)}$$

Soit $y \in P$ $\quad {}^t cy = \sum_{i \in I} {}^t c_i y \geq \sum_{i \in I} d_i = {}^t c\alpha$

d'où ${}^t cy \geq {}^t c\alpha$ d'où *(iii)*

Comme $\alpha \in INF(P)$ alors $\alpha \in \overline{P} = P$ soit *(ii)* .

Ce qui achève la preuve.

PARTIE II

MINIMA DE PARETO DE FONCTIONS POLYEDRALES VECTORIELLES

L'ensemble $\overline{\mathbb{R}^k}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}^k$ auquel, on a adjoint les deux éléments $+\infty$ et $-\infty$ qui vérifient : pour tout $x \in \mathbb{R}^k$:

$$x < +\infty \quad ; \quad -\infty < x$$

$$x + \infty = +\infty \quad ; \quad x + (-\infty) = -\infty$$

$$+\infty + (-\infty) = (-\infty) + \infty = +\infty$$

1. Fonctions convexes vectorielles

a) Définitions

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^k}$; f est dite convexe si: pour tous x, y éléments de $\mathbb{R}^n$, α, β éléments positifs de $\mathbb{R}$ tels que $\alpha + \beta = 1$; on a :

$$f(\alpha x + \beta y) \leqq \alpha f(x) + \beta f(y).$$

.../...

- Exemple

Soient $f_1, \dots, f_k$ des fonctions convexes propres de $\mathbb{R}^n$ dans $\overline{\mathbb{R}}$; soit f la fonction définie par

$f(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))$ si $f_i(x) < +\infty$ pour $i = 1, \dots, k$ et $f(x) = +\infty$ s'il existe i_o tel que $f_{i_o}(x) = +\infty$.

La fonction f ainsi définie est convexe.

Si f est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^k$ nous définissons les ensembles suivants :

- Domaine de f : Nous appellerons domaine de f et nous noterons dom f l'ensemble dom $f = \{ x \in \mathbb{R}^n \ / \ f(x) < +\infty \}$.

- Epigraphe de f : Nous désignerons par épigraphe de f l'ensemble noté épi(f) et défini par

$$\text{épi}(f) = \{ (x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \ / \ f(x) \leqq \lambda \}$$

- Hypographe de f est l'ensemble noté hypo(f) et défini par $\text{hypo}(f) = \{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \ / \ \lambda \leqq f(x)\}$.

- Définition

Nous dirons qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^k}$ est concave si : pour tous x et y éléments de $\mathbb{R}^n$, pour tous α, β éléments de $\mathbb{R}_+$ tels que $\alpha + \beta = 1$; on a

$$\alpha f(x) + \beta f(y) \leqq f(\alpha x + \beta y)$$

Une fonction convexe f (resp. concave) est dite propre si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $-\infty < f(x)$ (resp. $f(x) < +\infty$) et il existe $x_o \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x_o) < +\infty$ (resp. $-\infty < f(x_o)$).

.../...

b) Proposition II.11

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^k}$; f est convexe (resp. concave) si et seulement si épi(f) (resp. hypo(f)) est un ensemble convexe.

Preuve

On fait la preuve pour f convexe.

Supposons que f soit convexe. Soient (x,λ) et (y, μ) des éléments de épi(f) ; α,β des réels positifs tels que $\alpha + \beta = 1$.

Nous avons $f(\alpha x + \beta y) \leqq \alpha f(x) + \beta f(y)$ or

$f(x) \leqq \lambda$ et $f(y) \leqq \mu$ soit $f(\alpha x + \beta y) \leqq \alpha\lambda + \beta\mu$.

donc $(\alpha x + \beta y , \alpha\lambda + \beta\mu) \in$ épi(f)

soit $\alpha(x,\lambda) + \beta(y, \lambda) \in$ épi(f)

Réciproquement supposons que épi(f) soit convexe. Soient x,y éléments de $\mathbb{R}^n$, $\alpha , \beta \geqslant 0$ et $\alpha + \beta = 1$; si l'un des éléments $f(x)$ et $f(y)$ vaut $+\infty$ alors nous avons

$$f(\alpha x + \beta y) \leqq \alpha f(x) + \beta f(y) .$$

Sinon, soient $a,b \in \mathbb{R}^k$ tels que $f(x) \leqq a$ et $f(y) \leqq b$

alors $(\alpha x + \beta y, \alpha a + \beta b) \in$ épi(f)

d'où $f(\alpha x + \beta y) \leqq \alpha a + \beta b$; faisons tendre respectivement a et b vers $f(x)$ et $f(y)$, nous obtenons

$$f(\alpha x + \beta y) \leqq \alpha f(x) + \beta f(y) .$$

.../...

2. Fonctions semi-continues inférieurement (s.c.i.)

a) Définition

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ est dite s.c.i. si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^k$, $f^{-1}\left[\{z \in \mathbb{R}^k \ / \ z > \lambda\}\right]$ est un ouvert dans $\mathbb{R}^n$.

- Remarque

En posant $+\infty = (+\infty, +\infty, \dots, +\infty)$ et $-\infty = (-\infty, \dots, -\infty)$ cette définition équivaut à chacune des composantes de f est s.c.i.

b) Cette remarque permet de passer des propriétés des fonctions s.c.i. de $\mathbb{R}^n$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ aux fonctions s.c.i. de $\mathbb{R}^n$ dans $\overline{\mathbb{R}^k}$. Nous énonçons la proposition suivante :

Proposition II.12

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}^k}$; les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est s.c.i.

(ii) épi(f) est fermé

(iii) Pour toute suite (x_n) d'éléments de $\mathbb{R}^n$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \bar{x}$, nous avons $\underline{\lim}\ f(x_n) \geq f(\bar{x})$

Définition

Une fonction est dite s.c.s. (semi-continue supérieurement) si $(-f)$ est s.c.i.

3. Fonctions polyèdrales vectorielles

a) Définition

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ une fonction. On dit que f est polyèdrale vectorielle convexe (resp. concave) si épi(f) (resp. hypo(f)) est un ensemble polyèdral.

.../...

-Remarque

Une fonction polyèdrale convexe est s.c.i.

Une fonction polyèdrale concave est s.c.s.

b) Caractérisation

Proposition II.13

Une fontion f de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}^k}$ est polyèdrale vectorielle convexe si chacune de ses composantes est polyèdrale convexe de $\mathbb{R}^n$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Preuve

Soient $X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_k$; k copies de $\mathbb{R}$ et f_i l'application coordonnée n° i de f avec $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow X_i$. Notons $\Pi_{\mathbb{R}^n \times X_i}$ la projection de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ sur $\mathbb{R}^n \times X_i$; nous avons $\Pi_{\mathbb{R}^n \times X_i}\left[\text{épi}(f)\right] = \text{épi}(f_i)$

En effet soit $(x,y_i) \in \Pi_{\mathbb{R}^n \times X_i}\left[\text{épi}(f)\right]$ alors il existe $(x,y) \in \text{épi}(f)$ avec y_i comme $i^{\text{ième}}$ composante de y . Comme $f(x) \leqq y$ alors $f_i(x) \leqq y_i$ soit $(x,y_i) \in \text{épi}(f_i)$.

Réciproquement soit $(x,y_i) \in \text{épi}(f_i)$ posons $y_j = f_j(x)$ pour $j \neq i$ et $j = 1, \ldots, k$, nous avons

$$f(x) \leqq y \quad \text{et} \quad (x,y_i) = \Pi_{\mathbb{R}^n \times X_i}(x,y)$$

$$\text{d'où} \qquad (x,y_i) \in \Pi_{\mathbb{R}^n \times X_i}\left[\text{épi}(f)\right] .$$

Comme $\Pi_{\mathbb{R}^n \times X_i} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n \times X_i$ est linéaire alors d'après la proposition I.7. $\Pi_{\mathbb{R}^n \times X_i}\left[\text{épi}(f)\right]$ est polyèdral, donc $\text{épi}(f_i)$ est un ensemble polyèdral soit f_i

.../...

est une fonction polyèdrale de $\mathbb{R}^n$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Remarque

Nous avons un résultat analogue pour les fonctions polyèdrales concaves.

Corollaire II.14

f est une fonction polyèdrale convexe de $\mathbb{R}^n$ dans $\overline{\mathbb{R}^k}$ si et seulement si il existe un ensemble polyédral Ω de $\mathbb{R}^n$ tel que les fonctions composantes de f s'écrivent :

$$\begin{cases} f_i(x) = \max\limits_{1 \leq j \leq k} b_{i_j} x + d_{i_j} & x \in \Omega \\ \\ f_i(x) = +\infty & x \notin \Omega \end{cases}$$

$$\text{avec} \quad b_{i_j} \in \mathbb{R}^{n*} \quad \text{et} \quad d_{i_j} \in \mathbb{R}$$

Preuve

Cette proposition découle de la proposition II.13 et de l'égalité $\Pi_{\mathbb{R}^n \times X_i} \left[\text{épi}(f) \right] = \text{épi}(f_i)$

4. Borne inférieure d'une fonction polyèdrale vectorielle convexe

Lorsque f est une fonction convexe (resp. concave) propre à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}^k}$, on définit la borne inférieure de f (resp. la borne supérieure) par $\text{INF}(f) = \text{INF}\ \{f(x) \ / \ x \in \text{dom } f\}$ (resp. $\text{SUP}(f) = \text{SUP}\ \{f(x) \ / \ x \in \text{dom } f\}$).

Proposition II.15

Soit f une fonction polyèdrale vectorielle convexe propre (resp. concave propre), si INF(f) (resp. SUP(f)) est non vide alors f atteint tout point de

INF(f) (resp. SUP(f)).

.../...

Preuve

Nous faisons la preuve pour f polyèdrale convexe propre. Posons $F = \{ f(x) \,/\, x \in \mathrm{dom}\, f \}$; on a $\overline{F^+} = \Pi_{\mathbb{R}^k}(\text{épi } f)$.

En effet $F^+ \subset \Pi_{\mathbb{R}^k}$ (épi f) ; comme épi f est un ensemble polyèdral convexe, $\Pi_{\mathbb{R}^k}$ (épi f) est aussi polyèdral donc fermé d'où

$$\overline{F^+} \subset \Pi_{\mathbb{R}^k}(\text{épi } f).$$

Comme $F \cup F^+ = \Pi_{\mathbb{R}^k}(\text{épi } f)$ et $F \cup F^+ \subset \overline{F^+}$, on a $\Pi_{\mathbb{R}^k}$ (épi f) $\quad \overline{F^+}$ d'où l'égalité annoncée.

Or $\Pi_{\mathbb{R}^k}$ (épi f) $= F + \mathbb{R}^k_+$ donc $\overline{F^+} = F + \mathbb{R}^k_+$

Soit $\alpha \in \mathrm{INF}(f)$ alors $\alpha = f(\overline{x}) + \nu$ avec $0 \leqq \nu$ donc $\nu = 0$ d'où $\alpha = f(\overline{x})$. Ce qui achève la preuve.

Proposition II.16

Soit f une fonction polyèdrale vectorielle convexe (resp. concave) propre, si $\mathrm{INF}(f)$ (resp. $\mathrm{SUP}(f)$) est non vide alors on a :

$$\overline{F^+} = \mathrm{INF}(f) + \mathbb{R}^k_+ \quad (\text{resp. } \overline{F^-} = \mathrm{SUP}(f) + \mathbb{R}^k_-)$$

Preuve

Soit f une fonction polyèdrale alors d'après la preuve de la proposition précédente on a :

$\overline{F^+} = \Pi_{\mathbb{R}^k}$ (épi f) ; donc $\overline{F^+}$ est un convexe polyèdral.

Ecrivons $\overline{F^+} = \{ y \,/\, {}^t c_j \, y \geqslant \alpha_j \,,\ i = o,\dots,h \}$ avec

$$c_j \in \mathbb{R}^k \quad \text{et} \quad 0 \leq c_j \quad \text{pour } i = o,\dots,h \,.$$

Posons $H_i = \{ y \,/\, {}^t c_i \, y = \alpha_i \}$ pour $i = o,\dots,h$.

.../...

Comme $INF(f)$ est non vide, il existe une partie I de $\{1,\dots,h\}$ telle que $0 < \sum_{i \in I} C_i$ (1), d'après la proposition I.10 .

Soit $y \in \overline{F^+}$, si $y \in INF(f)$ le problème est résolu. Sinon il existe $t_o > o$ et $i_o \in \{1,\dots,k\}$ tels que

$y_o = y - t_o e_{i_o}$ soit un élément de $H_{h_o} \cap \overline{F^+}$ $h_o \in \{1,\dots,h\}$

Si $0 < c_o$ alors $y_o \in INF(f)$, sinon d'après (1) il existe $h_1 \in \{1,\dots,h\}$, $i_1 \in \{1,\dots,k\}$ et $t_1 > 0$ tels que $y_1 = y_o - t_1 e_{i_1} \in H_{h_1} \cap H_o \cap \overline{F^+}$, comme I est fini cette procédure est finie et $\left(\bigcap_{l=o}^{h} H_l \right) \cap \overline{F^+}$

est constitué d'éléments de $INF(f)$, donc y est un élément de $INF(f) + \mathbb{R}^k_+$.

Proposition II.17

Soit f une fonction polyèdrale vectorielle convexe propre de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}^k}$; α appartient à $INF(f)$ si et seulement si il existe

$\bar{x} \in dom\ f$ *et* $c \in \mathbb{R}^k$ *tels que :*

(i) $\alpha = f(\bar{x})$

(ii) $0 < c$

(iii) ${}^t c\, f(\bar{x}) = \inf_{x \in dom\ f} {}^t c\, f(x)$

Preuve

Cette proposition découle des propositions I.10 , II.15 et II.16.

.../...

5. Multiplicateurs de Kuhn et Tucker d'un programme polyèdral de Paréto

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\overline{\mathbb{R}^k}$ définie par :

$$f(x) = \left[\max_{1 \leq j \leq \ell_i} (B_{i_j} X + d_{i_j}) \right]_{1 \leq i \leq k}$$

$$\text{si} \quad A_i X \leqslant c_i \qquad \text{pour } i = 1,\dots,r$$

$$\text{et} \quad A_i X = c_i \qquad \text{pour } i = r+1,\dots,s .$$

$f(x) = +\infty$ si X ne satisfait pas aux conditions précédentes.

Les éléments B_{i_j} et A_i sont des matrices lignes avec n colonnes ; X est la matrice colonne du vecteur x de $\mathbb{R}^n$ et d_{i_j}, c_i sont des réels.

Nous considérons le programme de Paréto polyèdral suivant

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \text{INF } f(x) \\ x \in \text{dom } f \end{cases}$$

On dit que $\bar{x}$ est une solution de $(\mathcal{P})$ si :

$$\bar{x} \in \text{dom } f \quad \text{et} \quad f(\bar{x}) \in \text{INF } f(x).$$

- Condition de qualification

Nous supposons qu'il existe $x_o \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$(CQ) \quad \begin{cases} A_i\, x_o < c_i & \text{pour } i = 1,\dots, r \\ A_i\, x_o = c_i & \text{pour } i = r+1,\dots,s \\ \{A_{r+1},\dots,A_s\} & \text{est libre.} \end{cases}$$

.../...

Théorème II.18

Si la condition de qualification (CQ) est satisfaite ; un point $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ *est solution de* $(\mathcal{P})$ *si et seulement si il existe* $\eta_1 > 0, \dots, \eta_k > 0$, $p_1 \geq 0, \dots, p_r \geq 0$ *et* $q_{r+1}, \dots, q_s$ *réels tels que :*

(I) *Pour tout* $(j_1, \dots, j_k) \in [1,\nu_1] \times \dots \times [1,\nu_k]$

$$\sum_{i=1}^{k} \eta_i B_{i j_i} + \sum_{i=1}^{r} p_i A_i + \sum_{i=r+1}^{s} q_i A_i = 0$$

(II) *Pour tout* $i \in \{1,\dots,r\}$

$$p_i \cdot (A_i \bar{X} - C_i) = 0$$

Remarque

D'après la proposition II.17, les éléments $\alpha \in \mathrm{INF}(f)$ sont de la forme $\alpha = f(\bar{x})$. Ainsi le théorème II.19 permet d'obtenir tous les éléments de INF(f).

Preuve

D'après P.II.17 une condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{x}$ soit solution de $(\mathcal{P})$ est qu'il existe $\eta_1 > 0, \dots, \eta_k > 0$ tels que :

$$\eta f(\bar{x}) = \min_{x \in \mathrm{dom}\, f} \eta f(x) \quad \text{avec} \quad \eta = (\eta_1, \dots, \eta_k)$$

.../...

on a $$\eta f(x) = \sum_{i=1}^{k} \eta_i \max_{1 \leq j \leq \nu_i} (B_{ij} X + d_{ij})$$

$$= \max_{(j_1,\dots,j_k) \in [1,\nu_1] \dots [1,\nu_k]} \left[\sum_{i=1}^{k} (\eta_i B_{ij_i} X + \eta_i d_{ij_i}) \right]$$

pour $A_i X \leq C_i \quad i=1,-,r$

$A_i X = C_i \quad i=r+1,-,r.$

Les hypothèses de qualification étant satisfaites, comme $x \longrightarrow \eta f(x)$ est convexe ; $\eta f(\overline{x}) = \min_{x \in \text{dom} f} \eta f(x)$ si et seulement si il existe des multiplicateurs de Kuhn et Tucker, $p_1 \geq o ,-, p_r \geq o$ et $q_{r+1},-, q_s$ réels tels que si

$$L(x,p,q) = \eta f(x) + \sum_{i=1}^{r} p_i (A_i X - C_i) + \sum_{i=r+1}^{s} q_i (A_i X - C_i)$$

on a : (I) $L(\overline{x},p,q) = \inf L(x,p,q)$

(II) $P_i.(A_i \overline{X} - C_i) = 0$ pour $i = 1,-, r$

$$L(x,p,q) = \max_{(j_1,\dots,j_k) \in [1,\nu_1] \times \dots \times [1,\nu_k]} \left[\sum_{i=1}^{k} (\eta_i B_{ij_i} X + \eta_i d_{ij_i}) + \sum_{i=1}^{r} p_i (A_i X - C_i) + \sum_{i=r+1}^{s} q_i (A_i X - C_i) \right]$$

.../...

$$L(x,p,q) = \max \left[\left(\sum_{i=1}^{k} \eta_i B_{i j_i} + \sum_{i=1}^{r} p_i A_i + \sum_{i=r+1}^{s} q_i A_i \right) X \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{k} \eta_i d_{i j_i} - \sum_{i=1}^{r} q_i C_i - \sum_{i=r+1}^{s} q_i C_i \;) \right]$$

$$(j_1 ,-, j_k) \in [1,\nu_1] \times \ldots \times [1,\nu_k]$$

or $\inf L(x,p,q)$ est fini si et seulement si pour tout

$$(j_1 ,-, j_k) \in [1,\nu_1] \times \ldots \times [1,\nu_k]$$

on a $$\sum_{i=1}^{k} \eta_i B_{i j_i} + \sum_{i=1}^{r} p_i A_i + \sum_{i=r+1}^{s} q_i A_i = 0$$

en effet si pour $(j_1 ,-, j_k) \in [1,\nu_1] \times \ldots \times [1,\nu_k]$ et $x_o \in \mathbb{R}^n$

on a $$\ell_o = \left(\sum_{i=1}^{k} \eta_i B_{i j_i} + \sum_{i=1}^{r} p_i A_i + \sum_{i=r+1}^{s} q_i A_i \right) X_o < 0$$

on a $L(\overline{x},p,q) \leqslant L(tX_o,p,q) \leqslant t\, \ell_o$ + constante

pour tout $t > o$; ce qui est impossible.

C.Q.F.D.

Lorsque f est affine et s'écrit $f(x) = (B_i x + d_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$,

on a le Corollaire suivant :

<u>*Corollaire II.19*</u>

Si la condition de qualification (CQ) est satisfaite ; un point $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ est solution de $(\mathcal{Y})$ si et seulement si il existe $\eta_1 > o ,-, \eta_k > o$, $p_1 \geqslant o ,-, p_r \geqslant o$ et

.../...

$q_{r+1}, \ldots, q_s$ réels tels que :

$$(I) \qquad \sum_{i=1}^{k} \eta_i B_i + \sum_{i=1}^{r} p_i A_i + \sum_{i=r+1}^{s} q_i A_i = 0$$

(II) pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$

$$p_i \cdot (A_i \overline{X} - C_i) = 0 .$$

PARTIE III

APPROXIMATION POLYEDRALE DE FONCTIONS CONVEXES S.C.I. PROPRES

1. Convergence au sens des épigraphes

a) Convergence d'une suite d'ensembles de $\mathbb{R}^k$

Soit (Q_n) une suite de parties de $\mathbb{R}^k$ non vides.

- Limite inférieure de (Q_n)

On appelle limite inférieure de (Q_n) et on note $\underline{\lim}\ Q_n$, l'ensemble des éléments x de $\mathbb{R}^k$ limite de suite (x_n) telle que $x_n \in Q_n$ pour tout entier n.

- Limite supérieure de (Q_n)

On appelle limite supérieure de (Q_n) et on note $\overline{\lim}\ Q_n$, l'ensemble des éléments x de $\mathbb{R}^k$ limite de suite (x_{n_k}) telle que (n_k) est une suite d'entiers strictement croissante et $x_{n_k} \in Q_{n_k}$ pour tout n_k.

.../...

- <u>Remarque</u> 1 : $\underline{\lim}\, Q_n \subset \overline{\lim}\, Q_n$

- <u>Remarque</u> 2 : $\underline{\lim}\, Q_n$ est fermé et si Q_n est convexe pour tout n, nous avons $\underline{\lim}\, Q_n$ convexe.

En effet, soit $a \in \overline{\underline{\lim}\, Q_n}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la boule euclidienne de centre a et de $\frac{1}{n}$ $(B(a,\frac{1}{n}))$ rencontre $\underline{\lim}\, Q_n$, soit x_n un point de cette intersection.

x_n est limite d'une suite (x_k^n) telle que $x_k^n \in Q_k$.
Il existe $k_n \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant k_n$ alors $x_k^n \in B(a,\frac{1}{n})$, en prenant k_{n+1} un entier strictement plus grand que k_n, nous construisons une suite (k_n) strictement croissante.

Définissons (y_k) en posant

pour $k_n \leqslant k < k_{n+1}$ $\qquad y_k = x_k^n$

pour $0 \leqslant k < k_o$ $\qquad y_k = x_k$, x_k un élément quelconque de Q_k.

Nous avons $a = \lim\limits_{k \to +\infty} y_k$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $y_k \in Q_k$

donc $a \in \underline{\lim}\, Q_k$. Donc $\underline{\lim}\, Q_k$ est fermé.

Maintenant, montrons que $\underline{\lim}\, Q_k$ est convexe.

Soient $x, y \in \underline{\lim}\, Q_n$, α, β réels positifs tels que $\alpha + \beta = 1$ on a $x = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$ et $y = \lim\limits_{n \to +\infty} y_n$ avec $x_n, y_n \in Q_n$.

Comme Q_n est convexe $\alpha x_n + \beta y_n \in Q_n$ or

$\lim\limits_{n \to +\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha x + \beta y$ donc $\alpha x + \beta y \in \underline{\lim}\, Q_n$.

- <u>Définition</u>

Soit (Q_n) une suite de parties non vides de $\mathbb{R}^k$; on dit que la suite (Q_n) converge vers la partie Q de $\mathbb{R}^k$ si $\overline{\lim}\, Q_n \subset Q \subset \underline{\lim}\, Q_n$

.../...

Remarque :

Nous avons $Q = \underline{\lim}\ Q_n = \overline{\lim}\ Q_n$ si Q existe. On note $Q = \lim\limits_{n\to+\infty} Q_n$.

Proposition III.20

Soient C_k , $k \in \mathbb{N}$ *et* C *des éléments de* $\mathbb{R}^k$ *non nuls ;*

α_k , $k \in \mathbb{N}$ *et* α *des éléments de* $\mathbb{R}$.

Posons $H_k = \{ y \,/\, {}^tC_k\, y = \alpha_k \}$ *et* $H = \{ y \,/\, {}^tC\, y = \alpha \}$.

Si $\lim\limits_{k\to+\infty} C_k = C$ *et* $\lim\limits_{k\to+\infty} \alpha_k = \alpha$, *alors pour tout* $y \in H$ *il existe une suite strictement croissante d'entiers* n_k *telle que pour tout* k *il existe* $y_{n_k} \in H_{n_k}$ *et* $\lim\limits_{k\to+\infty} y_{n_k} = y$.

Preuve

Soit $y \in H$, supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $k \geq K_\varepsilon$, la boule fermée de centre y et de rayon ε $(B'(y, \varepsilon))$ ne rencontre pas H_k .

Soit $e = (\text{sign } C_1, \ldots, \text{sign } C_k)$ où $\text{sign } C_i$ désigne le signe de C_i si C_i non nul sinon $\text{sign} C_i = 0$.
${}^tc_k\ (y - \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}} e) - \alpha_k$ et ${}^tc_k\ (y + \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}} e) - \sigma_k$ sont de même signe puisque situés dans un même demi-espace ouvert déterminé par H_k . Il existe donc une suite d'entiers n_k strictement croissante pour laquelle les réels ${}^tc_{n_k}\ (y - \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}} e) - \alpha_{n_k}$ et ${}^tc_{n_k}\ (y + \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}} e) - \alpha_{n_k}$ sont strictement positifs ou strictement négatifs.

.../...

Dans le cas positif ; on a ${}^{t}c_{n_k}\, y - \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}\, {}^{t}c_{n_k}\, e > \alpha_{n_k}$

donc par passage à la limite $-\frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}\, {}^{t}c\, e \geq 0$, qui est impossible.

Dans le cas négatif ; on a ${}^{t}c_{n_k}\, y + \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}\, {}^{t}c_{n_k}\, e < \alpha_{n_k}$, en passant à la limite $\frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}\, {}^{t}c\, e \leq 0$, qui est impossible.

Donc il existe une suite d'entiers strictement croissante (n_k) telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B'(y, \frac{1}{k}) \cap H_{n_k}$ est non vide. En prenant y_{n_k} dans $B'(y, \frac{1}{k}) \cap H_{n_k}$, la suite (y_{n_k}) répond au problème.

b) Convergence au sens des épigraphes.

- Définition

Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^k$ convexes (resp. concaves) propres.; nous dirons que f_n converge vers f fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^k$ au sens des épigraphes si $\lim_{n\to+\infty}$ épi (f_n) = épi (f) (resp. $\lim_{n\to+\infty}$ hypo(f_n) = hypo(f)).

On note $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$

- Remarque

D'après les remarques du a), si les fonctions (f_n) sont convexes alors f est convexe. En plus f est s.c.i. quelle que soit la suite (f_n) de fonctions.

Proposition III.21

Soit (f_k) une suite de fonctions convexes s.c.i. propres de $\mathbb{R}^n$ dans $\overline{\mathbb{R}^k}$ convergente vers f telle que $f \leqq f_k$; soit (C_k) une suite d'éléments de Θ_+ convergente vers $C \in \Theta_+$.

Alors ${}^{t}c_k\, f_k$ converge vers ${}^{t}c\, f$.

.../...

Preuve

Montrons que $\text{épi}({}^{+}cf) \subset \underline{\lim}\ \text{épi}({}^{+}c_m\, f_m)$.

Soit $(x,z) \in \text{épi}({}^{+}cf)$ comme ${}^{+}cf(x) \leq z$ on peut prendre $\theta \in \mathbb{R}^k_+$ tel que ${}^{+}c\,[f(x) + \theta] = z$. Il exsite $(x_m, y_m) \in \text{épi}({}^{+}c_n f_n)$ tels que $\lim\limits_{m \to +\infty} (x_m, y_m) = (x, f(x) + \theta)$ puisse que $\text{épi}(f) = \underline{\lim}\ \text{épi}(f_m)$; $\lim\limits_{m \to +\infty} {}^{+}c_m\, y_m = z$.

Comme $f_m(x_m) \leqq y_m$ et $c_m \in \Theta_+$ on a :

${}^{+}c_m\, f_m(x_m) \leq {}^{+}c_m\, y_m$ soit $(x_m\, ,\, {}^{+}c_m\, y_m) \in \text{épi}({}^{+}c_m f_m)$

donc $(x,y) \in \underline{\lim}\ \text{épi}\ ({}^{+}c_m\, f_m)$

Montrons $\overline{\lim}\ \text{épi}({}^{+}c_m\, f_m)$ $\text{épi}({}^{+}c\ f)$.

Soit n_k une suite strictement croissante d'entiers , $((x_{n_k}\, ,\, y_{n_k}))$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ telle que

$(x_{n_k}\, ,\, y_{n_k}) \in \text{épi}({}^{+}c_{n_k}\ f_{n_k})$ et $\lim\limits_{k \to +\infty} (x_{n_k}\, ,\, y_{n_k}) = (x,y)$

On a $y_{n_k} = {}^{+}c_{n_k}\ f_{n_k}(x_{n_k}) + \theta_{n_k}$ avec θ_{n_k} réel positif.

Comme $f \leqq f_{n_k}$ on a

$$ {}^{+}c_{n_k}\ f(x_{n_k}) \leq {}^{+}c_{n_k}\ f_{n_k}(x_{n_k}) + \theta_{n_k} $$

f étant s.c.i. on a

$$ {}^{+}c\ f(x) \leq \underline{\lim}\ {}^{+}c_{n_k}\ f(x_{n_k}) \leq y $$

donc $(x,y) \in \text{épi}({}^{+}cf)$

.../...

2. Approximation polyèdrale de fonctions convexes propres s.c.i.

Soit E une partie de $\mathbb{R}^k$, nous noterons $Aff(E)$ le plus petit espace affine engendré par E et $ri(E)$ l'intérieur relatif de E c'est-à-dire l'intérieur de E considéré comme partie de $Aff(E)$ muni de sa topologie usuelle.

Proposition III.22

Soit E un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^k$; (P_n) une suite de convexes fermés non vides tels que :

(i) $P_n \subset ri(E)$

(ii) $P_n \subset P_{n+1}$

(iii) $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = E$

Alors pour tout $x \in ri(E)$, il existe $N_x \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_x$, alors $x \in P_n$.

Preuve

On peut se restreindre à $Aff(E)$ ou ce qui revient au même, supposer que $\mathring{E} = ri(E)$ ($\mathring{E}$ désigne l'intérieur de E).

Soit $x \in \mathring{E}$ tel que, il existe $N \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \geq N$, $x \notin P_n$, alors il existe $c_n \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ avec $\|C_n\| = 1$ (norme euclidienne) et $C_n\, x < \inf\limits_{y \in P_n} C_n\, y$ (il suffit de séparer le convexe fermé P_n avec le convexe compact $\{x\}$ dans $\mathbb{R}^k$).

Soit (C_{n_k}) une suite convergente vers C extraite de (C_n) alors $C \neq 0$.

Si y est un point de E comme $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = E$ il existe une suite (y_n) telle que $y_n \in P_n$ et $y = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$

.../...

alors $^{+}c_{n_k} x \leq {}^{+}c_{n_k} y_{n_k}$ soit $^{+}cx \leq {}^{+}cy$

d'où $^{+}cx = \inf_{y \in E} {}^{+}cy$ ce qui est impossible puisse que $x \in \mathring{E}$.

Il existe $N_x \in \mathbb{N}$ tel que $x \in P_{N_x}$ comme (P_n) croissante, si $n \geq N_x$ alors $x \in P_n$.

Proposition III.23

Soit E un convexe fermé non vide ;

(P_n^i) $i = 1,\ldots,r$ une famille finie de suites de parties convexes fermées non vides de $\mathbb{R}^k$ telles que :

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $i \in \{1,\ldots,r\}$

$$P_n^i \subset ri(E)$$

(ii) $P_n^i \subset P_{n+1}^i$; $i = 1,\ldots, r$.

(iii) $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n^i = E$; $i = 1,\ldots,r$

Si $P_n = \bigcap\limits_{i=1}^{r} P_n^i$ alors :

(i)' $P_n \subset ri(E)$

(ii)' $P_n \subset P_{n+1}$

(iii)' $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = E$.

Preuve

Les propriétés (i)' et (ii)' sont triviales.

Comme E est fermé $\overline{\lim} P_n \subset E$.

Montrons que $E \subset \underline{\lim} P_n$.

.../...

Soit $x \in E$, la suite $(d(x,P_n))$ est décroissante (d est la distance euclidienne de $\mathbb{R}^k$).

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, $x_1 \in P^1_{N_1}$ tels que $d(x,x_1) < \varepsilon$. Comme $P^1_{N_1} \subset ri(E)$ on a $x_1 \in ri(E)$, donc il existe $N_2, \dots, N_r \in \mathbb{N}$ tels que $x_1 \in P^i_{N_i}$ pour $i = 2,\dots,r$ d'après la proposition III.22. Posons $N = \max\{N_1,\dots,N_r\}$, alors $n \geq N$ entraine $d(x,P_n) < \varepsilon$ soit $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x,P_n) = 0$; donc il existe une suite (x_n) d'éléments de $\mathbb{R}^k$ telle que $x_n \in P_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ d'où $E \subset \underline{\lim}\, P_n$

<u>*Proposition III.24*</u>

Soit E un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^k$, alors il existe une suite croissante de parties polyèdrales compactes (P_n) telle que : $P_n \subset ri(E)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = E$

<u>Preuve</u>

On se restreint à $Aff(E)$. Soit $a \in \mathring{E}$, posons $K_n = B'(a,n) \cap E \quad n \geq 1$; K_n est un convexe compact

Nous avons $K_n \subset \bigcup\limits_{x\in \mathring{K}_n} B(x, \frac{1}{n})$; donc il existe un nombre fini de points $x^n_1, \dots, x^n_{h_n}$ tels que

$$K_n \subset \bigcup_{i=1}^{h_n} B(x^n_i, \frac{1}{n})$$

$x^n_i \in \mathring{K}_n$ donc $x^n_i \in \mathring{E}$.

.../...

Posons P_1 égal à l'enveloppe convexe des points $\{x_1^1, \ldots, x_{h_1}^1\}$, par récurrence P_n égal à l'enveloppe convexe de $\{x_1^n, \ldots, x_{h_n}^n\} \bigcup P_{n-1}$. On en déduit que P_n est compact convexe et d'après la proposition I.8., P_n est polyèdral ; P_n est contenu dans $ri(E)$ et la suite (P_n) est croissante.

Soit $x \in E$ il existe $N_x \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_x$ et $x \in K_n$, donc pour tout $n \geq N_x$, il existe $x_n \in P_n$ et $d(x,x_n) < \frac{1}{n}$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$; soit $E \subset \underline{\lim}\, P_n$, or $\overline{\lim}\, P_n \subset E$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = E$. Ce qui achève la preuve.

Proposition III.25

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ convexe s.c.i. propre. Alors il existe une suite de fonctions polyèdrales à domaines compacts (f_n) vérifiant :

(i) $f \leq f_n$

(ii) $dom\ f_n \subset ri(dom\ f)$

(iii) pour tout $x \in dom\ f_n$, $0 \leq f_n(x) - f(x) \leq \frac{1}{2^n}$

(iv) $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n = f$

Preuve

Nous supposons que $\overset{\circ}{\widehat{dom\ f}}$ (intérieur de dom f) est non vide ce qui revient à se restreindre à Aff(dom f).

$\overline{dom\ f}$ (adhérence de dom f) est convexe et fermé, d'après la proposition III.24, il existe une suite croissante d'ensembles

.../...

polyèdraux (P_n) tels que :

$$P_n \subset \overline{\overset{\circ}{\text{dom}}\, f} = \widehat{\overset{\circ}{\text{dom}\, f}} \ , \quad P_n \ \text{compact}$$

$$\text{et} \quad \lim_{n\to\infty} P_n = \overline{\text{dom}\, f}$$

f étant convexe est continue sur $\widehat{\overset{\circ}{\text{dom}\, f}}$ donc est uniformément continue sur P_n ; alors il existe $\delta_n > o$ tel que pour tous $x,y \in P_n$ tels que $\| x - y \| \leq \delta_n$ alors $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2^n}$

$$\text{où } \| x - y \| = \max_{1 \leq i \leq n} |x^i - y^i|$$

P_n étant compact nous pouvons le recouvrir par une famille finie de pavés fermés $(K_i^n)_{1 \leq i \leq k_n}$ de diamètre plus petit que δ_n.

Soit $\{ x_1^n , \ldots, x_{s_n}^n \}$ l'ensemble des sommets des ensembles polyèdraux $P_n \cap K_i^n$ $i=1,\ldots,k_n$ posons

$$f_n(x) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{s_n} \lambda^i f(x_i^n) \ / \ x = \sum_{i=1}^{s_n} \lambda^i x_i^n \ , \ \lambda^i \geq o \ , \ \sum_{i=1}^{s_n} \lambda^i = 1 \right\}$$

f_n est polyèdrale convexe par définition de f. dom $f_n = P_n$, donc le domaine de f est compact. Soit $x \in P_n$; soient

$$\lambda_o^1 , \ldots, \lambda_o^{s_n} \geq o \qquad \sum_{i=1}^{s_n} \lambda_o^i = 1 \quad \text{et} \quad x = \sum_{i=1}^{s_n} \lambda_o^i x_i \ ;$$

comme f est convexe nous avons

$$f(x) \leq \sum_{i=1}^{s_n} \lambda_o^i f(x_i^n)$$

.../...

soit $f(x) \leqslant \inf \left\{ \sum_{i=1}^{s_n} \lambda^i f(x_i^n) / \ x = \sum_{i=1}^{s_n} \lambda^i x_i \ ; \right.$

$$\left. \lambda^i \geqslant 0 \ , \quad \sum_{i=1}^{s_n} \lambda^i = 1 \right\}$$

d'où $f(x) \leqslant f_n(x)$

Si $x \in \mathrm{dom}\, f_n$ qui est égal à P_n alors il existe $i \in \{1,\dots, k_n\}$ et $x \in P_n \cap K_i^n$ qui est l'enveloppe convexe de $\{x_{i1}^n ;\dots, x_{is}^n\}$ avec

$$\{x_{i1}^n ,\dots, x_{is}^n\} \subset \{x_1^n ,\dots, x_{s_n}^n\}$$

donc $\quad x = \sum_{i=1}^{s} \lambda^j x_{ij}^n \qquad \lambda^j \geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^{s} \lambda^j = 1$

nous avons $f(x) \leqslant f_n(x) \leqslant \sum_{j=1}^{s} \lambda^j f(x_{ij}^n)$

soit $0 \leqslant f_n(x) - f(x) \leqslant \sum_{j=1}^{s} \lambda^j \left[f(x_{ij}^n) - f(x) \right] \leqslant \sum_{j=1}^{s} \lambda^j (\frac{1}{2^n})$

donc $\quad 0 \leqslant f_n(x) - f(x) \leqslant \frac{1}{2^n}$

Comme $\text{épi}(f_n) \subset \text{épi}(f)$ on a $\overline{\lim}\ \text{épi}(f_n) \subset \text{épi}(f)$.

Montrons que $\underline{\lim}\ \text{épi}(f_n) \supset \text{épi}(f)$ ou encore pour tout $x \in \mathrm{dom}\, f$, il existe une suite (x_n) telle que

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n , f_n(x_n)) = (x, f(x)).$$

.../...

Soit $x \in \text{dom } f$, il existe une suite (x'_n) telle que $x'_n \in P_n$ et $\lim_{n\to+\infty} x'_n = x$; f étant s.c.i. il existe une suite strictement croissante d'entiers n_k telle que

$$\lim_{k\to+\infty} f(x'_{n_k}) = f(x)$$

Comme $0 \leqslant f_{n_k}(x'_{n_k}) - f(x'_{n_k}) \leqslant \frac{1}{2^{n_k}}$

nous avons $\lim_{k\to+\infty} f_{n_k}(x'_{n_k}) = f(x)$;

alors nous posons $x_i = x'_i$ pour $i = 0,\dots,n_0$

$x_n = x_i$ pour $n \in [n_i, n_{i+1} - 1]$

pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Nous avons $x_n \in P_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

et $\lim_{n\to+\infty} (x_n, f_n(x_n)) = (x, f(x))$.

C.Q.F.D.

Proposition III.26

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\overline{\mathbb{R}^k}$ convexe s.c.i. propre alors il existe une suite (f_n) de fonctions polyèdrales convexes à domaines compacts telles que :

(i) $f \leqq f_n$

(ii) $\text{dom } f_n \subset ri(\text{dom } f)$

(iii) *pour tout* $x \in \text{dom } f_n$

$$0 \leqq f_n(x) - f(x) \leqq \frac{1}{2^n}\, e$$

avec $e = (1,\dots,1)$

(iv) $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$.

.../...

Preuve

Pour chaque composante f^i de f nous construisons les suites f_n^i et $P_n^i = \text{dom}\, f_n^i$, d'après la proposition III.25.

Posons $P_n = \bigcap_{i=1}^{k} P_n^i$, $f_n(x) = (f_n^1(x), \ldots, f_n^k(x))$

si $x \in P_n$

et si $x \notin P_n$ $f_n(x) = +\infty$.

Nous avons d'après la proposition III.23

$$\lim_{n \to +\infty} P_n = \text{dom}\, f$$

P_n est compact et contenu dans $\text{ri}(\text{dom}\, f)$ et

$\text{dom}\, f_n = P_n$.

Comme $f_n^i(x) \geq f(x)$ alors $f(x) \leqq f_n(x)$

De même $0 \leq f_n^i(x) - f(x) \leq \frac{1}{2^n}$ pour tout $x \in P_n^i$

donc $0 \leqq f_n(x) - f(x) \leqq \frac{1}{2^n}\, e$ pour tout $x \in P_n$.

Ces propriétés étant, on applique la construction de la fin de la démonstration de la proposition précédente, pour obtenir, pour $x \in \text{dom}\, f$, une suite x_n d'éléments de P_n telle que $\lim_{n \to +\infty} (x_n, f_n(x_n)) = (x, f(x))$.

- Remarque

Lorsque f est s.c.s. concave nous avons des propositions analogues.

PARTIE IV

APPLICATION : THEOREME DE FENCHEL GENERALISE (cas vectoriel)

Nous notons $S_k = \{x / x \in \mathbb{R}^k \quad \text{et} \quad \|x\| = 1\}$

$$S_k^+ = \{x / x \in \mathbb{R}_+^k \quad \text{et} \quad \|x\| = 1\}$$

où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^k$.

1. Conjuguée d'une fonction vectorielle

a) Cas scalaire

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, une fonction convexe. On appelle conjuguée de f et note f^* l'application définie par

$$f^* : \left[\begin{array}{l} \mathbb{R}^{n^*} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ x^* \longrightarrow f^*(x^*) = \sup\limits_{x \in \text{dom } f} \{x^* x - f(x)\} \end{array} \right] ;$$

.../...

lorsque f est concave, l'application conjuguée de f est définie par

$$f \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ \\ x \longrightarrow f(x) = \inf\limits_{x \in \mathrm{dom} f} x\, x - f(x) \end{array} \right.$$

b) Cas vectoriel

C. Gros a proposé dans [3], une extension de la notion de conjuguée, aux fonctions convexes et concaves à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}^k}$. Cette extention permet d'obtenir un théorème de dualité de type Fenchel.

Nous adoptons, la définition de Gros, avec la restriction $c \in S_k^+$, plus commode lorsque l'on étudie des suites de fonctions :

- Définition

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^k}$ convexe (resp. concave) ; on appelle application conjuguée de f et on note f^* ; la multiapplication définie par :

pour tout $(c,b) \in S_k^+ \times \mathbb{R}^{n*}$ on a :

$$f^*(c,b) = \phi \quad \text{si} \quad ({}^t cf)^*(b) = +\infty \quad (\text{resp. } ({}^t cf)^*(b) = -\infty)$$

$$f^*(c,b) = \{y / {}^t cy = ({}^t cf)\ (b)\} \quad \text{si} \quad ({}^t cf)^*(b) \in \mathbb{R}$$

Si Γ est une multiapplication d'un ensemble X dans un ensemble Y, on appelle domaine de Γ, l'ensemble noté $\mathrm{dom}\,\Gamma$ et défini par $\mathrm{dom}\,\Gamma = \{x \in X / \Gamma(x) \neq \phi\}$.

- Remarque

Lorsque $k=1$, nous avons $S_1^+ = \{1\}$ et pour $b \in \mathrm{dom}\, f^*$ (au sens scalaire) on a $f^*(1,b) = \{ f^*(b) \}$.

.../...

2. Théorème de Fenchel dans le cas réel.

Dans ce paragraphe, nous rappelons, le théorème de dualité de Fenchel et le théorème d'approximation de Lindberg.

a) Théorème de dualité de Fenchel

Théorème IV.27

Soit f une fonction convexe propre de $\mathbb{R}^n$ et g une fonction concave propre de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

On a :

$$\inf_{x} \{f(x) - g(x)\} = \sup_{x^*} \{g^*(x^*) - f^*(x^*)\}$$

si l'une des conditions suivantes et satisfaite.

(a) $ri\ (dom\ f) \cap ri(dom\ g) \neq \phi$

(b) f *est s.c.i.* ; g *est s.c.s.* et

$ri\ (dom\ f^*) \cap ri\ (dom\ g^*) \neq \phi$

Sous la condition (a) la borne supérieure est atteinte en un $\overline{x}^*$; sous la condition (b) la borne inférieure est atteinte en un point $\overline{x}$; si les conditions (a) et (b) sont satisfaites en même temps la borne inférieure et la borne supérieure sont atteintes et sont finies et égales.

Ce téorème est énoncé dans Rockaffelar [8] chapitre IV.

b) Théorème d'approximation de Lindberg.

Dans le cas réel Lindberg a établi un théorème d'approximation du Théorème de dualité de Fenchel à partir d'approximations polyèdrales des fonctions f et g et du théorème de dualité de la programmation linéaire.

.../...

Théorème de Lindberg IV.28

Soient f *une fonction convexe s.c.i. propre et* g *une fonction concave s.c.s. propre. On suppose que* (f_n) *(resp.* g_n*) est une suite de fonctions polyèdrales convexes (resp. concaves) telles que :*

$$\lim_{n \to +\infty} f_n = f \qquad \lim_{n \to +\infty} g_n = g \qquad f_n \geq f \quad \text{et} \quad g_n \leq g$$

Si g *polyèdrale, on pose* $g_n = g$ *.*

Alors sous l'une des conditions (1) ou (1')

(1) $ri\ (dom\ f) \cap ri\ (dom\ g) \neq \phi$

(1') $dom\ f_n \cap dom\ g_n \neq \phi$ *pour tout entier* n

nous avons :

$$\lim_{n \to +\infty} \inf \{f_n - g_n\} = \inf \{f - g\}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sup \{ g_n^* - f_n^* \} = \sup \{ g^* - f^* \}$$

Ensuite, toute valeur d'adhérence x^* *d'une suite* (x_n^*) *solution du problème linéaire dual* $\sup \{g_n^* - f_n^*\}$ *, est solution optimale du programme dual* $\sup \{g^* - f^*\}$.

Enfin, sous la condition (1) (x_n^*) *est bornée, sous (1') on peut la choisir bornée.*

Ce résultat est énoncé dans : P.O. Lindberg [6] .

3. Théorème de Fenchel généralisé

Soit f (resp. g) une fonction convexe s.c.i. propre (resp. concave s.c.s. propre) de $\mathbb{R}^n$ dans $\overline{\mathbb{R}}^k$.

.../...

Considérons les deux parties suivantes :

$\mathcal{A} = \mathrm{INF}(f - g) = \mathrm{INF}\,\{f(x) - g(x) \;/\; x \in \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\; g\}$

$\mathcal{B} = \mathrm{SUP}(g^* - f^*) = \mathrm{SUP} \bigcup\limits_{(c,b) \in S_k^+ \times (\mathrm{dom}\, g^* \cap \mathrm{dom}\, f^*)} \{z - y \;/\; z \in g^*(c,b),\ y \in f^*(c,b)\}$

Lorsque $k = 1$, nous avons

$\mathcal{B} = \{\sup\ g^*(b) - f^*(b) \;/\; b \in \mathrm{dom}\, g^* \cap \mathrm{dom}\, f^*\}$

$\mathcal{A} = \{\inf\ f(x) - g(x) \;/\; x \in \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g\}$

Lorsque $\mathcal{A}$ est non vide et $\mathrm{ri}\ \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{ri}\ \mathrm{dom}\, g \neq \phi$, nous avons $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

En posant $F = \{f(x) - g(x) \;/\; x \in \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\; g\}$, lorsque $\mathcal{A}$ est non vide on a $\mathcal{A}$ est un singleton et est la frontière de F^+ ; donc $\mathcal{B}$ peut être considérer comme l'intérieur de $\mathcal{A}$ pour la topologie de $\mathbb{R}$ induite sur la frontière de F^+.

Dans ce paragraphe nous énonçons le théorème de Fenchel généralisé. Nous donnerons une preuve en plusieurs étapes qui nous permettrons entre autres de caractériser $\mathcal{B}$ et de donner une approximation des éléments de $\mathcal{B}$ à partir des éléments de $\mathcal{A}_n$ correspondant aux fonctions polyèdrales f_n et g_n approchant respectivement f et g.

<u>Théorème de Fenchel généralisé IV.29</u>

Soient f, g des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\overline{\mathbb{R}^k}$; f (resp. g) convexe s.c.i. (resp. concave s.c.s.) propres.

.../...

Si on a :

(i) $\mathrm{INF}\ (f - g) \neq \phi$

(ii) $\mathrm{ri}\ (\mathrm{dom}\ f) \bigcap \mathrm{ri}\ (\mathrm{dom}\ g) \neq \phi$

Alors on a : $\mathcal{B}$ *est l'intérieur de* $\mathcal{A}$ *pour la topologie induite sur la frontière de* F^{+} .

Dans tout ce qui suit f, g vérifient les hypothèses du théorème IV.29.

On sait qu'il existe une suite f_n (resp. g_n) de fonctions polyèdrales convexes (resp. concaves) qui converge vers f (resp. vers g) vérifiant certaines propriétés énoncées dans la proposition III.26.

<u>Proposition IV.30</u>

La partie $\mathcal{B}$ *est contenue dans* $\mathcal{A}$.

<u>Preuve</u>

Nous ferons la preuve de cette proposition à partir de deux lemmes.

<u>Lemme IV.31</u>

Si β *est un élément de* $\overline{\mathcal{B}}$ *alors il existe* $c > o$ *et* $\bar{b} \in \mathbb{R}^{n^*}$ *tels que :*

$$^{t}c\ \beta = (^{t}c\ g)^{*}\ (\bar{b}) - (^{t}c\ f)^{*}(\bar{b}) \quad .$$

<u>Preuve du lemme</u>

Soit $\beta \in \overline{\mathcal{B}}$, alors il existe une (β_n) d'éléments de B telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \beta_n = \beta$.

.../...

Pour tout n, il existe $c_n \in S_k^+$ et $b_n \in \mathbb{R}^{n^*}$ tels que

$$c_n \beta_n = (c_n g)^*(b_n) - (c_n f)^*(b_n) \qquad (1) .$$

La suite (c_n) étant constituée d'éléments de S_k^+ qui est un compact, peut être supposée convergente vers $c \in S_k^+$.

Comme $f \leq f_n$ et $g_n \leq g$, on a ${}^tc_n f_n \geq {}^tc_n f$,

et ${}^tc_n g_n \leq {}^tc_n g$; soit $({}^tc_n f)^*(b_n) \geq ({}^tc_n f_n)^*(b_n)$

et $({}^tc_n g_n)^*(b_n) \geq ({}^tc_n g)^*(b_n)$

donc $({}^tc_n g_n)^*(b_n) - ({}^tc_n f_n)^*(b_n) \geq ({}^tc_n g)^*(b_n) - ({}^tc_n f)^*(b_n)$.

or $({}^tc_n g_n)^*(b_n) - ({}^tc_n f_n)^*(b_n) \leq \sup\limits_{b \in \operatorname{dom} g_n^* \bigcap \operatorname{dom} f_n^*} ({}^tc_n g_n)^*(b) - (c_n f_n)^*(b)$

le second membre de cette inégalité, d'après les propositions III.21 et IV.28, converge vers

$$\sup_{b \in \operatorname{dom} g^* \quad \operatorname{dom} f^*} ({}^tc\ g)^*(b) - ({}^tc\ f)^*(b) = ({}^tg)^*(\overline{b}) - ({}^tc\ f)^*(\overline{b}) \qquad (2)$$

La formule (1), donne $\lim\limits_{n\to+\infty} {}^tc_n \beta_n \leq ({}^tg)(\overline{b}) - ({}^tc\ f)(\overline{b})$,

soit $\quad {}^tc\beta \leq ({}^tg)^*(\overline{b}) - ({}^tc\ f)^*(\overline{b}) \qquad (3)$

La relation (3) est une égalité, car sinon, il existerait $\omega \in \Theta_+$ tel que $\quad {}^tc\ (\beta+\omega) = ({}^tc\ g)^*(\overline{b}) - ({}^tc\ f)^*(\overline{b})$

En plus $o < c$, car si la composante i_o de c est nulle, on a pour tout réel $t > o$, $\beta + t\, e_{i_o} \in B$; ce qui achève la preuve du lemme 1.

Posons $F_n = \{f_n(x) - g_n(x) \ / \ x \in \operatorname{dom} f_n \bigcap \operatorname{dom} g_n\}$.

.../...

Lemme IV.32

Il existe une suite d'entiers strictement croissante (m_k) telle que $\beta_{m_k} \in F_{m_k}$ et $\lim_{k \to +\infty} \beta_{m_k} = \beta$

Preuve

La condition (1) du théorème IV.28, étant vérifiée il existe une suite strictement croissante n_k d'entiers telle que :

(i) $$({}^{+}c_{n_k}\, g_{n_k})^{*}(b_{n_k}) - ({}^{+}c_{n_k}\, f_{n_k})^{*}(b_{n_k})$$
$$= \sup_b \, ({}^{+}c_{n_k}\, g_{n_k})^{*}(b) - ({}^{+}c_{n_k}\, f_{n_k})^{*}(t)$$
$$= \alpha_{n_k} \quad .$$

(ii) $$\lim_{k \to +\infty} b_{n_k} = \overline{b} \quad \text{et} \quad ({}^{+}c\, g)^{*}(\overline{b}) - ({}^{+}c\, f)^{*}(\overline{b})$$
$$= \sup \, ({}^{+}c\, g)^{*}(b) - ({}^{+}c\, g)^{*}(b) = \alpha$$

(iii) $$\lim_{k \to +\infty} \alpha_{n_k} = \alpha \quad .$$

En posant $H_{n_k} = \{ y \,/\, {}^{+}c_{n_k}\, y = \alpha_{n_k} \}$

$H = \{ y \,/\, {}^{+}c\, y = \alpha \}$; il existe, d'après la proposition III.20 ; une sous-suite ℓ_k extraite de la suite (n_k) , une suite (y_{ℓ_k}) d'éléments de H_{ℓ_k} tels que

$$\lim_{k \to +\infty} y_{\ell_k} = \beta$$

Nous allons approcher les éléments y_{ℓ_k} de H_{ℓ_k} par des éléments de $F^{+}_{\ell_k}$.

.../...

Supposons qu'il existe $\nu > o$ et $K_o \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq K_o$ $B'(y_{\ell_k}, \nu) \bigcap F^+_{\ell_k} = \phi$

En posant $e = (1,\dots,1)$, nous avons $y_{\ell_k} + \frac{\nu}{\sqrt{k}} e \notin F^+_{\ell_k}$.

Soient $\tilde{f}_k = f_{\ell_k} - y_{\ell_k} - \frac{\nu}{\sqrt{k}} e$ et $\tilde{g}_k = g_{\ell_k}$

on a $\text{épi}(\tilde{f}_k) \bigcap \text{hypo}(\tilde{g}_k) = \phi$; en effet

si $(x,\lambda) \in \text{épi}(\tilde{f}_k) \bigcap \text{hypo}(\tilde{g}_k)$, alors il existe $\omega, \omega' \in \Theta_+$ tels que $\lambda = \tilde{f}_k(x) + \omega = \tilde{g}_k(x) - \omega'$

soit $y_{\ell_k} + \frac{\nu}{\sqrt{k}} e = f_{\ell_k}(x) - g_{\ell_k}(x) + \omega + \omega'$

d'où $y_{\ell_k} + \frac{\nu}{\sqrt{k}} e = \in F^+_{\ell_k}$ impossible.

Aussi on peut séparer $\text{épi}(\tilde{f}_k)$ et $\text{hypo}(\tilde{g}_k)$ par un hyperplan non vertical ; donc il existe

$c_{\ell_k} \in S^+_k$, $\bar{b}_{\ell_k} \in \mathbb{R}^{n*}$ tels que

$$\sup[{}^t\bar{b}_{\ell_k} x - {}^tc_{\ell_k} \tilde{f}_k(x)] \leq \inf[{}^t\bar{b}_{\ell_k} x - {}^tc_{\ell_k} \tilde{g}_k(x)]$$

d'où $({}^tc_{\ell_k} \tilde{f}_k)^*(\bar{b}_{\ell_k}) \leq ({}^tc_{\ell_k} \tilde{g}_k)^*(\bar{b}_{\ell_k})$

soit $${}^tc_{\ell_k} y_{\ell_k} + \frac{\nu}{\sqrt{k}} {}^tc_{\ell_k} e \leq ({}^tc_{\ell_k} g_{\ell_k})(\bar{b}_{\ell_k}) - ({}^tc_{\ell_k} f_{\ell_k})^*(\bar{b}_{\ell_k})$$

Le premier membre converge vers ${}^tc\, \beta + \frac{\nu}{\sqrt{k}} {}^tc\, e$, le second membre est majoré par

.../...

$\sup ({}^{t}c_{\ell_k}\, g_{\ell_k})^{*} - ({}^{t}c_{\ell_k}\, f_{\ell_k})^{*}$ qui converge (d'après la proposition IV.28) vers

$$\sup_b ({}^{t}c\ g)^{*}(b) - ({}^{t}c\ f)^{*}(b) = ({}^{t}c\ g)^{*}(\bar{b}) - ({}^{t}c\ f)^{*}(\bar{b}) .$$

$$\text{donc} \quad {}^{t}c\beta + \frac{\nu}{\sqrt{k}}\, {}^{t}c\ e \leqslant ({}^{t}c\ g)^{*}(\bar{b}) - ({}^{t}c\ f)^{*}(\bar{b}) ,$$

ce qui contre dit le lemme 1 .

Aussi, il existe une suite strictement croissante d'entiers m_k extraite de ℓ_k et une suite (β_{m_k}) d'éléments de $F^{+}_{m_k}$ telles que :

$$\beta = \lim_{k\to+\infty} \beta_{m_k} .$$

Maintenant, nous donnons la preuve de la proposition IV.30.

Comme $F^{+}_{m_k} \subset F^{+}$, le lemme 2 donne $\beta \in \overline{F^{+}}$.

Ensuite, le lemme 1 et le théorème IV.27 donnent

$${}^{t}c\beta = \sup_b ({}^{t}c\ g)^{*}(b) - ({}^{t}c\ f)^{*}(b) = \inf_x {}^{t}c\ f(x) - {}^{t}cg(x)$$

et $\quad o < c \quad$;

d'où ${}^{t}c\beta \leqslant {}^{t}c\ (f(x) - g(x))$ donc

pour tout $u \in \overline{F^{+}}$ on a ${}^{t}c\beta \leqslant {}^{t}c\ u$ soit

$$u \nleq \beta \quad \text{donc} \quad \beta \in m(\overline{F^{+}})$$

donc $\beta \in \overline{F^{+}} \cap m(\overline{F^{+}}) = \mathrm{INF}\ (f - g)$.

C.Q.F.D.

.../...

Nous énonçons deux collaires découlant de la preuve de la proposition IV.30.

Corollaire IV.33

Les éléments β *de* $\mathcal{B}$ *sont les éléments de* $\mathcal{A}$ *pour lesquels on a*

(i) pour tout $c \in S_k^+$ *tel qu'il existe* $b_o \in \mathbb{R}^{n^*}$
avec $^t c\ \beta \leq (^t c\ g)^*(b_o) - (^t c\ f)^*(b_o)$
alors $^t c\beta = (^t c\ g)^*(b_o) - (^t c\ f)^*(b_o)$

(ii) pour tout $c \in S_k^+$ *tel que*

$$^t c\ \beta = \sup\ (^t c\ g)^*(b) - (^t c\ f)^*(b)$$

alors $o < c$.

Preuve

L'implication $\beta \in \mathcal{B}$ entraine (i) et (ii) découle de la preuve du Lemme IV.31.

Maintenant soit $\beta \in \mathcal{A}$ tel que les propriétés (i) et (ii) soient satisfaites. Alors il existe $c \in S_k^+$, $o < c$ et $b_o \in \mathbb{R}^{n^*}$ tels que

$$^t c\ \beta = (^t c\ g)^*(b_o) - (^t c\ f)^*(b_o) = \inf\ (^t c f(x) - {}^t c\ g(x))$$

donc $\beta \in B$ soit $\beta \in \overline{B^-}$.

Soit $\mu \in \overline{B^-}$ et $\mu \geq \beta$. Avec une construction similaire à celle du Lemme IV.31 nous avons (i) il existe $c' \in S_k^+$ tel que

$$^t c' \mu \leq (^t c'\ g)^*(\overline{b}_o) - (^t c'\ f)^*(\overline{b}_o) = \sup\ (^t c'\ g)^*(b) - (^t c' f)^*(b)$$

.../...

or $\beta \leq \mu$ donc ${}^tc'\beta \leqslant ({}^tc'\ g)^*(\overline{b}_o) - ({}^tc'\ f)^*(b_o)$

en appliquant (I) on a ${}^tc'\beta = ({}^tc'\ g)^*(\overline{b}_o) - ({}^tc'\ f)^*(\overline{b}_o)$

Comme (II) donne $o < c'$, alors $\beta \not\leq \mu$ donc

$$\beta \in M(\overline{B^-}) \qquad \text{d'où}$$

$$\beta \in \overline{B^-} \bigcap M(\overline{B^-}) = \text{SUP } \mathcal{B}).$$

Corollaire IV.34

Pour tout $\beta \in \mathcal{B}$ *il existe une suite* α_{n_k} *d'éléments de* $\mathcal{A}_{n_k}$ *tels que* $\beta = \lim_{k \to +\infty} \alpha_{n_k}$

Preuve

Soit $\beta \in \mathcal{B}$, d'après le lemme IV.32, il existe une suite (β_{n_k}) d'éléments de $F^+_{n_k}$ telle que $\beta = \lim_{k \to +\infty} \beta_{n_k}$

Or d'après la proposition II.16, il existe

$\alpha_{n_k} \in \mathcal{A}_{n_k}$ et $\nu_{n_k} \in \mathbb{R}^k_+$ tels que

$$\beta_{n_k} = \alpha_{n_k} + \nu_{n_k} .$$

Comme $\beta \in \mathcal{B}$ il existe $c \in S^+_k$, $o < c$ et

$${}^tc\ \beta = \sup\ ({}^tc\ g)^*(b) - ({}^tc\ f)^*(b) = \inf\ ({}^tc\ f(x) - {}^tc\ g(x))$$

on a : ${}^tc\beta \leqslant {}^tc\alpha_{n_k} \leqslant {}^tc\ (\alpha_{n_k} + \nu_{n_k})$

soit $\lim_{k \to +\infty} {}^tc\ \nu_{n_k} = o$, comme $o \leq \nu_{n_k}$ et $o < c$

.../...

alors $\lim_{k\to+\infty} \nu_{n_k} = o$ d'où $\lim_{k\to+\infty} \alpha_{n_k} = \beta$.

Proposition IV.35

L'intérieur de $\mathcal{A}$ *pour la topologie induite sur la frontière de* F^+ *est contenu dans* $\mathcal{B}$.

Preuve

Soit β un élément de l'intérieur de $\mathcal{A}$ pour la topologie induite sur la frontière de F^+ ; il existe un réel $\varepsilon > o$ tel que : $B(\beta,\varepsilon) \cap \partial F^+ \subset \mathcal{A}$.

(∂F^+ désigne la frontière de F^+) .

Soit $c \in S_k^+$ tel que ${}^t c\alpha \leqslant \sup({}^t c\, g)^*(b)-({}^t c\, f)^*(b)$,

supposons que c à la composante i_o nulle, alors il existe un réel $t_1 > o$ et $\beta + t\, e_{i_o} \in B(\beta,\varepsilon)$ pour tout

$$t \in [0, t_1[\; .$$

S'il existait $t_o \in]o,t_1[$ tel que $\beta + t_o\, e_{i_o} \in \partial F^+$

on aurait $\beta \leq \beta + t_o\, e_{i_o}$ et $\beta + t_o\, e_{i_o} \in \mathcal{A}$

ce qui est impossible.

Il en résulte, comme F^+ est convexe, que $\beta + t_o\, e_{i_o}$ est un élément de l'intérieur de F^+ donc il existe un réel $\eta > o$ tel que : $B'(\beta + t_o\, e_{i_o}, \eta) \subset F^+$

soit ${}^t c\beta \leqslant {}^t c\,(\beta + t_o\, e_{i_o} - \frac{\eta}{\sqrt{k}}\, e) = {}^t c\beta - \eta\; {}^t c\, e$

impossible ; d'où $o < c$.

.../...

Comme ${}^+c\,\alpha \leq \inf ({}^+c\, f(x) - {}^+c\, g(x))$ alors il existe $\omega \in \mathbb{R}^k_+$ tel que ${}^+c\,(\alpha + \omega) = \inf {}^+c\, f(x) - {}^+c\, g(x)$

soit $u \in \overline{F^+}$, comme $o < c$, $u \not\leq \alpha + \theta$

or $\alpha \in \overline{F^+}$ donc $\theta = o$ soit

$$ {}^+c\,\alpha = \sup ({}^+c\, g)^*(b) - ({}^+c\, f)^*(b). $$

Les conditions (i) et (ii) du corollaire IV.33 sont vérifiées donc $\beta \in \mathcal{B}$.

<u>*Proposition IV.36*</u>

$\mathcal{B}$ est contenu dans l'intérieur de $\mathcal{A}$, pour la topologie induite sur la frontière de F^+ .

<u>Preuve</u>

Soit $\beta \in \mathcal{B}$. Supposons qu'il existe une suite décroissante (ε_n) de réels strictement positifs tels que

$$ (H) \quad \begin{cases} (i) & \lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n = o \\ (ii) & B'(\beta, \varepsilon_n) \cap \partial F^+ \not\subset \mathcal{A} \end{cases} $$

(H) entraine l'existence d'une suite (y_n) d'éléments de ∂F^+ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = \beta$ et $y_n \notin \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En séparant y_n et F^+ nous obtenons :

$$ {}^+c_n\, y_n = \inf ({}^+c_n\, f - {}^+c_n\, g) \qquad \text{avec} \qquad c_n \in S_k^+ $$

Comme $c_n \in S_k^+$, on peut supposer que (c_n) converge vers $c \in S_k^+$.

La proposition IV.28 donne

$$ \lim_{n \to +\infty} \sup ({}^+c_n\, g_n)^*(b) - ({}^+c_n\, f_n)^*(b) = \sup ({}^+c\, g)^*(b_o) - ({}^+c\, f)^*(b_o) $$

.../...

comme $f \leq f_n$ et $g_n \leq g$, on a :

$$({}^tc_n\ g_n)^*(b) - ({}^tc_n\ f_n)^*(b) \geq ({}^tc_n\ g)^*(b) - ({}^tc_n\ f)^*(b)$$

or $${}^tc_n\ y_n = \inf\ {}^tc_n\ f(x) - {}^tc_n\ g(x)$$

$$= \sup\ ({}^tc_n\ g)^*(b) - ({}^tc_n\ f)^*(b)$$

soit $$\lim_{n\to+\infty}\ {}^tc_n\ y_n \leq ({}^tc\ g)^*(\bar{b}) - ({}^tc\ f)^*(\bar{b})$$

$$= \sup_b\ ({}^tc\ g)\ (b) - ({}^tc\ f)\ (b)$$

donc $${}^tc\ \beta \leq ({}^tc\ g)^*(\bar{b}) - ({}^tc\ f)^*(\bar{b})$$

comme $\beta \in \mathcal{B}$, on a $o < c$ et

$${}^tc\ \beta = ({}^tc\ g)^*(\bar{b}) - ({}^tc\ f)^*(b)$$

Comme $o < c$, il existe un entier $K_o \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $k \geq K_o$ on a

$$(\mathcal{E})\quad \begin{cases} y_{n_k} \in \partial F^+ \\ {}^tc_n\ y_n = \inf\ ({}^tc_n\ f - {}^tc_n\ g) \\ o < c_n \end{cases}$$

$(\mathcal{E})$ entraine $y_n \in \mathcal{O}\!\mathcal{C}$ pour tout $k \geq K_o$.

Donc il existe $n_o \in \mathbb{N}$ tel que

$B'(\beta,\varepsilon_{n_o}) \cap \partial F^+ \subset \mathcal{O}\!\mathcal{C}$ donc β appartient à l'intérieur de $\mathcal{O}\!\mathcal{C}$ pour la topologie induite sur la frontière de F^+ par celle de $\mathbb{R}^k$.

C.Q.F.D.

PARTIE V

QUELQUES PROPRIETES DES MINIMAS DE PARETO ET DES CONDITIONS SUFFISANTES D'EXISTENCE DE MINIMAS DE PARETO

Dans la partie I nous avons vu que la recherche de minimas de Paréto d'une partie A non vide de $\mathbb{R}^k$ était ramenée à celle des minimas de Paréto de $\overline{A^+}$.

Aussi dans cette partie, nous étudierons les minimas de Paréto des parties F de $\mathbb{R}^k$ vérifiant la propriété $(\mathcal{P})$ suivante :

$(\mathcal{P})$ F est une partie non vide convexe fermée de $\mathbb{R}^k$ telle que $F + \mathbb{R}^k_+ \subset F$.

Ensuite, nous donnerons deux conditions suffisantes, pour qu'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\overline{\mathbb{R}^k}$ atteigne ses minimas de Paréto, ce qui généralise deux propositions du cours de 3ième cycle de D.S. THIAM [10] .

.../...

1. Conditions suffisantes d'existence de minimas de Paréto d'une partie F de $\mathbb{R}^k$ vérifiant $(\mathcal{P})$.

Proposition V.37.

Soit F une partie de $\mathbb{R}^k$ vérifiant $(\mathcal{P})$; si F est minorée pour l'ordre partiel de $\mathbb{R}^k$ alors $MIN(F)$ est non vide.

Preuve

Soit $a \in \mathbb{R}^k$ tel que pour tout $x \in F$ on a $a \leqq x$. Soit d la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^k$ alors

$\inf\limits_{x \in F} d(a,x)$ est atteint sur F soit en $\bar{x}$.

on a $\bar{x} \in MIN(F)$ car sinon il existerait $y \in F$ tel que $y \leq \bar{x}$.

or $(y^i - a^i)^2 \leq (\bar{x}^i - a^i)^2 = (\bar{x}^i - y^i)^2 + 2(\bar{x}^i - y^i)(\bar{x}^i - a^i) + (\bar{x}^i - a^i)^2$

et cette inégalité est stricte pour au moins un indice $i_o \in \{1,\dots, k\}$ donc $d(a,y) < d(a,\bar{x})$ ce qui est impossible.

Cette proposition est vraie pour F fermé non vide.

Proposition V.38

Soit F une partie de $\mathbb{R}^k$ vérifiant la propriété $(\mathcal{P})$; si $MIN(F)$ est non vide, alors on a :

$$F = MIN(F) + \mathbb{R}^k_+$$

.../...

<u>Preuve</u>

Il suffit de montrer que $F \subset MIN(F) + \mathbb{R}_+^k$.

Soit $x_o \in F$ et $I_{x_o} = \{ x \in F \,/\, x \leqq x_o \}$ alors I_{x_o} est convexe fermé non vide. Soit Δ l'application définie comme suit

$$\Delta \left\{ \begin{array}{l} I_{x_o} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \\ x \longrightarrow \Delta(x) = d(x_o,x) \end{array} \right.$$

si $\sup\limits_{x \in I_{x_o}} \Delta(x) < +\infty$ alors I_{x_o} est bornée ; comme Δ est continue, alors Δ atteint son minimum sur I_{x_o} en $\overline{x}$ et on a $\overline{x} \in MIN(F)$.

Si $\sup\limits_{x \in I_{x_o}} \Delta(x) = +\infty$, alors il existe une suite (x_n) d'éléments de I_{x_o} telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \| x_n \| = +\infty$.

De la suite $\left(\dfrac{x_n}{\|x_n\|} \right)$, on peut entrainer une sous-suite $\left(\dfrac{x_{n_k}}{\| x_{n_k} \|} \right)$ convergente vers ξ tel que $\| \xi \| = 1$

on a pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{x_{n_k}}{\| x_{n_k} \|} \leqq \frac{x_o}{\| x_{n_k} \|} \qquad \text{donc} \qquad \xi \leq 0 .$$

Comme $\lim\limits_{k \to +\infty} \| x_{n_k} \| = +\infty$ il existe $K_o \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant K_o$ alors $0 < \dfrac{1}{\| x_{n_k} \|} < 1$

../...

donc $\left(1 - \frac{1}{\|x_{n_k}\|}\right) x + \frac{1}{\|x_{n_k}\|} x_{n_k} \in F$

avec $x \in MIN(F)$. F étant fermé, en passant aux limites

$x + \xi \in F$, ce qui est impossible.

Donc, il existe $\rho \in MIN(F)$ et $\rho \leqq x_o$ donc

$x_o = \rho + (x_o - \rho)$ d'où $x_o \in MIN(F) + \mathbb{R}^k_+$.

On désigne par $AS(F)$, le cône asymptotique du convexe fermé F , c'est-à-dire, l'ensemble des éléments $y \in \mathbb{R}^k$ tels que pour tout $x \in F$ et t réel strictement positif, on a $x + ty \in F$.

Proposition V.39

Soit F une partie de $\mathbb{R}^k$ vérifiant $(\mathcal{P})$.
On a : $MIN(F)$ non vide si et seulement si

$$AS(F) \cap \mathbb{R}^k_- = \{0\} .$$

Preuve

Supposons $MIN(F) \neq \phi$; soit $\xi \in AS(F)$ et $\rho \in MIN(F)$, on a $\rho + \xi \in F$ donc $\xi \nleq 0$ d'où $AS(F) \cap \mathbb{R}^k_- = \{0\}$.

Réciproquement si $AS(F) \cap \mathbb{R}^k_- = \{0\}$

soit $x_o \in F$ et I_{x_o} l'ensemble défini dans la proposition précédente. Il n'y a qu'une possibilité $\sup_{x \in I_{x_o}} \Delta(x)$ fini, donc il existe $\bar{x} \in MIN(F)$.

.../...

Proposition V.40

Soit F une partie de $\mathbb{R}^k$ vérifiant $(\mathcal{P})$; la partie F a un minimum absolu pour l'ordre partiel de $\mathbb{R}^k$ si et seulement si $MIN(F)$ est un singleton.

Preuve

Si F a un minimum absolu m, F est minoré donc $MIN(F)$ est non vide ; soit $p \in MIN(F)$, on a $m \leq p$ donc $m = p$ d'où $MIN(F) = \{m\}$.

Si $MIN(F) = \{m\}$, la proposition V.38 donne $F = m + \mathbb{R}^k_+$ donc m est un minimum absolu.

La proposition suivante caractérise les facettes de F qui sont contenues dans $MIN(F)$.

Proposition V.41

Soit F une partie de $\mathbb{R}^k$ ayant la propriété $(\mathcal{P})$.
Si $\mathcal{F}$ est une facette propre de F , on a :

ou bien $ri(\mathcal{F}) \cap MIN(F) = \phi$
ou bien $ri(\mathcal{F}) \cap MIN(F) \neq \phi$
alors $\mathcal{F} \subset MIN(F)$.

Preuve

Si $\mathcal{F}$ est un singleton, la proposition est évidente. Supposons que $\mathcal{F}$ est différent d'un singleton et que $ri(\mathcal{F}) \cap MIN(F)$ non vide.

On suppose qu'il existe $p \in \mathcal{F}$ et $u \in F$ tels que $u \leq p$. Soit $p_o \in MIN(F) \cap ri(\mathcal{F})$ alors il existe $p' \in \mathcal{F}$ et $p_o \in \,]p,p'[$; posons

.../...

$\rho_o = \alpha\rho + \beta\rho'$ avec $\alpha,\beta \in]0,1[$ et $\alpha+\beta = 1$.

L'enveloppe convexe des points ρ, ρ' et u est contenue dans F. Soit $\mathcal{D}$ la demi-droite

$$\mathcal{D} = \{\rho_o - t(\rho - u) \;/\; t > o\}$$

D rencontre le segment $[\rho', u]$; en effet

$$\rho_o - t(\rho - u) = \rho' - t'(\rho' - u) \quad \text{pour} \quad t = t' = \alpha$$

donc $\rho_o - \alpha(\rho - u) \in F$ or $o \leq \rho - u$

d'où $\rho_o - \alpha(\rho - u) \leq \rho_o$ ce qui est impossible. Donc pour tout $\rho \in \mathcal{F}$ on a $\rho \in MIN(F)$.

2. Conditions suffisantes d'existence de minimas de Paréto pour une fonction convexe s.c.i. propre.

Proposition V.42

Soit A une partie convexe compacte, f une application convexe s.c.i. de A dans $\mathbb{R}^k$.

Alors $MIN(F)$ est non vide et f atteint ses minimas de Paréto.

Preuve

On a $\overline{F^+} = f\langle A\rangle + \mathbb{R}^k_+$.

En effet, soit (x_n) une suite d'éléments de A et (ν_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}^k_+$, telles que

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) + \nu_n = \alpha \in \mathbb{R}^k$$, de la suite x_n on peut extraire une sous-suite (x_{n_k}) convergente vers $\overline{x} \in A$ donc

$$f(\overline{x}) \leq \underline{\lim}\; f(x_{n_k}) \leq \alpha$$

.../...

d'où $\alpha \in f<A> + \mathbb{R}^k_+$.

f étant s.c.i. sur le compact A, chacune de ses composantes est minorée sur A, donc $f<A>$ est minorée d'où d'après la proposition V.37 $MIN(f<A> + \mathbb{R}^k_+)$ est non vide.

D'où f a, au moins, un minima de Paréto et en plus f atteint ses minimas.

<u>*Proposition V.43*</u>

Soit f une fonction convexe s.c.i. propre de $\mathbb{R}^n$ dans $\overline{\mathbb{R}^k}$ telle que si (x_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = +\infty$ alors on a

$$\lim_{n\to+\infty} \|f(x_n)\| = +\infty$$

Si $MIN(f)$ est non vide alors f atteint ses minimas de Paréto.

<u>Preuve</u>

Soit $\alpha \in MIN(f)$ et (x_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$ telle que $\alpha = \lim_{n\to+\infty} f(x_n)$.

Si $\{x_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$ est borné alors il existe une sous-suite convergente (x_{n_k}) vers $\bar{x}$ et on a :

$$f(\bar{x}) \leq \underline{\lim}\ f(x_{n_k}) = \alpha \text{ donc } \alpha = f(\bar{x}) .$$

Si $\{x_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$ est non borné, alors on peut supposer que $\lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = +\infty$. De la suite $\left(\dfrac{f(x_n)}{\|f(x_n)\|}\right)$, on peut extraire une sous-suite convergente $\left(\dfrac{f(x_{n_k})}{\|f(x_{n_k})\|}\right)$ vers un

.../...

élément $\xi \neq 0$, or

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{f(x_{n_k})}{\| f(x_{n_k}) \|} = \alpha \quad . \quad \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{\| f(x_{n_k}) \|} = 0 \ ;$$

ce qui est impossible.

C O N C L U S I O N

Dans ce travail nous nous sommes limité à la dimension finie pour des raisons d'utilisation pratique des résultats établis.

Nous allons poursuivre ce travail dans le sens de l'établissement d'un algorithme numérique, pour l'obtention des minima de Paréto d'une fonction convexe s.c.i., à partir de celles des fonctions polyèdrales l'approchant et dans le sens de la généralisation des différents résultats à la dimension infinie.

B I B L I O G R A P H I E

))o((

[1] C. BERGE : Espaces topologiques - fonctions multivoques - Dunod-Paris 1966.

[2] A. M. CHARLES : Méthode itérative de sélection de solutions de problèmes d'optimisation à plusieurs critères. Cahiers de mathématiques de la décision n° 7305.

[3] C. GROS : Conjuguée d'une fonction vectorielle convexe et dualité en optimisation convexe multicritère. Ann. Fac. Sciences - Dakar, tome 30, 1977.

[4] J. L. JOLY : Une famille de topologies et de convergences sur l'ensemble des fonctionnelles convexes. Thèse de Doctorat d'Etat. Faculté des Sciences, Grenoble, 1970.

[5] K. KURATOWSKI : Topology. Academic Press New York and London, 1966.

[6] P. O. LINDBERG : Fenchel duality from L.P. duality math. opérationsforsch, statist, Sec. Optimization, vol. 11, n° 2, 171-180, 1980.

[7] MOULIN - FOGELMANN : La convexité dans les mathématiques de la décision. Hermann, 1979.

.../...

[8] R. T. ROCKAFELLAR : Convex analysis.
Princeton University Press, 1970.

[9] STOER-WITZGALL : Convexity and optimization in finite dimensions I.
Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, New-York, 1970.

[10] D.S. THIAM : Cours Oral de 3ème Cycle. 1981-1982.

[11] VINCENT-GRANTHAM : Optimality in parametric systems.
Willey-Interscience, 1981.