THÈSE

DE DOCTORAT DE TROISIÈME CYCLE DE MATHÉMATIQUES PURES

présentée

A L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE
DE GRENOBLE

par

Odinette Renée ABIB

EQUATIONS DE LIE ET PROLONGEMENT DES GROUPOÏDES DE LIE

Soutenue le 10 juin 1972 devant la Commission d'examen

C. CHABAUTY Président

H. GOLDSCHMIDT
B. MALGRANGE
Examinateurs

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Soient V une variété différentiable connexe, $\mathcal{R}^h$ une équation de Lie formellement transitive et formellement intégrable et Φ^h le groupoïde de Lie associé à $\mathcal{R}^h$ (i.e. la forme finie de B. MALGRANGE [6]). Le but de ce travail est de démontrer (§ 5) un théorème qui établit l'égalité entre la forme finie Φ^{h+1} associée à $\mathcal{R}^{(h)+1}$ et le 1ème-prolongement $\Phi^{(h)+1}$ de l'équation différentielle (Φ^h, α, V) .

Du § 1 au § 4 , on démontre certains résultats sur les groupoïdes de Lie linéaires. Au § 6 , on considère une G-structure P d'ordre 1 et le tenseur de structure S de $(\mathcal{R}^2(V), \bar{P}^1)$ dans $\bar{\mathcal{R}}^2(V)$, (définition 6). On démontre (proposition 6) que le groupoïde de Lie $\Phi = P \circ P^{-1}$ est 1-intégrable si, et seulement si, le tenseur S est à valeurs constants. On utilise ce résultat pour démontrer la proposition 7. Remarquons que les résultats obtenus au § 6 (par exemple : propriétés 1 et 2, lemme 9, lemme 10, ...) peuvent être appliqués à une G-structure P d'ordre $k \geq 1$, et d'après la remarque 1 (§ 6) notre définition 6 nous permet d'étudier les obstructions à l'intégrabilité de la G-structure P [5].

C'est aux Professeurs B. MALGRANGE et A.M. RODRIGUES que je dois de présenter cette thèse. Ils m'ont donné les conseils pour pouvoir arriver à faire ce travail. A ces deux personnes, j'exprime ici toute ma reconnaissance.

Monsieur le Professeur Hubert GOLDSCHMIDT a accepté d'être examinateur. Je l'en remercie vivement, d'autant plus que mes entretiens avec lui m'ont été d'une grande utilité.

Je remercie Monsieur le Professeur C. CHABAUTY d'avoir bien voulu accepter de présider le Jury.

Mademoiselle MARCHAND a dactylographié ce travail, je l'en remercie vivement.

Ce travail a été effectué à l'aide d'une bourse de C.N.Pq - Rio de Janeiro - BRESIL

§ 1 - GROUPOIDE DE LIE.

On suppose que toutes les variétés et applications en considération sont de classe C^∞ et que les variétés possèdent une base dénombrable d'ouverts.

Définition 1.

Un groupoïde Φ _sur l'ensemble_ V _est un ensemble muni d'une application_

$$(a,b) : \Phi \to V \times V$$
$$z \to (a(z), b(z))$$

et d'une loi de composition interne associative et partielle, vérifiant les axiomes suivants :

1) z _et_ z' _étant deux éléments de_ Φ , _le composé_ $z \circ z'$ _est défini si, et seulement si_ $a(z) = b(z')$. _En plus, on a_ $b(z\circ z') = b(z)$ _et_ $a(z\circ z') = a(z')$.

2) _Quel que soit_ x , x _dans_ V , _il existe_ $I(x) \in \Phi$ _tel que_ $a(I(x)) = x = b(I(x))$ _et tel que si_ $z\circ I(x)$ _est défini_, $z\circ I(x) = z$ _et si_ $I(x)\circ z$ _est défini_, $I(x)\circ z = z$.

3) _Quel que soit_ z , z _dans_ Φ _il existe_ z^{-1} _un élément de_ Φ _tel que_ :

$$z\circ z^{-1} = I(y) \quad \text{où} \quad y = b(z)$$
$$z^{-1}\circ z = I(x) \quad \text{où} \quad x = a(z) .$$

Les applications a et b sont appelées respectivement application "source" et "but" de Φ ; l'élément $I(x)$ associé à tout x de V , d'après l'axiome 2, est unique ; il est appelé _l'unité_ en x de Φ .

On vérifie que l'ensemble des éléments de Φ de source et but confondus au même élément x de V , forme un groupe G_x , appelé le <u>groupe d'isotropie</u> en x de Φ . Si z_o est un élément de Φ , de source x et de but y , l'application :

$$\begin{aligned} z_o : G_x &\to G_y \\ z &\to z_o \circ z \circ z_o^{-1} \end{aligned}$$

est un isomorphisme des groupes.

Dans le cas où l'application (a,b) est surjective, nous dirons que le groupoïde Φ est <u>transitif</u>.

Φ étant un groupoïde sur V , Φ est <u>un groupoïde différentiable</u> sur V , s'il existe sur V et Φ des structures des variétés différentiables tels que :

1) Les applications a et b sont différentiables et l'application $x \to I(x)$ différentiable (cela entraîne que a et b sont des submersions, i.e., surjective et de rang maximal).

2) Appelons S l'ensemble des couples $(z,\tilde{z})$ de $\Phi \times \Phi$ tels que $a(z) = b(\tilde{z})$; c'est une sous-variété régulière (i.e., avec la topologie induite) de $\Phi \times \Phi$, d'après 1)). La condition imposée est la différentiabilité de l'application

$$\begin{aligned} S &\to \Phi \\ (z,\tilde{z}) &\to z \circ \tilde{z} \end{aligned}$$

3) L'application

$$\begin{aligned} \Phi &\to \Phi \\ z &\to z^{-1} \end{aligned}$$

est différentiable.

<u>Définition 2</u>.

<u>Un groupoïde de Lie sur une variété</u> V <u>est un groupoïde différentiable</u> Φ <u>sur</u> V , <u>tel que</u>

$$(a,b) : \Phi \to V \times V$$

<u>soit une submersion</u>.

<u>Exemples</u> :

0) Un groupoïde de Lie est un groupoïde différentiable ne possédant qu'une unité.

1) Désignons par J^hV , la variété des h-jets inversibles de V dans V . J^hV est un groupoïde de Lie sur V , de groupes d'isotropie isomorphe à L^h_n où $n = \dim V$.

2) Soit (P,V,π,G) un fibré principal différentiable. Considérons dans la variété produit $P \times P$ la relation d'équivalence ρ définie par $(z'.g, z.g) \sim (z',z)$ où $g \in G$. L'espace quotient $\Phi = \frac{P \times P}{\rho}$ est alors muni d'une structure de groupoïde de Lie sur V : la classe d'équivalence θ de (z',z) que l'on notera $z'.z^{-1}$ s'identifie à une bijection de $P_x = \pi^{-1}(x)$ sur $P_{x'}$, où $\pi(z) = x, x' = \pi(z')$, qui commute avec l'action de G . Le composé des classes de (z',z) et (z'_1, z_1) existe si, et seulement si, $\pi(z_1) = \pi(z')$; ce composé est alors la classe de $(z'_1.z^{-1}.z', z_1)$. On a donc $a(\theta) = \pi(z)$, $b(\theta) = \pi(z')$.

Dans le cas particulier où P est une G-structure d'ordre h sur V , le groupoïde $\Phi = \frac{P \times P}{\rho} = P.P^{-1}$ s'identifie au groupoïde des jets $X \in J^hV$ tels que $X \circ P_{\alpha(X)} = P_{\beta(X)}$.

<u>Réciproquement</u> : Soient Φ un groupoïde de Lie sur V , x un élément de V et $\Phi_x = \alpha^{-1}(x)$. Muni de l'application but b , Φ_x est un fibré principal différentiable de base V ayant pour groupe structural $G_x = (a,b)^{-1}(x,x)$. Si on remplace x par un autre point y de V , on obtient un fibré principal Φ_y qui est isomorphe à Φ_x . Cela résulte du fait que Φ est transitif. Donc, il existe un élément z_o de Φ tel que $a(z_o) = x$, $b(z_o) = y$. L'application $z \to z \circ z_o$ est un isomorphisme du fibré principal Φ_y sur le fibré principal Φ_x .

3) Si E est un fibré vectoriel sur V , l'ensemble $\pi(E)$ des isomorphismes linéaires de fibres sur fibres de E , est un groupoïde de Lie sur V :

En effet, soit x_o dans V et $P = (\pi(E))_{x_o}$ l'ensemble des isomorphismes linéaires de $\mathbb{R}^m$ sur E_y, $y \in V$, où m est la dimension de E. P est un fibré principal de base V de groupe structural $GL(m,\mathbb{R})$, [4]. De la définition de ρ, on montre que l'application :

$$\mathcal{R} : \frac{P \times P}{\rho} \to \pi(E)$$

$$(z',z) \to z' \circ z^{-1}$$

est bien définie et bijective. Donc $\pi(E)$ est muni d'une structure de groupoïde de Lie sur V tel que $\mathcal{R}$ est un morphisme de groupoïdes de Lie.

Définition 3.

Soient Φ et Φ' deux groupoïdes de Lie sur V. Un morphisme de Φ' dans Φ est une application différentiable $\mathcal{R}$

$$\mathcal{R} : \Phi' \to \Phi$$

telle que $a \circ \mathcal{R} = a'$, $b \circ \mathcal{R} = b'$ et si $z \circ z'$ est défini alors $\mathcal{R}(z \circ z') = \mathcal{R}(z) \circ \mathcal{R}(z')$ et $\mathcal{R}(z^{-1}) = [\mathcal{R}(z)]^{-1}$.

Soient Φ et Φ' deux groupoïdes de Lie sur V. Nous disons que Φ' est un sous-groupoïde de Lie de Φ, s'il existe un morphisme injectif de Φ' dans Φ de rang $= \dim \Phi'$ (alors Φ' est une sous-variété de Φ).

4) Si G est un groupe de Lie, V une variété différentiable, alors $\Phi = V \times G \times V$ à une structure de groupoïde de Lie sur V, avec la loi de composition : $(x',g',y) \circ (y,g,x) = (x',g'.g,x)$ et $(a,b)(y,g,x) = (x,y)$.

Le groupoïde de Lie $V \times G \times V$ sera appelé le groupoïde de Lie trivial de groupe d'isotropie G.

De l'exemple 2), nous tirons facilement la proposition :

Proposition 1.

Φ étant un groupoïde de Lie sur V, alors pour tout point de V, il existe un voisinage ouvert U et un difféomorphisme

$$\mathcal{R} : (a,b)^{-1}(U \times U) \to U \times G \times U$$

tel que $\mathcal{R}$ est un morphisme des groupoïdes de Lie sur U, où G est un groupe de Lie isomorphe aux groupes d'isotropie de Φ .

La proposition 1, affirme que tout groupoïde de Lie est localement trivial.

§ 2 - FAISCEAU D'ALGEBRES DE LIE.

Soit (P,V,π,G) un fibré principal de base V . Soit $\mathcal{R}_g$ la translation à droite dans P définie par l'élément $g \in G$ et soit $(\mathcal{R}_g)_*$ son extension au fibré tangent $T(P)$. Un champ de vecteurs sur P sera dit invariant à droite si toutes les applications $(\mathcal{R}_g)_*$ le laissent invariant. Notons par $\mathcal{F}$ le faisceau sur V , des champs de vecteurs invariants à droite et par $\mathfrak{q}$ le faisceau des fonctions différentiables de la variété V . Le crochet de deux champs de vecteurs invariants à droite et définis sur $\pi^{-1}(U)$, U ouvert de V , est encore invariant à droite, et cela nous permet de munir $\mathcal{F}(U)$ d'une structure d'algèbre de Lie sur le corps des réels $\mathbb{R}$. Aussi $\mathcal{F}(U)$ possède une structure de $\mathfrak{q}(U)$-module. On vérifie [4] que $\mathcal{F}$ est un faisceau de $\mathfrak{q}$-modules localement libre de rang égal à $\dim V + \dim G$. Donc, on peut lui associer un fibré vectoriel F de base V , tel que le faisceau des sections, $\underline{F}$, de F est isomorphe au faisceau $\mathcal{F}$. La fibre F_x au-dessus de $x \in V$ est canoniquement isomorphe à l'espace vectoriel des champs de vecteurs invariants à droite définis sur la fibre $P_x = \pi^{-1}(x)$. Soient $x \in V$ et $z \in P_x$. Il existe un isomorphisme linéaire de F_x sur $T_z(P)$. Il sera noté $\lambda(z)$. On peut vérifier que $(\mathcal{R}_g)_* \circ \lambda(z) = \lambda(\mathcal{R}_g(z))$ pour tout z de P et g de G , [4] ou [12].

V étant une variété paracompacte, la suite des faisceaux sur V

(1) $$0 \to \mathcal{R} \to \mathcal{F} \xrightarrow{(\pi)_*} \underline{T(V)} \to 0$$

est exacte, où $\mathcal{R}$ est le faisceau sur V des champs de vecteurs invariants à droite et tangents aux fibres [4].

Soient E et F deux fibrés vectoriels sur une même base V. Rappelons que nous appelons opérateur tout V-morphisme $\mathbb{R}$-linéaire δ du faisceau $\underline{E}$ dans le faisceau $\underline{F}$.

Définition 4.

Un opérateur δ de E dans F sera dit opérateur différentiel d'ordre k si s étant une section différentiable de E, $j_x^k s = 0$ entraîne que la section $\delta(s)$ est nulle au point x.

Exemple :

Soient s une section locale de $J^{h+1}E$ (*), $\pi_h : J^{h+1}E \to J^h E$ la projection canonique ; s et $J^1(\pi_h \circ s)$ étant deux sections de $J^1(J^h E)$, d'après la suite exacte [8],

$$0 \longrightarrow J^h E \otimes T^* \longrightarrow J^1(J^h E) \longrightarrow J^h E \longrightarrow 0$$

des fibrés vectoriels on en déduit que $J^1(\pi_h \circ s)-s$ est une section de $J^h E \otimes T^*$. Ainsi, nous définissons un opérateur différentiel d'ordre 1,

$$D : \underline{J^{h+1}E} \longrightarrow \underline{J^h E \otimes T^*}$$
$$s \longrightarrow j^1(\pi_h \circ s)-s \quad .$$

Et on vérifie facilement que D est le seul opérateur de $J^{h+1}E$ dans $T^* \otimes J^h E$ satisfaisant les conditions suivantes :

i) $D(s) = 0$ si, et seulement si, s est de la forme $j^{h+1}\eta$ où $\eta \in \underline{E}$.

ii) $D(f.s) = f(Ds) + df \otimes \pi_h(s)$ pour tout $f \in \mathfrak{q}$ et $s \in \underline{J^{h+1}E}$.

Soit E un fibré vectoriel sur V et considérons le faisceau des opérateurs différentiels de E dans E. Notons par $\mathcal{D}$ ce faisceau. Il est un faisceau d'algèbres de Lie, car le commutateur des opérateurs différentiels

$$[\delta, \delta'] = \delta \circ \delta' - \delta' \circ \delta$$

est encore un opérateur différentiel de E dans E.

(*) $J^h E$ sera la variété des h-jets des sections de E.

Lemme 1.

Soient $(P,V,\pi,GL(n,\mathbb{R}))$ un fibré principal, et $E = P \times \mathbb{R}^n / GL(n,\mathbb{R})$ le fibré vectoriel de fibre $\mathbb{R}^n$ associé à P. Alors le faisceau $\mathcal{F}$ n'est autre que le faisceau de $\mathfrak{q}$-modules sur V de tous les opérateurs différentiels δ d'ordre 1 de E dans E, tels que pour toute section s de E et toute fonction f différentiable sur V, on ait :

$$\delta(f.s) = f.\delta(s) + (Xf)s ,$$

le champ de vecteurs X étant $\pi_*\delta$ dans la suite (1).

Démonstration : voir [7], p. 511.

D'après le lemme 1, la structure de $\mathbb{R}$-algèbres de Lie de $\mathcal{F}$ est alors définie par le commutateur des opérateurs différentiels.

Soit Φ un groupoïde de Lie sur V. Pour tout x de V, considérons le fibré principal (Φ_x, G_x, V, b). Nous avons donc la suite exacte de faisceaux de $\mathbb{R}$-algèbres de Lie :

(2) $$0 \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \underline{A(\Phi_x)} \xrightarrow{b_*} \underline{T(V)} \longrightarrow 0$$

où $A(\Phi_x)$ est le fibré vectoriel dont le faisceau des sections $\underline{A(\Phi_x)}$ est le faisceau des champs de vecteurs de Φ_x invariants à droite ([4], p. 85). Comme le fibré vectoriel $A(\Phi_x)$ est défini à un isomorphisme près (i.e., pour tout autre point y de V, il existe un isomorphisme de fibrés vectoriels $A(\Phi_y) \to A(\Phi_x)$) nous désignerons simplement par $A(\Phi)$ le fibré vectoriel $A(\Phi_x)$ et nous appellerons le faisceau $\underline{A(\Phi)}$ le faisceau de $\mathbb{R}$-algèbres de Lie du groupoïde de Lie Φ.

Exemples :

1) Si $\Phi = J^hV$, le fibré $A(J^hV)$ est isomorphe au fibré vectoriel $J^hT(V)$. En effet : il existe sur $\underline{J^hT(V)}$ une et une seule structure d'algèbre de Lie [8], telle que :

$$[j^h\theta_1, j^h\theta_2] = j^h[\theta_1, \theta_2]$$

et

$$[s_1, fs_2] = f[s_1, s_2] + (\beta s_1)f.s_2$$

où $\beta : \underline{J^h T(V)} \to \underline{T(V)}$ est l'application but et $(\beta s_1)f$ la dérivée de Lie de la fonction différentiable f par le champ de vecteurs βs_1 .

Considérons X un champ de vecteurs défini sur un ouvert U de V et dénotons par $p^h(X)$ son h-prolongement à la variété $J^h V$ [12], alors l'application $\mathfrak{q}(U)$-linéaire

$$\begin{aligned} h(U) : (\underline{J^h T(V)})(U) &\to (\underline{A(J^h V)})(U) \\ j^h X &\to p^h(X) \end{aligned}$$

définit un isomorphisme, $h : \underline{J^h T(V)} \to \underline{A(J^h V)}$, des faisceaux de $\mathbb{R}$-algèbres de Lie sur V .

2) Si E est un fibré vectoriel sur V , le faisceau $\underline{A(\Pi(E))}$ n'est autre que le faisceau de $\mathfrak{q}$-modules sur V , de tous les opérateurs différentiels δ d'ordre 1 de E dans E , tels que :

$$\delta(f.s) = f.\delta(s) + (b_*\delta)f.s \quad .$$

<u>En effet</u>, soient n la dimension de la fibre de E et x un point de V . Alors le fibré vectoriel associé à $(\Pi(E))_x$, de fibre $\mathbb{R}^n$, est isomorphe à E (voir [4], p. 78) . Ainsi l'affirmation suit d'après le lemme 1.

3) Si Φ est le groupoïde de Lie trivial $V \times G \times V$, le faisceau $\underline{A(\Phi)}$ est le faisceau de $\mathfrak{q}$-modules sur V des couples (X,g) où X est un champ local de vecteurs, et g une fonction locale sur V à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G . La structure de $\mathbb{R}$-algèbre de Lie de $A(\Phi)$ est alors définie par le crochet

$$[(X,g),(X',g')] = ([X,X'], X.g' - X'g + [g,g'])$$

où $X.g'$ désigne la dérivée de Lie de g' par le champ X , et $[g,g']$ la nouvelle fonction de V à valeurs dans $\mathfrak{g}$, défini par le crochet de $\mathfrak{g}$.

<u>En effet</u> :

Soit Y une section globale de $A(\Phi)$, alors $Y = (X,g)$ où X est un champ global sur V et g une fonction différentiable définie sur V et à valeurs dans $\mathfrak{g}$; $(V\times G, V, G, b)$ étant trivial, il admet une connexion ω telle que :

$$d\omega(Y,Y') = \frac{1}{2}\{Y.\omega(Y')-Y'\omega(Y)-\omega[Y,Y']\} ,$$

$$d\omega(Y,Y') = -\frac{1}{2}[\omega(Y),\omega(Y')] ,$$

et $$Y = (X,\omega(Y)) .$$

Donc pour $Y' = (X',g')$ on a :

$$\begin{aligned}[Y,Y'] &= ([X,X'],\omega[Y,Y']) \\ &= ([X,X'],Y.\omega(Y')-Y'.\omega(Y) + [\omega(Y),\omega(Y')]) \\ &= ([X,X'],X.g'-X'.g + [g,g']) .\end{aligned}$$

Si Y est une section locale de $A(\Phi)$, la démonstration est faite de la même façon.

En particulier, si $G = \{e\}$, on a $\underline{A(\Phi)} \equiv \underline{T(V)}$.

§ 3 - L'APPLICATION EXPONENTIELLE.

Φ étant un groupoïde de Lie sur V , considérons le faisceau $\Gamma(\Phi)$ des germes des applications différentiables σ définies sur un ouvert U de V à valeurs dans Φ telles que $a\circ\sigma = id(U)$ et $b\circ\sigma$ = un difféomorphisme de U dans un ouvert U' de V .

$\Gamma(\Phi)$ <u>est un groupoïde sur</u> V :

<u>En effet</u>, soient σ et σ' dans $\Gamma(\Phi)$ définis sur U et $(b\circ\sigma)(U) = U'$. Posons :

$$\begin{aligned}\sigma'.\sigma &: U \to \Phi \\ x &\to [\sigma'((b\circ\sigma)(x)).\sigma(x) .\end{aligned}$$

Ainsi $a\circ(\sigma'.\sigma) = id(U)$ et $b\circ(\sigma'.\sigma) = (b\sigma')\circ(b\sigma)$ est un difféomorphisme local de U dans V. Par conséquent $\sigma'.\sigma$ est dans $\Gamma(\Phi)$. En plus, l'application :

$$\begin{aligned} I : V &\to \Phi \\ x &\to I(x) \end{aligned}$$

est telle que $\sigma.I = I.\sigma = \sigma$.

Si σ est définie dans un ouvert U de V, l'application σ^{-1} définie dans $(b\circ\sigma)(U)$ telle que $\sigma^{-1}[(b\circ\sigma)(x)] = [\sigma(x)]^{-1}$ correspond à l'élément inverse de σ. L'associativité étant vérifiée, on a que $\Gamma(\Phi)$ est un groupoïde sur V.

Supposons que Φ est un groupoïde de Lie linéaire, i.e., un sous-groupoïde de Lie de $\pi(E)$ où E est un fibré vectoriel de base V. Alors le faisceau $\underline{A(\Phi)}$ est un faisceau des opérateurs différentiels, d'ordre 1, de E dans E (exemple 2, p. 8), et si σ est une section de $\Gamma(\Phi)$ définie dans un ouvert U de V telle que $(b\circ\sigma)(U) = U'$, alors pour toute section s de E au-dessus de U', nous avons une nouvelle section,

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(s) : U &\to E \\ x &\to \sigma(x)^{-1}[(s\circ\varphi)(x)] \end{aligned}$$

où $\varphi = b\circ\sigma$.

On vérifie l'égalité :

$$\widetilde{\sigma'.\sigma} = \tilde{\sigma}\circ\tilde{\sigma}' .$$

En effet,

$$\begin{aligned} [\widetilde{\sigma'.\sigma}(s)](x) &= (\sigma'.\sigma)(x)^{-1}[(s\circ(\varphi'\circ\varphi))(x)] \\ &= [[\sigma'(\varphi(x))].\sigma(x)]^{-1}[(s_o(\varphi'(\varphi(x)))] \\ &= [\sigma^{-1}(x).\sigma'^{-1}(\varphi(x))][s(\varphi'(\varphi(x)))] \\ &= [\tilde{\sigma}(\tilde{\sigma}'(s))](x) . \end{aligned}$$

Exemple :

Soit $\Phi = V \times \{e\} \times V$ le groupoïde trivial de groupe d'isotropie $\{e\}$ et $E = V \times \mathbb{R}$ le fibré vectoriel trivial. Dans ce cas $\underline{A(\Phi)} = \underline{T(V)}$ et $\Gamma(\Phi)$ s'identifie au faisceau des difféomorphismes locaux de V. Notons par $H^\circ_c(V,\underline{T(V)})$ l'ensemble des champs des vecteurs sur V, global à support compact. Alors l'exponnentielle classique nous permet de définir une application

$$\begin{aligned} \mathrm{Exp} : H^\circ_c(V,\underline{T}) &\to H^\circ(V,\Gamma(\Phi)) \\ X &\to \mathrm{Exp}\, X \end{aligned}$$

où $H^\circ(V,\Gamma(\Phi))$ est l'ensemble des sections globales de $\Gamma(\Phi)$.

Voici la généralisation de ce résultat :

Théorème 1. [8]

Φ étant un sous-groupoïde de Lie de $\pi(E)$, il existe une et une seule application

$$\mathrm{Exp} : H^\circ_c(V,\underline{A(\Phi)}) \to H^\circ(V,\Gamma(\Phi))$$

vérifiant les conditions :

1) $b \circ \mathrm{Exp}\, \delta = \mathrm{Exp}(b_* \delta)$

2) Si 0 est la section nulle de $A(\Phi)$, alors $\mathrm{Exp}\, 0 = I =$ section unité de (Φ, a, V)

3) $\lim\limits_{t \to t_o} \dfrac{\widetilde{\mathrm{Exp}\, t\delta(s)} - \widetilde{\mathrm{Exp}\, t_o\delta(s)}}{t - t_o} = \widetilde{\mathrm{Exp}\, t_o}\delta[\delta(s)]$, quelle que soit la section s de E, t étant un paramètre.

Démonstration :

a) Supposons d'abord que Φ est un groupoïde de Lie trivial. Considérons donc $E = V \times \mathbb{R}^n$, G un sous-groupe de Lie de $GL(n,\mathbb{R})$ et $\Phi = V \times G \times V$. Alors si $\delta \in H^\circ_c(V,\underline{A(\Phi)})$, d'après l'exemple 3 du § 2, on a $\delta = (X,\mu)$ où X est un champ de vecteurs sur V à support compact et μ une fonction définie sur V à valeurs dans $\mathfrak{g}$ = l'algèbre de Lie de G, à support compact. La section $\mathrm{Exp}\,(t\delta)$ de $\Gamma(\Phi)$ si elle existe est de la forme $\mathrm{Exp}\,t\delta = (\mathrm{Exp}(tX), g(t))$ où pour chaque t, $g(t)$ est une fonction différentiable définie sur V à valeurs dans G. Pour une section s de E, on a :

$$\begin{aligned}(\widetilde{\mathrm{Exp}\,t\delta}(s))(x) &= (\mathrm{Exp}\,t\delta)(x)^{-1}[(s\circ \mathrm{Exp}\,tX)(X)] \\ &= (x, g(t)^{-1}(x))[(s\circ \mathrm{Exp}\,tX)(x)] \\ &= g(t)^{-1}(x)[(s\circ \mathrm{Exp}\,tX)(x)]\end{aligned}$$

pour tout x de V. De même, on a :

$$\begin{aligned}(\widetilde{\mathrm{Exp}\,t\delta}(\delta(s)))(x) &= g(t)^{-1}(x)[(\delta(s)\circ \mathrm{Exp}\,tX)(x)] \\ &= g(t)^{-1}(x)[((Xs+\mu s)\circ \mathrm{Exp}\,tX)(x)]\ .\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\widetilde{\mathrm{Exp}\,t\delta}(s) = g(t)^{-1}(s\circ \mathrm{Exp}\,tX)$$

et
$$\widetilde{\mathrm{Exp}\,t\delta}(\delta s) = g(t)^{-1}[(Xs+\mu s)\circ \mathrm{Exp}\,tX]\ .$$

La troisième condition du théorème dit que pour chaque section s de E, nous avons :

$$\lim_{t\to t_o} \frac{g(t)^{-1}(s\circ \mathrm{Exp}\,tX) - g(t_o)^{-1}(s\circ \mathrm{Exp}\,t_oX)}{t - t_o}$$

$$= g(t_o)^{-1}[(Xs+\mu s)\circ \mathrm{Exp}\,(t_oX)]$$

Considérons x_o dans V et γ l'application qui a t associé $g(t)^{-1}(x_o) = g(t,x_o)^{-1}$. γ est différentiable, car

(1) $$\lim_{t\to t_o} \frac{g(t,x_o)^{-1} - g(t_o,x_o)^{-1}}{t - t_o}$$

$$= g(t_o,x_o)^{-1}[(\mu\circ \mathrm{Exp}\,t_oX)(x_o)]\ .$$

En plus γ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$g(t,x_o)^{-1}\frac{dg(t,x_o)}{dt} = -g(t,x_o)^{-1}[(\mu\circ \operatorname{Exp} tX)(x_o)].g(t,x_o) \quad .$$

<u>En effet</u>, γ étant différentiable entraîne que $t \to g(t,x_o)$ est différentiable, donc l'application $c : t \to g(t,x_o)^{-1}g(t,x_o)$ est telle que :

$$0 = \frac{de}{dt} = \frac{d(g(t,x_o)^{-1})}{dt} . g(t,x_o) + g(t,x_o)^{-1} . \frac{dg(t,x_o)}{dt} \quad .$$

Ainsi,

$$g(t,x_o)^{-1}\frac{dg(t,x_o)}{dt} = -g(t,x_o)^{-1}[(\mu\circ \operatorname{Exp} tX)(x)].g(t,x_o) \ .$$

<u>Réciproquement</u>, considérons x_o dans V fixé et $g(t,x_o)$ une fonction différentiable dans t à valeurs dans G telle que :

(2) $$g(t,x_o)^{-1}\frac{dg(t,x_o)}{dt} = -g(t,x_o)^{-1}[(\mu\circ \operatorname{Exp} tX)(x_o)].g(t,x_o) \ , \text{ avec}$$

$$g(0,x_o) = \ell = \text{l'identité de } G \ .$$

L'équation différentielle (2) admet une et une seule solution $g(t,x_o)$ qui dépend différentiablement de x_o et telle que $g(0,x_o) = \ell$ = l'élément neutre de G .

Posons par définition :

$$(\operatorname{Exp} \delta)(x) = ((\operatorname{Exp} X)(x), g(1,x))$$

pour tout x de V . Ainsi les trois conditions du théorème sont vérifiées, car la relation (1) est équivalente à (2).

b) Nous ne donnerons pas la démonstration de ce théorème dans le cas général pour ne pas alourdir encore plus notre exposé.

<u>Remarque</u> : Supposons que Φ est un sous-groupoïde de Lie de $\pi(E)$ et ψ un sous-groupoïde de Lie de Φ . Si $\delta \in H^\circ_c(V,A(\Phi))$ est telle que $\operatorname{Exp} t\delta \in H^\circ(V,\Gamma(\psi))$ pour tout t , alors $\delta \in H^\circ_c(V,A(\psi))$. Cela résulte de la démonstration antérieure.

§ 4 - LE GROUPOIDE DE PROLONGEMENT D'ORDRE h DE Φ .

Soit Φ un groupoïde de Lie sur la variété différentiable V . D'après sa définition (Φ, a, V) est une fibration (i.e. a est surjective et de rang maximal). Considérons l'ensemble $\Phi_h = J^h\Gamma(\Phi)$ pour tout entier $h \geq 0$. Ainsi $\Phi_h \hookrightarrow J^h\Phi$.

Proposition 2.

L'ensemble Φ_h est un groupoïde de Lie sur V , pour tout entier $h \geq 0$.

Démonstration :

Considérons les applications $a_h : \Phi_h \to V$, $a_h(X) = \alpha(X)$ où α est l'application source $J^h\Phi \to V$, et $b_h : \Phi_h \to V$ définie par $b_h(X) = b(\beta(X))$ où $\beta(X)$ est le but du jet X . Alors si X et X' sont deux éléments de Φ_k vérifiant $a_h(X) = b_h(X')$ le composé X.X' est défini, car $\Gamma(\Phi)$ est un groupoïde sur V . Muni de cette loi de composition interne et partielle Φ_k est un groupoïde sur V .

Pour montrer que c'est en fait un groupoïde de Lie sur V , il suffirait de regarder localement, i.e., supposer que Φ est le groupoïde de Lie trivial $\mathbb{R}^n \times G \times \mathbb{R}^n$. Dans ce cas, considérons X un élément de Φ_k tel que $a_h(X) = x_o$. X est le h-jet d'une section σ de $\Gamma(\Phi)$ de la forme (f,g) où f est un difféomorphisme local de $\mathbb{R}^n$ et g une application locale à valeurs dans G . D'autre part, l'espace $T^h_{x_o}(\mathbb{R}^n,G)$, des h-jets des applications de $\mathbb{R}^n$ dans G de source x_o est un groupe de Lie isomorphe au produit semi-direct $T^h_{x_o,e}(\mathbb{R}^n,G) \times G$, où $T^h_{x_o,e}(\mathbb{R}^n,G)$ est le sous-ensemble de $T^h_{x_o}(\mathbb{R}^n,G)$ forme des jets de but e = l'élément neutre de G . Ainsi $(\Phi_h)_{x_o} = a_h^{-1}(x_o) \equiv \mathbb{R}^n \times (T^h_{x_o,e}(\mathbb{R}^n,G) \times G \times L^h_n)$. Donc

$$\Phi_h \equiv \mathbb{R}^n \times (T^h_{o,e}(\mathbb{R}^n,G) \times G \times L^h_n) \times \mathbb{R}^n .$$

C.Q.F.D.

Φ_h sera dit le <u>groupoïde de prolongement d'ordre</u> h <u>de</u> Φ . Et on vérifie qu'il existe une injection canonique $(\Phi_h)_1 \hookleftarrow \Phi_{h+1}$ pour tout entier $h \geq 0$, et que (Φ_h, a_h, V) est une sous-variété fibrée de $(J^h\Phi, \alpha, V)$.

Remarques :

1) Si $\Phi = V \times \{e\} \times V$, Φ_h s'identifie à J^hV .

2) Soit (P, V, G, π) une G-structure sur V et $\Phi = P.P^{-1}$ le groupoïde associé à P . Si l'on se donne $\sigma \in \Gamma(\Phi)$ définie dans un ouvert de V , avec $(b\circ\sigma)(U) = U'$, l'application $f : \pi^{-1}(U) \to \pi^{-1}(U')$, $f(z) = [\sigma(\pi(z))](z)$, est un automorphisme local de P (i.e. , bijective, bidifférentiable et $f(z.g) = f(z).g$ pour tout g de G), car l'inverse f^{-1} de f est défini par $f^{-1}(z) = [\sigma^{-1}(\pi(z))](z)$.

<u>Réciproquement</u>, considérons f un automorphisme local de P défini dans un ouvert U(f) de P . Considérons $x \in \pi(U(f))$ et $z \in \pi^{-1}(x)$, alors $\sigma(x) = f(z).z^{-1}$ est un élément de Φ . En plus, $\sigma(x)$ est bien défini, car si $z' \in \pi^{-1}(x)$ il existe $g \in G$ tel que $z' = z.g$, d'où $f(z').z'^{-1} = (f(z).g).(z.g)^{-1}$. Cela entraîne que le couple $(f(z'), z')$ est équivalent au couple $(f(z), z)$. D'où $f(z').z'^{-1} = f(z).z^{-1}$. Ainsi, on peut considérer la section $x \to \sigma(x)$.

<u>Conclusion</u> : <u>Il existe une correspondance biunivoque entre les sections inversibles de</u> Φ (i.e. les éléments de $\Gamma(\Phi)$) <u>et les automorphismes locaux du fibré principal</u> P .

Dénotons par Γ l'ensemble de ces automorphismes locaux . Γ constitue un pseudo-groupe de transformations sur P , [12], et on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} J^h\Gamma & \longrightarrow & J^h\Gamma(\Phi) \\ \alpha \downarrow & & \downarrow a_h \\ P & \xrightarrow{\pi} & V \end{array}$$

où $J^h\Gamma$ est le groupoïde des h-jets des applications $f \in \Gamma$. A tout $j^h_x\sigma$ de $J^h\Gamma(\Phi)$ correspond la famille des jets $j^h_z f$ de $J^h\Gamma$ où f correspond à la section σ et z parcourant la fibre $P_x = \pi^{-1}(x)$. En plus, $J^h\Gamma$ est l'image réciproque de $(J^h\Gamma(\Phi), a_h, V)$ par π :

En effet, si $X \in J^h\Gamma$, $X = j^h_z f$, on a :

$$(\pi\circ\alpha)(X) = a_h(j^h_{\pi(z)}\sigma) .$$

Réciproquement, si $z \in P$, $j^h_{\pi(z)}\sigma \in J^h\Gamma(\Phi)$, il existe un automorphisme local f de P défini dans un voisinage z tel que $j^h_z f \in \pi^*(J^h\Gamma(\Phi))$, où $\pi^*(J^h\Gamma(\Phi))$ dénote l'image réciproque de $J^h\Gamma(\Phi)$ par π.

3) Considérons sur la variété différentiable V une G-structure (P, V, π, G), et dénotons par $T^h_o(\mathbb{R}^n, P)$ la variété de h-jets des applications de $\mathbb{R}^n$ dans P de source zéro.

L'application n induit une fibration

$$T^h_n(\pi) : T^h_o(\mathbb{R}^n, P) \to T^h_o(\mathbb{R}^n, V) ,$$

$$T^h_n(\pi)(j^h_o f) = j^h_o(\pi\circ f) , \quad \text{où} \quad n = \dim V .$$

Considérons l'espace de repères $p : \mathcal{R}^h(V) \to V$ et notons par $C^h_n(P)$ l'image réciproque de $\mathcal{R}^h(V)$ par $T^h_n(\pi)$. D'où le diagramme commutatif,

$$\begin{tikzcd}
C^h_n(P) \arrow[r, "T^h_n(\pi)"] \arrow[d, "\beta"] & \mathcal{R}^h(V) \arrow[d, "p"] \\
P \arrow[r, "\pi"] & V
\end{tikzcd}$$

d'après les définitions précédentes.

Si $\Phi = P.P^{-1}$ est le groupoïde de Lie associé à P, Φ_h <u>opère transitivement et librement sur</u> $C^h_n(P)$, dans le sens suivant :

Soit $X^h = j^h_o s$ dans $C^h_n(P)$ où s est une application définie dans un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ et telle que $\pi \circ s : \mathcal{U} \to U$ est un difféomorphisme. Condidérons $z = j^h_{x_o} \sigma \in \Phi_k$, σ définie dans U et $x_o = (\pi \circ s)(o)$. Si l'on considère l'application $s' : \mathcal{U} \to P$ définie par $s'(v) = [\sigma((\pi \circ s)(v))]s(v)$, le jet $j^h_o s' \in C^h_n(P)$ et l'on peut définir $j^h_{x_o} \sigma * j^h_o s = j^h_o s'$. D'où nous avons une loi de composition interne partielle

$$\Phi_h \times C^h_n(P) \to C^h_n(P)$$

et $j^h_{x_o} \sigma * j^h_o s$ est définie si $(\pi \circ s)(o) = x_o$.

Ainsi Φ_h opère sur la variété différentiable $C^h_n(P)$. Montrons qu'il opère transitivement et librement sur $C^h_n(P)$:

Considérons $X^h = j^h_o s$, $X'^h = j^h_o s'$ deux éléments de $C^h_n(P)$. Alors s et s' définissant des difféomorphismes locaux φ et φ' de $(\mathbb{R}^n, o)$ sur V . On définit une section σ de (Φ, a, V) , dont le domaine de définition est le domaine de définition de $\varphi' \circ \varphi^{-1}$, par

$$\sigma : y \to [s'(v)].[s(v)]^{-1} ,$$

où $v = \varphi^{-1}(y)$. Le h-jet $j^h_{x_o} \sigma \in \Phi_h$ est bien défini et $j^h_{x_o} \sigma * X^h = X'^h$. D'ailleurs, c'est le seul h-jet satisfaisant $j^h_{x_o} \sigma * X^h = X'^h$. D'où la conclusion.

Considérons (E, π, V) un fibré vectoriel et Φ un sous-groupoïde de Lie de $\pi(E)$.

<u>Lemme 2.</u>

Φ_h est un sous-groupoïde de Lie de $\pi(J^h E)$, pour tout entier $h \geq 0$.

<u>Démonstration</u> :

Il suffit de considérer le morphisme injectif des groupoïdes de Lie ainsi défini :

$$\mathcal{R} : \Phi_h \longrightarrow \pi(J^h E)$$

$$X^h = j^h_x \sigma \longrightarrow \mathcal{R}(j^h_x \sigma)$$

où $\mathcal{R}(j^h_x\sigma)(j^h_x s) = j^h_{b_h(X^h)} \sigma^{-1}(s)$.

Lemme 3.

Chaque section δ de $A(\Phi)$ définit un opérateur différentiel d'ordre 1 de $E \otimes T^*$ dans $E \otimes T^*$.

Démonstration :

Considérons une section de $E \otimes T^*$ de la forme $s \otimes \omega$ et posons

$\delta(s\otimes\omega) = \delta(s)\otimes\omega + s\otimes b_*(\delta).\omega$, où $b_*(\delta).\omega$ est la dérivée de Lie de ω par rapport au champ de vecteurs $b_*(\delta)$. Si f est un élément de q , on vérifie que

$$\begin{aligned}\delta(f.s\otimes\omega) &= \delta(f.s)\otimes\omega + fs\otimes b_*(\delta).\omega = [f.\delta(s) + (b_*(\delta)f).s]\otimes\omega + fs\otimes b_*(\delta).\omega \\ &= \delta(s\otimes f\omega) .\end{aligned}$$

Ainsi si η est une section locale de $E \otimes T^*$, $\eta = \sum_i f_i s_i \otimes \omega_i$. Posons alors par définition $\delta(\eta) = \sum_i \delta(f_i s_i \otimes \omega_i)$.

Lemme 4.

Deux sections s et s' de $J^h E$ sont identiques si, et seulement si,

$$\pi_{h-1}\circ s = \pi_{h-1}\circ s'$$

et

$$D(s) = D(s') .$$

Démonstration :

Supposons que $\pi_{h-1}\circ s = \pi_{h-1}\circ s'$ et $D(s-s') = 0$. Alors il existe une section η de E telle que $s - s' = j^h\eta = j^1(j^{h-1}\eta)$. Mais l'opérateur

D scinde le faisceau $\underline{J^1(J^{h-1}E)}$ en une somme de deux faisceaux $\underline{J^{h-1}E}$ et $\underline{T^* \otimes J^{h-1}E}$. Alors de $s - s' = j^1(j^{h-1}n)$ et $\pi_{h-1} \circ s' = \pi_{h-1} \circ s$, on conclut $s = s'$.

Lemme 5.

Le faisceau de $\mathfrak{q}$-modules $\underline{J^hA(\Phi)}$ est un sous-faisceau de $\mathfrak{q}$-modules de $\underline{A(\pi(J^hE))}$, pour tout entier $h \geq 0$.

Démonstration :

On sait que $\underline{J^hA(\Phi)}$ est un faisceau de $\mathfrak{q}$-modules engendré par les sections intégrables (i.e. sections de la forme $j^h\delta$ où $\delta \in \underline{A(\Phi)}$).

Pour $h = 0$, $\underline{J^\circ A(\Phi)} = \underline{A(\Phi)}$, $J^\circ E = E$, et si $\delta \in \underline{A(\Phi)}$ on a $\delta \in \underline{A(\pi(E))}$ car Φ est un sous-groupoïde de Lie de $\pi(E)$.

Supposons que le lemme soit vérifié pour tout entier $r < h$, $r \geq 0$. Considérons σ une section locale de J^hE , $\sigma = \sum_{i=1} f_i j^h s_i$. Posons

$$j^h\delta(\sigma) = \sum_i \left(f_i j^h(\delta s_i) + [(b_*\delta).f_i] j^h s_i\right) .$$

Il faut démontrer que $j^h\delta$ est bien défini (i.e. ne dépend pas du choix de s_i) :

En effet, soit η_i une section de E telle que

$$f_i j^h s_i = f_i j^h \eta_i ,$$

alors,

$$\pi_{h-1}(j^h\delta(\sigma)) = \sum_i (f_i j^{h-1}(\delta s_i) + [(b_*\delta).f_i] j^{h-1} s_i)$$

et

$$\begin{aligned} D(j^h\delta(\sigma)) &= \sum_i D\{f_i j^h\delta(s_i) + (b_*(\delta))f_i) j^h s_i\} \\ &= \sum_i (df_i \otimes j^{h-1}(\delta s_i) + d((b_*\delta).f_i) \otimes j^{h-1} s_i) \\ &= \sum_i (df_i \otimes j^{h-1}(\delta s_i) + (b_*\delta) : df_i \otimes j^{h-1} s_i) \end{aligned} .$$

Par hypothèse de récurrence $j^{h-1}\delta : \underline{J^{h-1}E} \to \underline{J^{h-1}E}$ est bien défini et induit, d'après le lemme 3, un opérateur d'ordre 1 de $J^{h-1}E \otimes T^*$ dans $J^{h-1}E \otimes T^*$.

D'où :

$$\pi_{h-1}(j^h\delta(\sigma)) = j^{h-1}\delta(\pi_{h-1}(\sigma)) = j^{h-1}\delta(\sum_i f_i j^{h-1}s_i)$$
$$= j^{h-1}\delta(\sum_i f_i j^{h-1}\eta_i) = \pi_{h-1}(j^h\delta(\sum_i f_i j^h\eta_i)) \ ,$$

et

$$D(j^h\delta(\sigma)) = j^{h-1}\delta[D(\sigma)] = D(j^h\delta(\sum_i f_i j^h\eta_i)) \ .$$

On conclut :

$$j^h\delta(\sum_i f_i j^h s_i) = j^h\delta(\sum_i f_i j^h\eta_i)$$

d'après le lemme 4. Par conséquent $j^h\delta$ est bien défini.

On vérifie en plus que $j^h\delta$ est un opérateur d'ordre 1 de J^hE dans J^hE . Ainsi, $j^h\delta \in \underline{A(\pi(J^hE))}$. D'après la remarque au début de la démonstration, si τ est une section locale de $\underline{J^hA(\Phi)}$, on a que τ est une section de $\underline{A(\pi(J^hE))}$. D'où le lemme.

<u>Corollaire 1</u>.

<u>Le faisceau</u> $\underline{J^hA(\Phi)}$ <u>est un sous-faisceau de $\mathbb{R}$-algèbres de Lie de</u> $\underline{A(\pi(J^hE))}$, <u>pour tout entier</u> $h \geq 0$.

<u>Démonstration</u> :

Φ étant un sous-groupoïde de Lie de $\pi(E)$, $\underline{A(\Phi)}$ est un sous-faisceau de $\mathbb{R}$-algèbres de Lie de $\underline{A(\pi(E))}$, où le crochet est donné par le commutateur des opérateurs différentiels.

a) Soient $j^h\delta$, $j^h\delta'$ deux sections intégrables de $J^hA(\Phi)$, alors d'après le lemme 5, on a :

$$[j^h\delta, j^h\delta'](f.j^hs) = (j^h\delta \circ j^h\delta')(fj^hs) - (j^h\delta' \circ j^h\delta)(f.j^hs)$$
$$= j^h\delta\,[f.j^h(\delta's)+((b_*\delta').f).j^hs] - j^h\delta'[f.j^h(\delta s)+((b_*\delta).f)j^hs]$$
$$= (j^h[\delta,\delta'])(f.j^hs) \quad ,$$

pour f dans $\mathfrak{q}$ et s dans $\underline{E}$. D'où,

$$[j^h\delta, j^h\delta'] = j^h[\delta, \delta']$$

est dans $\underline{J^hA(\Phi)}$.

b) De même, on démontre :

$$[j^h\delta, fj^h\delta'] = f.j^h[\delta, \delta'] + [(b_*\delta).f]\,j^h\delta' \ .$$

Ainsi, $\underline{J^hA(\Phi)}$ est un sous-faisceau de $\mathbb{R}$-algèbres de Lie de $\underline{A(\pi(J^hE))}$.

Lemme 6.

Soit δ un élément de $H^\circ_c(V, \underline{A(\Phi)})$, alors $\operatorname{Exp}(j^h\delta) = j^h(\operatorname{Exp}\delta)$.

Démonstration :

Remarquons que si σ est une section globale de $\Gamma(\Phi)$ alors $j^h\sigma$ est une section globale de $\Gamma(\Phi_h)$, pour tout entier $h \geq 0$. D'autre part, $\underline{J^hA(\Phi)}$ est un sous-faisceau de $\underline{A(\pi(J^hE))}$, et Φ_h est un sous-groupoïde de Lie de $\pi(J^hE)$. Le lemme est vérifié si nous démontrons la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^\circ_c(V, \underline{A(\Phi)}) & \xrightarrow{\operatorname{Exp}} & H^\circ(V, \Gamma(\Phi)) \\ \Big\downarrow j^h & & \Big\downarrow j^h \\ H^\circ_c(V, \underline{J^hA(\Phi)}) & \xrightarrow{\operatorname{Exp}} & H^\circ(V, \Gamma(\pi(J^hE))) \end{array}$$

Mais cela résulte de l'unicité de l'application exponentielle :

$$\operatorname{Exp} : H^\circ_c(V, \underline{J^hA(\Phi)}) \to H^\circ(V, \Gamma(\pi(J^hE))) \ ,$$

car l'application

$$j^h\delta \to j^h(\operatorname{Exp}\delta)$$

satisfait les conditions du théorème 1.

Nous savons, d'après le lemme 2, que $\underline{A(\Phi_h)}$ est un sous-faisceau de q-modules de $\underline{A(\pi(J^hE))}$. En plus, $\underline{J^hA(\Phi)}$ est un sous-faisceau de q-modules de $\underline{A(\pi(J^hE))}$ engendré par les sections intégrables $j^h\delta$. Le lemme précédent dit que si $\delta \in H^o_c(V,\underline{A(\Phi)})$, alors $\mathrm{Exp}(j^h\delta) = j^h(\mathrm{Exp}\ \delta)$ entraîne $\mathrm{Exp}(j^h\delta) \in H^o(V,\Gamma(\Phi_h))$. D'où $j^h\delta \in H^o_c(V,A(\Phi_h))$, d'après la remarque de la page . Ainsi $\underline{J^hA(\Phi)}$ est un sous-faisceau de q-modules de $\underline{A(\Phi_h)}$. D'autre part,

$$\begin{aligned}\dim(A(\Phi_h)) &= \dim V + \dim G + \dim L^h_n + \dim T^h_{o,e}(\mathbb{R}^n,G)\\ &= \dim A(\Phi) + \dim L^h_n + \dim T^h_{o,e}(\mathbb{R}^n,G)\\ &= \dim J^hA(\Phi)\ ,\end{aligned}$$

où $n = \dim V$ et G un groupe de Lie isomorphe aux groupes d'isotropie de Φ.

Les affirmations précédentes nous permettent d'énoncer le résultat suivant:

Théorème 2.

Φ <u>étant un sous-groupoïde de Lie de</u> $\pi(E)$ <u>sur la variété différentiable</u> V, <u>on a</u> :

$$\underline{J^hA(\Phi)} \equiv \underline{A(\Phi_h)}$$

<u>pour tout entier</u> $h \geq 0$.

§ 5 - EQUATIONS DE LIE

Dans ce paragraphe, nous allons utiliser la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles (linéaires ou non-linéaires) telle qu'elle est développée dans [1], [2], [11].

Supposons que V soit connexe et considérons la proposition suivante qui a été démontrée dans [12] :

Proposition 3.

Il existe une correspondance biunivoque entre les sous-groupoïdes de Lie Φ^h de J^hV, tels que les fibres $(\Phi^h)_x$ sont connexes, et les équations différentielles d'ordre h, $\mathcal{R}^h \subset J^hT(V)$, qui vérifient les conditions :

1) *$\mathcal{R}^h$ est un faisceau d'algèbres de Lie.*

2) *$\mathcal{R}^h$ est formellement transitive (i.e. l'application but $\beta : \mathcal{R}^h \to T(V)$ est surjective).*

Considérons la variété fibrée $\pi_1 : V \times V \to V$, $\pi_1(x,y) = x$. Alors pour tout entier $h \geq 0$, on peut considérer $\alpha : J^hV \to V$ comme une sous-variété fibrée de $\alpha : J^h(V \times V) \to V$, à travers l'application différentiable $J^hV \to J^h(V \times V)$ qui associe au h-jet $j^h_{x_o} f$ le h-jet de la section $x \to (x,f(x))$. Ainsi si Φ^h est un sous-groupoïde de Lie de J^hV, on pourra considérer $\alpha : \Phi^h \to V$ comme une équation différentielle, d'ordre h, sur le fibré $(V \times V, \pi_1, V)$.

Lemme 7.

Φ^h étant un sous-groupoïde de Lie de J^hV, on a :

$$(\Phi^h)_1 \cap J^{h+1}V = \Phi^{(h)+1}$$

où $\Phi^{(h)+1}$ = 1-prolongement de l'équation différentielle (Φ^h, α, V).

Démonstration :

Par définition $\Phi^{(h)+1} = J^1\Phi \cap J^{h+1}V$. Ainsi, $(\Phi^h)_1 \cap J^{h+1}V$ est inclus dans $\Phi^{(h)+1}$. Réciproquement si $X^{h+1} \in \Phi^{(h)+1}$, on a :

$$X^{h+1} = j^1_{x_o}\sigma = j^{h+1}_{x_o}f$$

où σ est une section de (Φ^h, α, V) et f un difféomorphisme local de V . Un calcul en coordonnées locales nous permet de démontrer que σ est une section inversible. Par conséquent, X^{h+1} appartient à $(\Phi^h)_1 \cap J^{h+1}V$.

Dorénavant, considérons $\mathcal{R}^h \subset J^hT(V)$ une équation différentielle satisfaisant les hypothèses de la proposition 3, telle que :

$$\mathcal{R}^{(h)+1} = J^1\mathcal{R}^h \cap J^{h+1}T(V)$$

est une équation différentielle d'ordre $h+1$, sur $T(V)$, et la projection $\pi_h : \mathcal{R}^{h+1} \to \mathcal{R}^h$ surjective.

$\underline{\mathcal{R}}^h$ étant un faisceau d'algèbres de Lie, $\underline{\mathcal{R}}^{(h)+1}$ est aussi un faisceau d'algèbres de Lie ([9], p. 198). D'après la proposition 3 , considérons Φ^{h+1} (resp. Φ^h) le groupoïde de Lie sur V associé à $\mathcal{R}^{(h)+1}$ (resp. $\mathcal{R}^h$).

Lemme 8.

La projection $\pi_h : J^{h+1}V \to J^hV$ induit une fibration $\pi_h : \Phi^{h+1} \to \Phi^h$. En plus π_h est un morphisme des groupoïdes de Lie de base V .

Démonstration :

Soit x un élément de V et J^{h+1}_xV la fibre au-dessus de x . Considérons sur J^{h+1}_xV le système différentiel $\mathcal{D}'$ définissant $(\Phi^{h+1})_x$ à partir de $\mathcal{R}^{(h)+1}$. Le diagramme suivant,

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & 0 & \longrightarrow & J^{h+1}_{\beta(z)}T & \xrightarrow{\lambda^{h+1}(z)} & T_z(J^{h+1}_x V) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \Big\downarrow \pi_h & & \Big\downarrow (\pi_h)_* & & \\
(1) & 0 & \longrightarrow & J^{h}_{\beta(z)}T & \xrightarrow{\lambda^{h}(\pi_h(z))} & T_{\pi_h(z)}(J^{h}_x V) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \\
 & & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

étant exact et commutatif ([3] ou [12]), pour tout z de $J^{h+1}_x V$, on a

$$(\pi_h)_*(\mathcal{D}'(z)) = \mathcal{D}(\pi_h(z))$$

où $\mathcal{D}$ est le système différentiel définissant $(\Phi^h)_x$ à partir de $\mathcal{R}^h$. D'où la projection $\pi_h : J^{h+1}_x V \to J^h_x V$ induit une application différentiable $\pi_h : (\Phi^{h+1})_x \to (\Phi^h)_x$.

D'autre part, considérons la restriction à $\pi_h^{-1}(\Phi^h_x)$ du système différentiel $\mathcal{D}'$. Soit P une variété intégrale maximale de $\mathcal{D}'$ et $\pi_h : P \to (\Phi^h)_x$. Le diagramme (1) et la surjectivité de $\mathcal{R}^{(h)+1} \to \mathcal{R}^h$, entraînent $(\pi_h)_* : T_z(P) \to T_{\pi_h(z)}((\Phi^h)_x)$ surjective. Ainsi $\pi_h(P)$ est un ouvert de $(\Phi^h)_x$, pour toute variété intégrale maximale P de $\mathcal{D}'$. $\mathcal{D}'$ étant invariant par les translations du groupe structural de la fibration principale $\pi_h^{-1}((\Phi^h)_x) \to (\Phi^h)_x$, on a que toute translation de ce groupe structural transforme P, en une variété intégrale maximale de $\mathcal{D}'$. Donc si P et P' sont deux variétés intégrales maximales, $\pi_h(P)$ et $\pi_h(P')$ sont identiques ou disjoints. Comme $(\Phi^h)_x$ est connexe et $\{\pi_h(P)\}$ constitue une partition de $(\Phi^h)_x$, on a $\pi_h(P) = \pi_h(P') = (\Phi^h)_x$. Mais $(\Phi^{h+1})_{x_o}$ est la variété intégrale maximale de $\mathcal{D}'$ passant par l'unité $I^{h+1}(x)$ et $\pi_h(\Phi^{h+1})_x \hookrightarrow (\Phi^h)_x$, d'où

$$\pi_h((\Phi^{h+1})_x) = (\Phi^h)_x .$$

Par conséquent,

$$\pi_h : \Phi^{h+1} \to \Phi^h$$

est surjective.

Montrons que π_h est <u>de rang maximal</u> pour terminer la démonstration :

Soit $z \in \Phi^{h+1}$ de source x et considérons le diagramme exact et commutatif,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T_z((\Phi^{h+1})_x) \arrow[r] \arrow[d, "(\pi_h)_*"] & T_z(\Phi^{h+1}) \arrow[r, "\alpha_*"] \arrow[d, "(\pi_h)_*"] & T_x(V) \arrow[r] \arrow[d, "id(T_x(V))"] & 0 \\
0 \arrow[r] & T_{\pi_h(z)}((\Phi^h)_x) \arrow[r] \arrow[d] & T_{\pi_h(z)}(\Phi^h) \arrow[r, "\alpha_*"] & T_x(V) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Cela entraîne $(\pi_h)_* : T_z(\Phi^{h+1}) \longrightarrow T_{\pi_h(z)}(\Phi^h)$ surjective. D'où notre lemme.

Nous pouvons identifier $J^{h+1}V$ à un sous-groupoïde de Lie de $(J^hV)_1$ (d'ailleurs nous avons déjà fait cette identification), à travers l'application différentiable :

$$\begin{aligned} P^1(id_h) \ : \ J^{h+1}V &\to (J^hV)_1 \ , \\ j_x^{h+1}f &\to j_x^1(j^hf) \end{aligned}$$

et considérer J^hV comme un sous-groupoïde de Lie de $\pi(J^{h-1}T)$, [3], pour pouvoir appliquer le théorème 2 du paragraphe 4.

Les égalités $A(\Phi^{h+1}) = R^{(h)+1}$, $J^1R^h = J^1A(\Phi^h) = A((\Phi^h)_1)$ jointes aux faits que $R^{(h)+1}$ est un sous-fibré vectoriel de J^1R^h et la commutativité du diagramme suivant,

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & J^{h+1}_{\beta(z)}T(V) \arrow[r, "\lambda^{h+1}(z)"] \arrow[d, "P^1(id_h)"] & T_z(J_x^{h+1}V) \arrow[r] \arrow[d, "(P^1(id_h))_*"] & 0 \\
0 \arrow[r] & J^1_{\beta(z)}(J^hT) \arrow[r, "\lambda(z)"] & T_z[((J^hV)_1)_x] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

pour tout z de $J_x^{h+1}V$, nous permettent de vérifier que Φ_x^{h+1} est inclus dans $[(\Phi^h)_1]_x$. D'où la proposition suivante :

Proposition 4.

i) Φ^{h+1} est inclus dans $\Phi^{(h)+1}$ . .

ii) la projection $\Phi^{(h)+1} \to \Phi^h$ est surjective.

Démonstration :

L'affirmation i) résulte de l'égalité $\Phi^{(h)+1} = (\Phi^h)_1 \cap J^{h+1}V$ et de l'inclusion $\Phi^{h+1} \subset (\Phi^h)_1 \cap J^{h+1}V$. L'affirmation (ii) résulte de (i) et du lemme 8.

Proposition 5.

i) $\Phi^{(h)+1}$ est une sous-variété différentiable de $J^{h+1}V$.

ii) Φ^{h+1} coïncide avec la composante connexe de l'ensemble $I^{h+1}(V)$ des unités dans $\Phi^{(h)+1}$.

Démonstration :

$\Phi^{(h)+1}$ est une sous-variété différentiable de $J^{h+1}V$, car si x est dans V la dimension de $T_z[((\Phi^h)_1)_x] \cap T_z(J_x^{h+1}V)$ ne dépend pas du choix de z dans $\Phi_x^{(h)+1} = ((\Phi^h)_1)_x \cap J_x^{h+1}V$.

Pour démontrer la deuxième partie, nous avons déjà $\Phi^{h+1} \subset \Phi^{(h)+1}$ et Φ_x^{h+1} connexe, pour tout x de V . Un raisonnement assez simple montre que la composante connexe $\mathcal{C}$ de $I^{h+1}(V)$ dans $\Phi^{(h)+1}$ est un groupoïde de Lie sur la variété V tel que $\dim \mathcal{C}_x = \dim \Phi_x^{h+1}$ pour tout x de V . Alors $\mathcal{C}_x = \Phi_x^{h+1}$ pour tout x de V . D'où $\mathcal{C} = \Phi^{h+1}$.

Théorème 3.

$$\Phi^{h+1} = \Phi^{(h)+1} .$$

Démonstration :

Nous décomposerons la démonstration en deux parties :

1ère partie :

Montrons que $\Phi^{(h)+1} \to \Phi^h$ est un fibré affine ([6], p. 33).

(Φ^h, α, V) étant une variété fibrée sur V, on dénotera par $F(\Phi^h)$ le fibré vectoriel sur Φ^h de vecteurs α-verticaux, et par $g_h = F(\Phi^h) \cap S^h T^* \otimes_{\Phi^h} F(V \times V)$ le symbole de l'équation différentielle (Φ^h, α, V), [1]. Un raisonnement de MALGRANGE [6], montre que $g_{h+1} = T^* \otimes_{\Phi^h} g_h \cap S^{h+1} T^* \otimes_{\Phi^h} F(V \times V)$ est un fibré vectoriel de base Φ^h.

D'après la proposition 4, la projection $\beta : \Phi^{(h)+1} \to \Phi^h$ est surjective. Cela entraîne, en tenant compte d'un résultat de [1], que $\Phi^{(h)+1}$ est un fibré affine de base Φ^h de fibré vectoriel associé g_{h+1}.

2ème partie :

$\Phi^{(h)+1}$ est connexe.

Φ^h étant un espace topologique connexe et localement connexe par arcs entraîne Φ^h connexe par arcs. En plus, la fibre $(\Phi^{(h)+1})_p$ est connexe par arcs, pour tout p de Φ^h.

D'autre part, la première partie, entraîne que $\beta : \Phi^{(h)+1} \to \Phi^h$ est un espace de HUREWICZ (i.e. possède la propriété de relèvement de homotopie, [15] p. 92).

C.Q.F.D.

Mais tout espace de HUREWICZ, au-dessus d'une variété connexe par arcs, ayant les fibres connexes par arcs est connexe par arcs. Ainsi $\Phi^{(h)+1}$ est connexe.

Supposons que $\mathcal{R}^h$ soit une équation différentielle, d'ordre h sur $T(V)$, formellement transitive et formellement intégrable. Pour tout entier ℓ positif, notons par $\Phi^{h+\ell}$ le groupoïde de Lie associé à $\mathcal{R}^{h+\ell}$.

Corollaire 2.

$\Phi^{h+\ell+1} = \Phi^{(h)+\ell+1}$ pour tout entier ℓ positif.

Démonstration :

$\mathcal{R}^h$ étant formellement transitive, $\pi_h : \mathcal{R}^{h+1} \to \mathcal{R}^h$ surjective et $\mathcal{R}^{h+1}$ un sous-fibré vectoriel de $J^{h+1}T(V)$, le théorème précédent entraîne $\Phi^{(h)+1} = \Phi^{h+1}$. D'où le corollaire est vérifié pour $\ell = 0$. D'autre part, $\Phi^{(h)+1} \to \Phi^h$ étant un fibré affine, nous avons que ℓ-prolongement de l'équation $\Phi^{(h)+1}$ coïncide avec $(\ell+1)$-prolongement de l'équation Φ^h, i.e. $\Phi^{[(h)+1]+\ell} = \Phi^{(h)+\ell+1}$ ([1]). Supposons par récurrence, l'égalité $\Phi^{h+\ell} = \Phi^{(h)+\ell}$. $\mathcal{R}^{h+\ell}$ étant formellement transitive, $\pi_{h+\ell} : \mathcal{R}^{h+\ell+1} \to \mathcal{R}^{h+\ell}$ surjective et $\mathcal{R}^{h+\ell+1}$ un sous-fibré vectoriel de $J^{h+\ell+1}T(V)$, nous avons

$$\Phi^{h+\ell+1} = \Phi^{(h+\ell)+1}$$

d'après le théorème précédent. Alors

$$\Phi^{h+\ell+1} = \Phi^{(h+\ell)+1} = \Phi^{[(h)+\ell]+1} = \Phi^{[(h+1)+\ell-1]+1} = \Phi^{(h+1)+\ell} = \Phi^{(h)+\ell+1} .$$

§ 6 - L'INTEGRABILITE DES GROUPOIDES DE LIE

Considérons l'espace des repères $(\mathcal{R}^h(V), V, L^h_n, p)$, d'ordre h, sur la variété différentiable V et P une G-structure d'ordre 1 sur V.

Propriété 1.

La variété J^1P, fibrée au-dessus de P par l'application but, possède une structure naturelle de fibré principal de groupe structural $T^1_{o,e}(\mathbb{R}^n, G)$ [5].

On vérifie facilement que J^1P est difféomorphe au noyau $\bar{P}^1$ de la double flèche :

$$\begin{array}{ccc} C^1_n(P) & \xrightarrow{T^1_n(p)} & \mathcal{R}^1(V) \\ \downarrow \beta & & \\ P & & \end{array}$$

<u>En effet</u>, si $\bar{h}^2 = j_o^1 s$ est un élément de $\bar{P}^1$ on a : $p\circ s$ un difféormorphisme local de $\mathbb{R}^n$ dans V tel que $s(0) = j_o^1(p\circ s)$. Ainsi l'application ψ_1 de $\bar{P}^1$ dans J^1P qui à $\bar{h}^2$ associe $\bar{h}^2.[j_o^1(p\circ s)]^{-1}$ est un difféomorphisme.

<u>En particulier</u>, il existe un difféomorphisme de $J^1\mathcal{R}^1(V)$ sur le noyau de la double flèche :

$$\begin{array}{ccc} C_n^1(\mathcal{R}^1(V)) & \xrightarrow{T_n^1(p)} & \mathcal{R}^1(V) \\ \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \\ \mathcal{R}^1(V) & & \end{array}$$

qui sera noté $\bar{\mathcal{R}}^2(V)$.

Par conséquent, $(\bar{\mathcal{R}}^2(V), \mathcal{R}^1(V), \beta, T_{o,e}^1(\mathbb{R}^n, L_n^1))$ est un fibré principal, d'après la propriété 1.

<u>Propriété 2</u>.

i) $N^2 = \ker\{L_n^2 \to L_n^1\}$ <u>s'identifie de façon naturelle à un sous-groupe de Lie de</u> $T_{o,e}^1(\mathbb{R}^n, L_n^1)$.

ii) $\mathcal{R}^2(V) \to \mathcal{R}^1(V)$ <u>s'identifie de façon naturelle à un sous-fibré principale de</u> $\bar{\mathcal{R}}^2(V) \to \mathcal{R}^1(V)$.

<u>Démonstration</u> :

Soit ψ un difféomorphisme $(\mathbb{R}^n, o) \to (\mathbb{R}^n, o)$ tel que $j_o^1\psi = j_o^1(Id)_{\mathbb{R}^n}$. Soit $\hat{\psi} : (\mathbb{R}^n, o) \to L_n^1$ définie par $\hat{\psi}(a) = j_o^1(\tau_{-a}\circ\psi\circ\tau_{\psi^{-1}(a)})$, où τ_a désigne la translation de vecteur a dans $\mathbb{R}^n$. Il est clair que $\hat{\psi}(o) = j_o^1(Id)_{\mathbb{R}^n}$ et que le $j_o^1\hat{\psi}$ ne dépend que de $j_o^2\psi$. On vérifie que l'application $\bar{i} : j_o^2\psi \to j_o^1\hat{\psi}$ ainsi définie identifie N^2 à un sous-groupe de Lie de $T_{o,e}^1(\mathbb{R}^n, L_n^1)$.

Soit φ un difféomorphisme $(\mathbb{R}^n, o) \to (V, x)$ de source zéro et but x , et soit $\hat{\varphi}$ la section locale de $\mathcal{R}^1(V) \to V$ au voisinage de x définie par :

$$\hat{\varphi}(y) = j^1_o(\varphi . \tau_{\varphi^{-1}(y)}) \qquad \text{pour tout } y \text{ voisin de } x .$$

On vérifie aisément que $j^1_x\hat{\varphi}$ ne dépend que de $j^2_o\varphi$. Soit $i : j^2_o\varphi \to \psi_1^{-1}(j^1_x\hat{\varphi})$ l'application $\mathcal{R}^2(V) \to \bar{\mathcal{R}}^2(V)$ ainsi définie, où ψ_1 est le difféomorphisme de $\bar{R}^2(V)$ sur $J^1\mathcal{R}^1(V)$. On vérifie que $(i,\bar{i})$ identifie $\mathcal{R}^2(V) \to \mathcal{R}^1(V)$ à un sous-fibré principal de $\bar{\mathcal{R}}^2(V) \to \mathcal{R}^1(V)$.

On notera $\mathcal{R}^2_P(V)$ la restriction à P du N^2-fibré principal $\mathcal{R}^2(V) \to \mathcal{R}^1(V)$ et $\bar{\mathcal{R}}^2_P(V)$ la restriction à P du $T^1_{o,e}(\mathbb{R}^n, L^1_n)$-fibré principal $\bar{\mathcal{R}}^2(V) \to \mathcal{R}^1(V)$.

Définition 5.

On dira que P est 1-intégrable si $\mathcal{R}^2_P(V) \cap \bar{P}^1 = \mathcal{R}^2_P(V) \cap J^1P$ n'est pas vide (i.e. l'application but $\mathcal{R}^2_P(V) \cap \bar{P}^1 \to P$ est surjective).

Lemme 9. [5]

Il existe une application $\mathcal{D} : \bar{\mathcal{R}}^2_P(V) \to T^1_{o,e}(\mathbb{R}^n, L^1_n)/N^2$ et une seule vérifiant :

i) $\mathcal{D}(q.\gamma) = \gamma^{-1}\mathcal{D}(q)$

ii) $\mathcal{D}(q)$ = classe d'équivalence de l'élément neutre pour tout $q \in \mathcal{R}^2_P(V)$.

Démonstration :

Soit $h \in P$ et $q \in (\bar{\mathcal{R}}^2)_h$. Considérons $q' \in (\mathcal{R}^2)_h$. Alors il existe $\gamma \in T^1_{o,e}(\mathbb{R}^n, L^1_n)$ tel que $q' = q.\gamma$. La classe d'équivalence $\gamma.N^2$ de γ dans $T^1_{o,e}(\mathbb{R}^n, L^1_n)/N^2$ ne dépend que de q , et l'application $\mathcal{D}$ ainsi définie vérifie i) et ii). Si $\hat{\mathcal{D}}$ est une autre application vérifiant i) et ii), alors si $q \in (\bar{\mathcal{R}}^2)_h$ on a : $q' = q.\gamma$ où $q' \in (\mathcal{R}^2(V))_h$. Par conséquent, la classe d'équivalence de l'élément neutre =

$$\hat{\mathcal{D}}(q') = \hat{\mathcal{D}}(q.\gamma) = \gamma^{-1}\hat{\mathcal{D}}(q) = \gamma^{-1}\mathcal{D}(q) .$$

D'où :

$$\mathcal{D}(q) = \hat{\mathcal{D}}(q) .$$

Lemme 10.

Soit $h \in P$ et $q \in (\bar{P}^1)_h$. Alors la classe d'équivalence de $\mathcal{B}(q)$ dans $T^1_{o,e}(\mathbb{R}^n,G)\backslash T^1_{o,e}(\mathbb{R}^n,L^1_n)/N^2$ ne dépend que de h .

Démonstration :

Notons par π la projection canonique de $T^1_{o,e}(\mathbb{R}^n,L^1_n)/N^2$ sur $T^1_{o,e}(\mathbb{R}^n,G)\backslash T^1_{o,e}(\mathbb{R}^n,L^1_n)/N^2$ et considérons un autre élément q' de $(\bar{P}^1)_h$. Alors $q' = q.\gamma$ où γ est dans $T^1_{o,e}(\mathbb{R}^n,G)$. Ainsi $\mathcal{B}(q') = \gamma^{-1}.\mathcal{B}(q)$ et $\pi(\mathcal{B}(q')) = \pi(\mathcal{B}(q))$.

Définition 6.

La fonction S de P dans $T^1_{o,e}(\mathbb{R}^n,G)\backslash T^1_{o,e}(\mathbb{R}^n,L^1_n)/N^2$ qui à tout h de P associe la classe d'équivalence de $\mathcal{B}(q)$ sera appelée tenseur de structure de $(\mathcal{R}^2_P(V),\bar{P}^1)$ dans $\bar{\mathcal{R}}^2_P(V)$.

Remarques : 1) Pour qui la G-structure P soit 1-intégrable, il faut et il suffit que S soit nul.

En effet, supposons P intégrable à l'ordre 1 et considérons h de P . Alors il existe $q \in (R^2_P(V))_h \cap (\bar{P}^1)_h$ tel que $\mathcal{B}(q)$ = classe d'équivalence de l'élément neutre de $T^1_{o,e}(\mathbb{R}^n,L^1_n)$. Cela veut dire que $S(h)$ est l'obitre de l'élément neutre de $T^1_{o,e}(\mathbb{R}^n,L^1_n)/N^2$, pour tout h de P .

Réciproquement, si $S(h)$ est nul pour tout h de P , il existe $q \in (\bar{P}^1)_h$, $q' \in (\mathcal{R}^2(V))_h$ tels que $q' = q.\gamma$ où γ est un élément de $T^1_{o,e}(\mathbb{R}^n,G)$. Ainsi $h^2 \in (\mathcal{R}^2)_h \cap (\bar{P}^1)_h$ ce qui prouve l'intégrabilité à l'ordre 1 de P .

2) Nous pouvons identifier $T^1_{o,e}(\mathbb{R}^n,L^1_n)$ à $(\mathbb{R}^n)^* \otimes (\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n$, N^2 à $S^2(\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n$, $T^1_{o,e}(\mathbb{R}^n,G)$ à $(\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathfrak{g}$ où $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de G , et considérer les structures de groupes abéliens sous-jacentes aux structures vectorielles.

Avec ces identifications, on peut démontrer que :

$$T^1_{o,e}(\mathbb{R}^n,G)\backslash T^1_{o,e}(\mathbb{R}^n,L^1_n)/N^2 = \frac{\Lambda^2(\mathbb{R}^n)^*\otimes\mathbb{R}^n}{\delta((\mathbb{R}^n)^*\otimes g}$$

où δ est l'opérateur d'antisymétrisation :

$$\delta : (\mathbb{R}^n)^*\otimes(\mathbb{R}^n)^*\otimes\mathbb{R}^n \to \Lambda^2(\mathbb{R}^n)^*\otimes\mathbb{R}^n$$

$$\delta(\varphi)(u,v) = \frac{1}{2}[\varphi(u,v)-\varphi(v,u)] ,$$

pour tout u et v de $\mathbb{R}^n$.

3) <u>Notre définition de tenseur de structure</u> S <u>entraîne la définition de tenseur de structure donnée dans</u> [14], p. 41, <u>au moyen de la 1-forme fondamentale</u> $\omega_1 : T(\mathcal{R}^1(V)) \to \mathbb{R}^n$.

Soit en effet, $\omega_1 : T(\mathcal{R}^1(V)) \to \mathbb{R}^n$ la forme fondamentale [14], [13]. Nous savons que tout élément $h \in (\mathcal{R}^1(V))_x$ induit un isomorphisme linéaire, noté h, de $\mathbb{R}^n$ sur $T_x(V)$ et que tout élément $q \in (\bar{\mathcal{R}}^1)_h$ s'identifie à un sous-espace horizontal Q de $T_h(\mathcal{R}^1(V))$ tel que $p_* : Q \to T_x(V)$ est un isomorphisme linéaire. Notons $\hat{\mathcal{B}}(q) : \Lambda^2\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application définie par

$$\hat{\mathcal{B}}(q)(u,v) = d\omega_1(X^h,Y^h)$$

où (X^h,Y^h) sont deux vecteurs de Q tels que $(h^{-1}\circ p_*)(X^h) = u$ et $(h^{-1}\circ p_*)(Y^h) = v$. On vérifie que la fonction $\hat{\mathcal{B}} : \bar{\mathcal{R}}^1(V) \to \Lambda^2(\mathbb{R}^n)^*\otimes\mathbb{R}^n$ vérifie les conditions du lemme 9 [14]. D'après l'unicité de la fonction $\mathcal{B}$, définie dans le lemme 9, on a que $\hat{\mathcal{B}}$ coïncide avec $\mathcal{B}$. D'où notre affirmation.

<u>Définition 7.</u>

<u>Soit</u> Φ <u>un sous-groupoïde de Lie de</u> J^hV. <u>Le groupoïde de Lie</u> Φ <u>sera dit q-intégrable si l'application but</u> $(\Phi)_q \cap J^{h+q}V \to \Phi$ <u>est surjective</u>.

<u>Proposition 6.</u>

<u>Pour que le groupoïde de Lie</u> $\Phi = P\circ P^{-1}$ <u>soit 1-intégrable, il faut et il suffit que le tenseur de structure</u> S <u>du fibré principal</u> P <u>soit à valeur constante</u>.

Démonstration :

En effet, si $S(P)$ est une orbitre fixe pour tout couple (h,h') d'éléments de P, l'ensemble des valeurs prises par $\mathcal{B}$ de tous les éléments de $(\bar{P}^1)_h$ est identique à l'ensemble des valeurs prises par $\mathcal{B}$ de tous les éléments de $(\bar{P}^1)_h$. Donc pour tout $q \in (\bar{P}^1)_h$, on peut lui associer $q' \in (\bar{P}^1)_{h'}$ tel que $\mathcal{B}(q) = \mathcal{B}(q')$. D'autre part, $q'.q^{-1} \in \Phi_1$, car q et q' appartiennent à $C^1_n(P)$ et Φ_1 opère transitivement sur $C^1_n(P)$ (voir § 4, remarque 3). Un raisonnement simple montre que $q'.q^{-1}$ appartient aussi au groupoïde $J^2V = \mathcal{R}^2(V)\circ[\mathcal{R}^2(V)]^{-1}$. Comme tout élément θ de $P\circ P^{-1}$ est de la forme $h'\circ h^{-1}$, ce groupoïde est 1-intégrable.

Réciproquement, si $\Phi = P\circ P^{-1}$ est 1-intégrable, pour tout élément $\theta = h'\circ h^{-1}$ de Φ il existe $\theta_2 \in \Phi_1 \cap J^2V$ qui se projette sur θ. Considérons $q \in (\bar{P}^1)_h$. Alors $\theta_2 * q \in (\bar{P}^1)_{h'}$, où $*$ représente l'opération définie dans § 4, remarque 3. Comme $\theta_2 \in J^2V$, on démontre, d'après les définitions, que $\mathcal{B}(\theta_2 * q) = \mathcal{B}(q)$. Cela signifie qu'à tout $q \in (\bar{P}^1)_h$ on associe $\theta_2 * q$ de $(\bar{P}^1)_{h'}$ tel que $\mathcal{B}(\theta_2 * q) = \mathcal{B}(q)$. A fortiori, $S(h) = S(h')$ pour tout couple (h,h') d'éléments de P.

Proposition 7.

Soit une G-structure P d'ordre 1 satisfaisant les conditions :

1) $\Phi = P\circ P^{-1}$ est un groupoïde aux fibres connexes.

2) Le prolongement $[A(\Phi)]^1$ de $A(\Phi)$ est un sous-fibré vectoriel de $J^2T(V)$.

3) La projection $\pi_1 : [A(\Phi)]^1 \to A(\Phi)$ est surjective.

Alors le tenseur de structure S est constant.

En effet, l'équation différentielle, d'ordre 1, $A(\Phi)$ sur le fibré tangent $T(V)$ satisfait les conditions du théorème 3. Cela entraîne que l'application but $\beta : \Phi_1 \cap J^2V \to \Phi$ est surjective, autrement dit Φ est 1-intégrable. En tenant compte de notre résultat précédent le tenseur de structure S est constant. D'où notre proposition.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. GOLDSCHMIDT - "Integrability criteria for systems of non-linear partial differential equations" -
J. of diff. geometry - Vol. 1, n° 3, 1967.

[2] H. GOLDSCHMIDT - "Existence theorems for analytic linear partial differential equations" -
Ann. of Math. 86 (1967) pp. 246-270.

[3] GUILLEMIN and STERNBERG - "Deformation theory of pseudo group structures" -
Mem. Amer. Math. Soc. 64 (1966) pp. 1-80.

[4] J.L. KOSZUL - "Lectures on fibre bundles and differential geometry" -
Tata Institute of Fundamental Research - Bombay 1960.

[5] D. LEHMANN - "Sur les obstructions à l'intégrabilité des G-structures".
Annales de l'Institut Fourier - 1971 - pp. 83-93.

[6] B. MALGRANGE - "Pseudo groupes de Lie elliptiques" -
Séminaire LERAY - Collège de France 1969-1970.

[7] H. NICKERSON - "On differential operators and connections".
Trans. Amer. Math. Soc. (1961) 99 - 509-539.

[8] N. VAN QUÊ - "Non abelian spencer cohomology and deformation theory".
J. of Diff. Geometry - Vol. 3, n° 2, June 1969.

[9] N. VAN QUÊ - "Du prolongement des espaces fibrés et des structures infinitésimales".
Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 17 (1967) 157-223.

[10] N. VAN QUÊ - "Sur l'espace de prolongement différentiable".
J. Diff. G. 2(1968) pp. 33-40.

[11] QUILLEN - "Formal properties of over-determined systems of linear partial differential equation".
Ph. D. thesis Harvard University (1964).

[12] A. RODRIGUES - "G-structures et pseudo-groupes de Lie".
Cours donné en 1967-1968 à Grenoble.

[13] A. RODRIGUES - "The first and second fundamental theorems of Lie for Lie pseudo-groups".
Am. J. of Math. (1962).

[14] I.M. SINGER et S. STERNBERG - "The infinite groups of Lie and Cartan".
Part. I (the transitive groups) - Journ. d'Analyse Math. - Vol. XV - pp. 1-114 (1965).

[15] Edwin H. SPANIER - "Algebraïc Topology".
Mc GRAW - Hill Series in Higher Mathematics (1966).

COHEN-ADDAD J.P.	Spectrométrie physique
COLOMB Maurice	Biochimie médicale
CONTE René	Physique
CROUZET Guy	Radiologie
DURAND Francis	Métallurgie
DUSSAUD René	Mathématiques (C.U.S.)
Mme ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM. FAURE Jacques	Médecine légale
GAVEND Michel	Pharmacologie
GENSAC Pierre	Botanique
GERMAIN Jean Pierre	Mécanique
GIDON Maurice	Géologie
GRIFFITHS Michaël	Mathématiques appliquées
GROULADE Joseph	Biochimie médicale
HOLLARD Daniel	Hématologie
HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
IDELMAN Simon	Physiologie animale
IVANES Marcel	Electricité
JALBERT Pierre	Histologie
JOLY Jean René	Mathématiques pures
JOUBERT Jean Claude	Physique du solide
JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
KAHANE André	Physique générale
KUHN Gérard	Physique
Mme LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM. LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LANCIA Roland	Physique atomique
LE JUNTER Noël	Electronique
LEROY Philippe	Mathématiques
LOISEAUX Jean Maria	Physique nucléaire
LONGEQUEUE Jean Pierre	Physique nucléaire
LUU DUC Cuong	Chimie organique
MACHE Régis	Physiologie végétale
MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
MARECHAL Jean	Mécanique
MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (C.U.S.)
MAYNARD Roger	Physique du solide
MICOUD Max	Maladies infectieuses
MOREAU René	Hydraulique (I.N.P.)
NEGRE Robert	Mécanique
PARAMELLE Bernard	Pneumologie
PECCOUD François	Analyse (I.U.T. B)
PEFFEN René	Métallurgie
PELMONT Jean	Physiologie animale
PERRET Jean	Neurologie
PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
PFISTER Jean Claude	Physique du solide
PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mle PIERY Yvette	Biologie animale
MM. RACHAIL Michel	Médecine interne
RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
RICHARD Lucien	Botanique
Mme RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM. ROMIER Guy	Mathématiques (I.U.T. B)
ROUGEMONT (DE) J.	Neuro-Chirurgie
STIEGLITZ Paul	Anasthésiologie
STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées
VEILLON Gérard	Mathématiques appliquées (I.N.P.)
MM. VIALON Pierre	Géologie
VOOG Robert	Médecine interne
VROUSSOS Constantin	Radiologie
ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM. BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
CHEEKE John	Thermodynamique
GOLDSCHMIDT Hubert	Mathématiques
YACOUD Mahmoud	Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

Mme BERIEL Hélène	Physiologie
Mme RENAUDET Jacqueline	Microbiologie

VU,

Grenoble, le

Le président de la thèse,

C. CHABAUTY

VU, et permis d'imprimer

Grenoble, le

Le président de l'Université
scientifique et médicale,