THE S E

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE

P A R 1 S

pour l'obtention du DOCTORAT 3EME CYCLE

SPECIALITE 1 Mathématiques Statistiques

Option : Phy.lque Mathématique

par

Mr 0 U E DRA 0 G 0 Albert

Sujet de la thèse I " PROBLEME INVERSE DE LA DIFFUSION ET GENERALISATION DE L'SQUATION DE MARCHENKO ".

Soutenue le t 19 Juin 1969 devant la Commission composée de

Préaident • Monsieur SOLBILLET Professeur

Ixaminateur. : J. L. DESTOUCHES Professeur

VUY DII CHAN Docteur es Sciences

ooooo

P R E F A C E

AMBARTSUMIAN a été le premier à introduire la notion du problème inverse de diffusion en 1929.

Les premières résolutions mathématiques du problème inverse apparaissent en 1947 avec FRØBERG et HYLLERAAS ; ces derniers réalisent un développement formel du potentiel V(x) à l'aide de la fonction de phase S, mais cette méthode se révèle imparfaite.

En 1949, BARGMANN essaie sans succès d'appliquer la notion du problème inverse à une classe particulière de potentiels.

Les solutions à ce problème ont été établies avec rigueur en 1951 par GELFAND, LEVITAN et MARCHENKO.

Les résultats mathématiques des travaux de GELFAND & LEVITAN ont été développés par JOST, KOHN et LEVINSON en 1953.

Plusieurs aspects du problème inverse ont été considérés et résolus par des auteurs comme BARGMANN, AGRONOVITCH, COZ, FREIN, ...

Une liste d'ouvrages concernant le problème inverse sera donnée à la fin de cette analyse.

Qu'il me soit permis d'exprimer mes profonds remerciements à Monsieur le Professeur Jean Louis DESTOUCHES qui a bien voulu m'accueillir dans son laboratoire et auprès de qui j'ai obtenu l'aide morale et les encouragements nécessaires à la poursuite de mes travaux.

PROBLBIIE Inverse de la Dittue10n

GENERALISATION DU PROBLEME DE MARCHENKO LORSQUE

$(E > o \Leftrightarrow k$ réelle), 1 entier positif ; $\int_0^{\infty} |V(y)|\, dy < \infty$; $\int_0^{\infty} |y\ V(y)|\, dy < \infty$

A) INTRODUCTION.

Equation radiale.

Conald'rona un système non relativiste de 2 particules en inter&otlon ; système dans lequel le potentiel dépend seulement de 1. positiOQ relative des 2 corps en présence.

Si noui supposons qua les particule••ont .aal .pin et que 1. potentiel .at laotropie, le 8ystème peut être décrit par l'équation de SCHRODINGER,

$$(I_1)_A \quad \frac{-h^2}{2M} \Delta\psi(x,\theta,\varphi) + U(x)\psi(x,\theta,\varphi) = \mathcal{E}\psi(x,\theta,\varphi)$$

oxpr•••tou où x désigne 1. distance de. 2 corpe $M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$; m_1 et m_2 'tant 1••••sses des 2 partiou18. repré.ente l'énergie du système, U le potentiel

Posons $E = \frac{2m}{h^2}$ f VC,,) = UC,,) 1 $E = k^2$

L'équation des SCHRODINOER devient :

$$\Delta\psi + k^2\psi - V(x)\psi = o \qquad (I_2)_A$$

Conlidéronl pour (12)A une solution de la forme

$$\frac{\varphi(x)\, Y_\ell^m\,(\theta,\varphi)}{x}$$, portons oette Iclutlon dans $(I_2)_A$

l'équation $(I_2)_A$ se séparo, l'une d'elle est donnée par

$$\boxed{(I_3)_A \quad \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \left(k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} - V(x)\right)\varphi(x) = 0}$$

I_{3A} e.t appolée équation d'onde partielle ou encore óquation radiale.

ℓ 81t un enëaer- renr-éeeneene 10 momGnt cinétique

II POSITION DU PROBLEME.

Rappelon. que l'amplitude do diffuBion F (kt cos) vaut

$$\frac{1}{2k\ell}\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\ [st(kl\_l]\ P_n\ (\cos\theta) = F\ (k, \cos\theta)$$

B^ℓ (k) désigne la fonction de phase.

La .érie étant supposée convergente, on remarque que la connaissance de l'amplitude de diffusion donne la fonotion de phale δ^ℓ (k).

On uLit détorminer en Méoanique quant f.que l'amplitude de dttfulton à partir du potentiol.

Le problème inverse de la Dittulton est oelui qui conailte à déduire le potentiel en partant de l'amplitude de diftugion.

En 1951, MARCHENKO et LEVITAN donnent une lolution du problème posé en coneid'ran't tous les deux le cas ℓ = o (systèmo sans .o.ent cirlétiquû) ; les deux méthodes utilisées ne sont pal toutefois identiques.

MARCHENKO Ile aert de la fonction de phase S(k)

LEVITAN utilise pour sa ré.olution la notion de la tonotion speotl'a1e.

Bn 1961, JOST et KOHN généralise la méthode de LEVITAN au oa& $\ell \neq 0$; il. trouvent une formule analogue à l''quat1ou de LEVITAN.

Bn 1953 LEVINSON généralise auas1 plusiours aspoots mathématiques du problème Inver.e.

Me ba••ut sur le. travaux effeotués par JOST, KOHN. LEVINSON et par les auteura comme NEWTON (1960) PADDEYEV (1963) J ALFARO et REOGB (1965) ; j'ai dégagé une formule qui généralise l'équation de MARCHENKO lorsqu'on se place dans oertaines conditions.

Auparavant je vais exposor brièvement la méthodo do MARCHENKO.

a) <u>EQUATION DE MARCHENKO</u> •

I <u>Cal particu..!.ier</u>

SI ℓ= d, l'équation $(I_3)_A$ devient

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \left[k^2 - V(x)\right]\Psi(x) = 0 \qquad (I,)!!$$

I_1 8 est appolée équation d'ondee 9.

II Solutions de lléquaticn différentielle (I1)n

Ou démontre que $(1_1)_8$ admet comme solution la lonotion intégrale euivante 1

$$\varphi(k,x) = \frac{\sin kx}{k} + \int_0^x \frac{\sin k(x-y)}{k} V(y)\,\varphi(k,y)\,dy \quad \text{vérifiant}$$

$$\varphi(k,o)=o \qquad \varphi'(k,o)= 1 \qquad (11,)B$$

de même

$$t(k,x)= e^{ikx} + \int_x^{\infty} \frac{\sin k(x-y)}{k} V(y)\, t(k,y)\, dy$$

et antisfaiBant à la condition

$$\lim_{x \to \infty} e^{-ikx} f(k,x) = 1$$

est aussi solution de $(I_1)_B$

III Fonction: Aex,y) et Potentiel V(x)

MARCHENKO introduit la fonction A détini_par

$$A(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f(k,x) - e^{ikx} \right] e^{-ikY} \, dk$$

avec

$$A(x,y)=0 \quad .1 \quad x \quad y \qquad (III_1)_B$$

A l'aide des transformations mathématiques 11 déduit que

$$A(x,X) = \frac{1}{2} \int_x^{\infty} V(s)\, ds \qquad (III_2)_B$$

IV Idée de MARCHENKO.

Si par un procédé mathématique on arrivait à déterminer l'expression de la fonction A(x,y): il serait alors aisé de définir A(x,x)

Grâce à ItéQuatlon $(III_2)_B$ on déduirait le potentiel V(x)

V Equation de **MARCHENKO.**

:Poursuivant son raisonnement **MARCHENKO** montre que La fonc-t10n Aex,y) satisfait à l'équation intégrale suivante :

$$F(x+t) + \int_x^{\infty} F(x+y) A(t,y)\, dy = A(t,x) \quad \text{pour } x > t \qquad (V_1)_B$$

équation oÙ

$$F(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[S(k)-1\right] e^{Lkx}\,dk+\sum_{n} Sa\, e^{-\int n(x)}$$

lorsque k est complexe ; et où

$$F(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[S(k)-1\right] E^{ikx}\,dk \quad \text{lorsque k est réelle}$$

Les S_n sont des oonstantes de normalisation.

VI <u>Remarques</u>,

1·/ L'équation (V1)B est une équation de VOLTERRA. Il a été démontré quo F(x+y) est do carré intégrable et que l'équation homogène,

$$f(x)+\int_{t}^{\infty} F(x+y)dy=0$$ n'admet pas ds solution 1 ou réaultat permet de déduire que (VI)e admot une solution ACt,x) en vertu de l'altornativo do FREDHOLM.

2-/ MARCHENKO répond par cetto méthode au problème lnver.e de la diffusion.

Il suffit en effot do connaître la fonction de pha•• SCk) pour déterminer F(x) ; donc pour savoir l'expression de A(t,x) à l'aide de l'équation intégrale $(V_1)_B$, expression qui permettra en définitive de calculer 10 potentIel.

3°/ LEViTAN procède autrement et aboutit à l'équation intégrale 8uivanto •

$$\Omega(t,x)+\int_{0}^{t} K(t,y)\Omega(y,x)\,dy + K(t,x=0$$

(VI1)a

pour $x < t$

expr•••1on où

$$\Omega(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_o(k,t)\,\varphi_o(k,x)\; d\left[\rho(E)-\rho_o(E)\right]$$

$\varphi_o(k;x)$ étant la .olut1oQ de lléquation différentielle

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + k^2\varphi(x) = o$$ ••atisfaisant à

$$\varphi(O) = 0 \qquad \varphi'(o) = 1$$

(B) étant la fOQDtlon 8peotrale, $\rho_o(E)$ sa valeur pour $V(x)=o$

LEVITAN déduit la fonotion potenttelle à partir de l'expression de $K(x,x)$

4°) J08T et KOHN généralisent cette méthode et trouvent l'équation intégrale suivant. 1

$$\boxed{\Omega^\ell(t,x) + \int_o^t K(t,y)\,\Omega^\ell(y,x)dy + K^\ell(t,x) = o \quad \text{pour } x < t \qquad (V1_2)B}$$

Ω^ℓ et K^ℓ étant les fonotion. ascooiéos eu momont cinétique du système pour la valeur ℓ .

lorsque

$\ell > 0 \quad (E) \Longleftrightarrow k$ réel , $\int_0^{\infty} |V(y)|\, dy < \infty$, $\int_0^{\infty} y\, |V(y)|\, dy < \infty$

A') Résultats Mathématiques.

I Préliminaire :

1°/ Pour mon raisonnement, je vais supposer d'abord que E et k Bont des variables oomplexee liées par la relation $k^2 = E$.

2°/ On posera $k = a + ib$, en supposant $b > 0$.

3°/ On suppoeera aussi que le potentiel $V(x)$ est

- réel
- détint et continue pour tout $x > 0$
- $\lim_{x \to \infty} V(x) = 0$

II Solutions de l'Equation Différentielle $(I_3)_A$

Rappelons que $(I_3)_A$ vérifie l'équation suivante :

$$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \left[k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} - V(x)\right] \psi(x) = 0 \qquad (I_3)_A$$

Déterminons 2 solutions de $(I_3)_A$ que nous désignerons par $\varphi^{\ell}(k,x)$ et $f^{\ell}(k,x)$ vérifiant rospoctlvement a $\lim_{x \to 0} \frac{(2\ell+1)!!}{x^{\ell+1}} \varphi^\ell(k,x) = 1$

b $\lim_{x \to \infty} e^{-ikx} f^\ell(k,x) = 1$ avec

$$(2\ell+1)!! = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2\ell+1)$$

Cherchons $\varphi^\ell(k,x)$ et $f^\ell(k,x)$ sous les formes suivantes

$$(II_1)_A : \quad \varphi^\ell(k,x) = \varphi_0^\ell(k,x) + \int_0^x J^\ell(k,x,y)\, \varphi^\ell(k,y) V(y)\, dy$$

$$(II_2)_A : \quad f^\ell(k,x) = f_0^\ell(k,x) - \int_x^\infty J^\ell(k,x,y)\, f^\ell(k,y) V(y)\, dy$$

avec $J^\ell(k,x,y) = (ik)^\ell \left[f_0^\ell(-k,y)\, f_0^\ell(k,x) - f_0^\ell(k,y)\, f_0^\ell(-k,x) \right]$

$\varphi_0^\ell(k,x)$ et $f_0^\ell(k,x)$ représentent les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$(II_3)_A : \quad \left[\frac{d^2}{dx^2} + k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} \right] y(x) = 0$$

Remarquons que $(II_3)_A$ se déduit de $(I_3)_A$ en faisant $V(x)=0$

En posant $x = \frac{y}{k}$, $(II_3)_A$ prend la forme suivante :

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} + \frac{2}{y} \frac{d}{dy} + 1 - \frac{\ell(\ell+1)}{y^2} \right] g(y) = 0 \qquad (II'_3)_A$$

avec $y = kx$

$(II'_3)_A$ est l'équation bien connue de BESSEL, admettant pour solutions les fonctions $j_\ell(kx)$ et $h_\ell(kx)$ dites respectivement fonction sphérique de BESSEL et fonction de HANKEL de première espèce.

Nous pouvons prendre comme solutions de $(II_3)_{A'}$ les fonctions

$$\varphi_0^{\ell}(k,x) = \frac{1}{k^{\ell+1}}\, k x\, j_{\ell}(kx) \quad \text{et}$$

$$f_0^{\ell}(k,x) = i^{\ell+1}\, k x\, h_{\ell}^{1}(kx)$$

En vertu des propriétés des fonctions $j_{\ell}(kx)$ et $h_{\ell}^{1}(kx)$ on déduit que

$$\lim_{x \to 0} \varphi_0^{\ell}(k,x) = \frac{x^{\ell+1}}{(2\ell+1)!!} + o(x^{\ell+3})$$

$$\lim_{x \to \infty} f_0^{\ell}(k,x) = e^{ikx}\left[1 + o\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

Nous remarquons alors que $f^{\ell}(k,x)$ et $\varphi^{\ell}(k,x)$ définies par $(II_1)_{A'}$ et $(II_2)_{A'}$ réalisant

$$\lim_{x \to 0} \frac{(2\ell+1)!!}{x^{\ell+1}}\, \varphi^{\ell}(k,x) = 1 \quad \text{et}$$

$$\lim_{x \to \infty} e^{-ikx} f^{\ell}(k,x) = 1$$

1°) <u>Montrons que la série de NEUMANN associée à $\varphi^{\ell}(k,x)$ est uniformément convergente</u> .

Ecrivons $\varphi^{\ell}(k,x)$ sous la forme

$$\varphi^{\ell}(k,x) = \sum_n \Psi_n(k,x) \quad \text{avec}$$

$$\Psi_0(k,x) = \varphi^{\ell}_0(k,x) \quad \text{et} \quad \Psi_n(k.x) = \int_0^{\infty} J^{\ell}(k,x,y)V(y)\Psi_{n-1}(ky)dy$$

<u>Montrons que</u> :

$$\Psi_n(k,x) \leqslant K\, e^{bx} \left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{\ell+1} \frac{[P(x)]^n}{n!}$$

expres.ion où K est Une conatante poeitive et P(x) une fonction de x que noua préciserons.

Raisonnons par récurence.

a La proposition eet vraie pour n=1

A oaua. de. 2 oonditions aux li_1t.. α_A ; On démontre en analyse qulll est posyible de trouver 2 constantes positives Co et Cl dépendant seulement de l'entier ℓ tel que :

$$\left|\varphi^{\ell}_0(k,x)\right| \leqslant \left(\frac{C_0 x}{1+|k|\,x}\right)^{\ell+1} e^{b x}$$

β_A :

$$\left|f^{\ell}_0(k,x)\right| \leqslant \left(\frac{C_1 x\ |k|}{1+|k|\,x}\right)^{-\ell} e^{-bx} \leqslant \left(\frac{C_1\ |k|\,x}{1+|k|\,x}\right)^{-\ell} e^{bx}$$

(voir Potential Scattering de Alfaro et Regge)

on peut écrire :

$$\left|\Psi_1(k,x)\right| \leqslant \int_0^x \left|J^{\ell}(k,x,y)\right| \left|\varphi^{\ell}_0(k,y)\right| \left|V(y)\right| dy$$

De la définition de $J^{\ell}(k,x,y)$ il vient que

$$J^{\ell}(k,x,y) \leqslant |k|^{\ell}\left[\left|\varphi_o^{\ell}(k,x)\right| \left|f_o^{\ell}(-k,y)\right| + \left|\varphi_o^{\ell}(k,y)\right| \left|f_o^{\ell}(-k,y)\right|\right]$$

Des inégalités α_A, il s'ensuit que

$$\left|J^{\ell}(k,x,y)\right| \leqslant |k|^{\ell}\, C_o^{\ell+1}\, C_1^{-\ell}\, |k|^{-\ell}\, e^{b(x-y)}\left[\left(\frac{x}{1+|k|\,x}\right)^{\ell+1}\left(\frac{y}{1+|k|\,y}\right)^{-\ell} + \left(\frac{y}{1+|k|\,y}\right)^{\ell+1}\left(\frac{x}{1+|k|\,x}\right)^{-\ell}\right]$$

Puisque $x \geqslant y$ on a $\dfrac{x}{1+|k|\,x} \geqslant \dfrac{y}{1+|k|\,y}$; je peux écrire

$$\left|J^{\ell}(k,x,y)\right| \leqslant C_o^{\ell+1}\, C_1^{-\ell}\, e^{bx}\, e^{-by}\left(\frac{x}{1+|k|\,x}\right)^{\ell+1}\left(\frac{y}{1+|k|\,y}\right)^{-\ell}$$

Considérons

$$\left|J^{\ell}(k,x,y)\right|\left|\Psi_o(k,y)\right| = \left|J^{\ell}(k,x,y)\right|\left|\varphi_o^{\ell}(k,y)\right|$$

De β_A je déduis que

$$\left|J^{\ell}(k,x,y)\right|\left|\Psi_o(k,y)\right| \leqslant C_o^{\ell+1}\, C_1^{-\ell}\, e^{bx}\left(\frac{x}{1+|k|\,x}\right)^{\ell+1}\frac{y}{1+|k|\,y}$$

Par suite

$$\left|\Psi_1(k,x)\right| \leqslant \int_o^x \left|J^{\ell}(k,x,y)\right|\left|\Psi_o(k,y)\right|\left|V(y)\right|dy \leqslant$$

$$C_o^{\ell+1}\, e^{bx}\left(\frac{x}{1+|k|\,x}\right)^{\ell+1} \times \int_o^x C^{\ell+1}\, C_1^{-\ell}\,\frac{y}{1+|k|\,y}\,dy$$

Posons

$$K = C_o^{\ell+1} \quad \text{et} \quad P(x) = \int_o^x C_1^{-\ell} \times \frac{y}{1+|k|\,y}\,dy$$

Cela permet d'écrire

$$\left|\Psi_1(k,x)\right| \leqslant K\, e^{bx}\left(\frac{x}{1+|k|\,x}\right)^{\ell+1} P(x) \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Montrons que si la proposition est vraie pour n, elle est vérifiée pour $n+1$.

Soit

$$\left|\Psi_n(k,x)\right| \leqslant K\, e^{bx}\left(\frac{x}{1+|k|\,x}\right)^{\ell+1}\frac{\left[P(x)\right]^n}{n!}$$

$$|Y_{n+1}(k,x)| \leqslant \int_0^x |J^\ell(k,x,y)|\, |Y_n(k,y)|\, |V(y)|\, dy$$

D'après ci-dessus :

$$|Y_n(k,y)| \leqslant K e^{by}\left(\frac{y}{1+|k|y}\right)^{\ell+1} \frac{[P(y)]^n}{n!} \quad \text{et}$$

$$|J^\ell(k,x,y)| \leqslant C_0^{\ell+1}\, C_1^{-\ell}\, e^{bx}\, e^{-by}\left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{\ell+1} \times \left(\frac{y}{1+|k|y}\right)^{-\ell}$$

donc

$$|Y_{n+1}(k,x)| \leqslant K e^{bx}\left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{\ell+1} \int_0^x C_0^{\ell+1}\, C_1^{-\ell} \times \frac{y\,|V(y)|}{1+|k|y} \times \left[\int_0^y C_0^{\ell+1}\, C_1^{-\ell} \cdot \frac{t\,|V(t)|}{1+|k|t}\, dt\right]^n \frac{1}{n!}\, dy$$

$$= K e^{bx}\left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{\ell+1} \int_0^x \frac{[P(y)]^n}{n!}\, dP(y)$$

$$= K e^{bX} \times \left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{\ell+1} \frac{[P(x)]^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Par conséquent,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |Y_n(k,x)| \leqslant K e^{bx} \times \left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{\ell+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[P(x)]^n}{n!}$$

$$= K e^{bx} \times \left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{\ell+1} e^{P(x)} < \infty \quad \text{car}$$

$$P(x) = \int_0^x C_0^{\ell+1}\, C_1^{-\ell}\, \frac{y\,|V(y)|\, dy}{1+|k|y} \leqslant C_0^{\ell+1}\, C_1^{-\ell} \int_0^{\infty} y\, |V(y)|\, dy < \infty$$

<u>Notons que nous pouvons</u> écrire

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} |Y_n(k,x)| \leqslant S\, e^{bx}\left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{\ell+1}} \qquad (\gamma_A)$$

avec $\quad S = KC_0 + 1 \quad \int_0^{\infty} y\,|V(y)|\,dy$

Conclusion -

La série de Neumann associée à $f^{\ell}(k,x)$ est uniformément convergente.

D'après la théorie des équations intégrales $\varphi^{\ell}(k,x)$ définie par (111) A' est solution unique de cette équation et est par suite solution de l'équation différentielle $(1_3)_A$ pour la condition

$$\lim_{x \to 0} (2\ell+1)!!\ \varphi^{\ell}(k,x) = 1$$

Par un raisonnement analogue on vérifie que $f^{\ell}(k,x)$ définie par (112)A' est aussi solution de l'équation différentielle $(1_3)_A$ pour la condition

$$\lim_{x \to \infty} e^{-ikx} f^{\ell}(k,x) = 1$$

2°) Conséquences -

0) Théorème de Poincaré _

Considérons l'équation différentielle suivante

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} + E(x,\eta) = 0 \qquad (1)$$

où $E(x,\eta)$ dépend d'un paramètre η et est entière par rapport à ce paramètre.

Désignons par $\varphi(x,\eta)$ une solution de l'équation différentielle (1) réalisant une condition de régularité indépendante de η en un point ordinaire $P\ (x=c)$, c'est à dire que $\lim_{x \to c} (x-c)^2\, E(x,\eta)$ existe

Alors la solution $\varphi(x, \eta)$ de l'équation (1) est une fonction entière de η pour toute valeur fixée de x ..

Posons $E(x, k) = k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} - V(x)$

on voit aussitôt que le point P $(x=o)$ est un point ordinaire, de plus

$$\lim_{x \to o} \frac{(2\ell+1)!!}{x^{\ell+1}} \varphi^{\ell}(k,x) = 1$$ est vr-o lision

indépendante de k •

D'après le théorème ci-dessus $\varphi(k,x)$ est entière par rapport à la variable k -

b) En écrivant $f^{\ell}(k,x)$ sous la forme d'une série de Neumann

$$f^{\ell}(k,x) = \sum_{n=o}^{\infty} F_n(k,x) \quad \text{avec}$$

$F_0(k,x) = f_0(k,x)$ et

$$F_n(k,x) = \int_x^{\infty} J^{\ell}(k,x,y)\, F_{n-1}(k,y)\, V(y)\, dy$$

on montre que

(A) $$f^{\ell}(k,x) \leqslant A\, e^{-bx} \left(1 + \frac{1}{|k|\,x} \right)^{\ell} \quad \text{avec}$$

$$A = C_o^{\ell} \times \int_0^{\infty} C_o^{\ell+1} \quad C_1^{-\ell} \quad y\,|V(y)|\,dy$$

On con.tate Bans peine que ohaque terme do la série (Fn) eet BD.lytique par rapport à k dans le demi plan Imk=b> o.

Comme la série converge uniformément, f (k,x) est analY- tique par rapport à k dans le demi· plan supérieur.

3°/ La fonotion intégrale.

$$f^{\ell}(-k,x)= f_o^{\ell}(-k,x)- \int_x^{\infty} J^{\ell}(-k,x,y)V(y)f^{\ell}(-k,y)dy$$

est aussi Rolution de C!3)A réaltsant la condition aux limites

$$\lim_{x \to \infty} e^{ikx} \; f^{\ell}(-k,x) = 1$$

III Relations entre le8 fonctions $\varphi^{\ell}(k,x)$, $f^{\ell}(k,x)$et $f^{\ell}(-k,x)$.

1°) Proposition 1.

L. vronskien des 2 fonctions $f^{\ell}(k,x)$ et $f^{\ell}(-k,x)$ vaut 2ik

$$\cdot(f^{\ell}(k,x) \,;\, f^{\ell}(-k,x)) = f^{\ell}(k,x)f^{\ell\prime}(-k,x)-f^{\ell\prime}(k,X)f^{\ell}(-k,x)$$

$$= 2ik$$

$$(III_1)_A.$$

Démonstration.

Le vronskien de ces 2 fonotions ost indépondant de la variable x 1 Il suffit dono de vérifior la proposition pour une valeur quelconque de x .

Considérons le oas x $\longrightarrow \infty$, dons co cos on peut prendre

$$f^{\ell}(k,x) = e^{ikx} \quad \text{et} \quad f^{\ell}(-k,x) = e^{-ikx}$$

on vérifie que

$$\lim_{x \to \infty} \left(f'^{\ell}(k,x) f^{\ell}(-k,x) - f^{\ell}(k,x) f'^{\ell}(-k,x) \right) = ik\, e^{ikx} e^{-ikx} + ik\, e^{ikx} e^{-ikx} = 2ik$$

2°) __Proposition 2.__ Pour k réelle.

on a :

$$\varphi^{\ell}(k,x) = \frac{1}{2ik} \times \left(\frac{1}{ik}\right)^{\ell} \left[f^{\ell}(k,x) M^{\ell}(-k) - (-1)^{\ell} f^{\ell}(-k,x) M^{\ell}(k) \right]$$

avec

$$M^{\ell}(k) = (-1)^{\ell} (ik)^{\ell}\; W\left[\varphi^{\ell}(s,x)\,;\, f^{\ell}(s,x)\right]$$

$$(III_2)_{A'}$$

__Démonstration__ :

D'après le théorème de POINCARE $\varphi^{\ell}(k,x)$ est aussi une fonction entière de k^2, il s'ensuit que

$$\left.\begin{aligned} \varphi^{\ell}(k,x) &= \varphi^{\ell}(-k,x) \\ \text{donc}\quad \varphi'^{\ell}(k,x) &= \varphi'^{\ell}(-k,x) \end{aligned}\right\} \quad (\delta_{A'})$$

Tenant compte des égalités $(\delta_{A'})$ et remplaçant $M^{\ell}(k)$ et $M^{\ell}(-k)$ par leurs valeurs dans le second membre de l'égalité $(III_2)_{A'}$, on obtient sans peine :

$$\frac{1}{2ik}\left(\frac{1}{ik}\right)^{\ell} f^{\ell}(k,x)\, M^{\ell}(-k) - (-1)^{\ell} f^{\ell}(-k,x) M^{\ell}(k)$$

$$= \frac{1}{2ik}\left[\varphi^{\ell}(k,x)\; W\left[f^{\ell}(k,x)\,;\, f^{\ell}(-k,x)\right]\right] = \frac{1}{2ik}\,\varphi^{\ell} \times 2ik$$

$$= \varphi^{\ell}(k,x) \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

3°) __Proposition 3.__

Posons $\dot{f}^{\ell}(k,x) = \frac{\partial}{\partial k} f^{\ell}(k,x)$ et

$$f'^{\ell}(k,x) = \frac{\partial}{\partial x} f^{\ell}(k,x)$$

Alors

$$(III_3)_{A'} \quad f^{\ell}(k,x)\,\dot f'^{\ell}(k,x) - \dot f^{\ell}(k,x)\, f'^{\ell}(k,x) = 2k \int_x^{\infty} \left[f^{\ell}(k,t)\right]^2 dt$$

$$(III_4)_{A'} \quad f^{\ell}(k,x)\,\overline{f'^{\ell}(k,x)} - f'^{\ell}(k,x)\,\overline{f^{\ell}(k,x)} = 4iab \int_x^{\infty} \left|f^{\ell}(k,t)\right|^2 dt$$

$f^{\ell}(k,x)$ vérifie l'équation différentielle $(I_3)_{A'}$ donc

$$(i) \quad - f''^{\ell}(k,x) + V(x)\, f^{\ell}(k,x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\, f^{\ell}(k,x) = k^2 f^{\ell}(k,x).$$

Dérivons l'équation i par rapport à k, il vient

$$(i') \quad -\dot f''^{\ell}(k,x) + V(x)\,\dot f^{\ell}(k,x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\,\dot f^{\ell}(k,x) = 2k\, f^{\ell}(k,x) + k^2 \dot f^{\ell}(k,x)$$

Multiplions (i) et (i') respectivement par $\dot f^{\ell}(k,x)$ et $f^{\ell}(k,x)$ et additionnons membre à membre les équations ainsi obtenues ; on trouve :

$$f^{\ell}(k,x)\,\dot f''^{\ell}(k,x) - \dot f^{\ell}(k,x)\, f''^{\ell}(k,x) = 2k \left[f^{\ell}(k,x)\right]^2$$

soit

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\dot f^{\ell}(k,x)\, f'^{\ell}(k,x) - f^{\ell}(k,x)\,\dot f'^{\ell}(k,x)\right] = 2k \left[f^{\ell}(k,x)\right]^2$$

Notons que si $x \to \infty$, $f^{\ell}(k,x) \to e^{iax}\, e^{-bx}$ avec $b > 0$

donc pour $b > 0$: $f^{\ell}(k,x) \to 0$.

De l'équation ci-dessus je peux donc déduire que :

$$\dot f^{\ell}(k,x)\, f'^{\ell}(k,x) - f^{\ell}(k,x)\,\dot f'^{\ell}(k,x) = 2k \int_{\infty}^{x} \left[f^{\ell}(k,t)\right]^2 dt$$

ceci démontre $(III_3)_{A'}$

$(III_4)_{A'}$ se démontre en considérant les 2 équations suivantes

$$(j) \quad -f''^{\ell}(k,x) + V(x)\, f^{\ell}(k,x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\, f^{\ell}(k,x) = k^2 f^{\ell}(k,x)$$

$$(j') \quad -\overline{f''^{\ell}(k,x)} + V(x)\,\overline{f^{\ell}(k,x)} + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\,\overline{f^{\ell}(k,x)} = \bar k^2\, \overline{f^{\ell}(k,x)}$$

On multiplie (j) et (j') respectivement par $\overline{f^{\ell}(k,x)}$ et $f^{\ell}(k,x)$

Après soustraction membre à membre de ces 2 nouvelles équations et remplacement de k par $a+ib$, on obtient :

$$f'^{\ell}(k,x)\,\overline{f^{\ell}(k,x)} - \overline{f'^{\ell}(k,x)}\, f^{\ell}(k,x) = 4iab \int_x^{\infty} \left|f^{\ell}(k,t)\right|^2 dt$$

C.Q.F.D.

IV Propriété de la fonction $M^{\ell}(k)$.

1°) Proposition 1.

Si k est réelle, $\overline{M^{\ell}(k)} = M^{\ell}(-k)$ $(IV_1)_A$

Démonstration

on a :

$$\forall k, \quad \overline{f^{\ell}(k,x)} = f^{\ell}(-\bar{k},x) \qquad (h)$$

$$\forall k, \quad \overline{\varphi^{\ell}(k,x)} = \varphi^{\ell}(\bar{k},x) \qquad (h_1)$$

En effet si x est réelle, la relation (h) si elle existe est indépendante de x, il suffit donc de vérifier qu'elle est vraie pour une valeur quelconque de x.

Considérons le cas où

$$x \longrightarrow \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \overline{\quad (k,x)} = e^{ikx} = e^{-iax} \; e^{-bx} \quad ; \text{ de même}$$

$$\lim_{x\to\infty} f^{\ell}(-\bar{k},x) = e^{-iax} \; x \; e^{-bx}$$; d'où la proposition (h).

De même on vérifie que $\overline{\varphi^{\ell}(k,x)} = \varphi^{\ell}(\bar{k},x)$ lorsqu'on fait tendre x vers zéro, ce qui démontre (h').

Rappelons que $M^{\ell}(k) = (-1)^{\ell} (ik)^{\ell} \; W\left[\varphi^{\ell}(k,x) \qquad (k,x)\right]$

et que si k est réelle $\bar{k} = k$.

En se servant des égalités (h) et (h') et du fait que $\varphi^{\ell}(k,x) = \varphi^{\ell}(-k,x)$, on obtient sans peine l'égalité $\overline{M^{\ell}(k)} = M^{\ell}(-k)$ lorsque k est réelle.

2°) Proposition 2.

$M^{\ell}(k)$ ne peut s'annuler que pour un nombre fini de valeurs $k_n = i\,\xi_n$ avec $\xi_n > 0$ et $(n = 1,2,\cdots p)$.

Démonstration .

$M^{\ell}(kn)=0 \Longrightarrow kn= ibn$?

Le _ronsklen dos 2 fonotions $t^{\ell}(k,x)$ et $\varphi^{\ell}(k,x)$ solutions d. $(I_3)_A$ est indépendant de x ; cec! permet d'écrire

$$\Pi^{\ell}(k) = (-1)^{\ell} (H)^{\ell} \lim_{x\to 0} W\left[\varphi^{\ell}(k,x) ; f^{\ell}(k,x)\right]$$

$$= (-1)^{\ell} (ik)^{\ell} \lim_{x\to 0} \frac{x^{\ell}}{(2\ell-1)!!} f^{\ell}(k,x)$$ onYtlra que

$$\lim_{x\to 0} t^{e}(k,x) = \frac{(2\ell-1)!!}{x^{\ell}} \left(\frac{1}{k}\right)^{\ell} M^{\ell}(k)\left[1 + o(x^{\ell})\right]$$

Supposons $M^{\ell}(o) \neq 0$.

Cette hypothèse ne modifie pas Le généralité .e la pro·· position; elle permet seulement un exposé plus simple

$$\Pi^{\ell}(kn) = o \Longleftrightarrow \lim_{x\to 0} t^{\ell}(k_n, x) = 0$$; posonu

$k_n = a_n+ib_n$

Considérons la relation $(III_4)_{Af}$ et posons

$$G^{\ell}(k,x) = f^{\ell}(k,x)\, f^{\ell}(k,x) - \overline{f^{\ell}}(k,x)\, t\,(k,x)$$

$$.41ab \int_x^{+\infty} |f^{\ell}(k.t)|^2 dt;$$ dono $\lim_{x\to 0} G^{\ell}(k;x)=4iab\int_0^{\infty} |f(k,t)|^2 dt$

on remarque aussitôt qlla si pour k = kn

$$\lim_{x\to 0} f^{\ell}(k_n,x) = o \Rightarrow \lim_{x\to 0} G^{\ell}(k_n,x)= o=4ia_nb_n \int_0^{\infty} |f^{\ell}(k_n,t)|^2 dt$$

Par oonséquent

$$M^{\ell}(k_n = o \Rightarrow 4ia_n b_n \int_0^{\infty} |f^{\ell}(k_n,t)|^2 dt = 0$$

Mais $f^{\ell}(kn.t) \neq 0$; dono

$$M^{\ell}(k_n) = 0 \Rightarrow a_n= 0 \text{ ou } b_n = 0$$

Montrons quo $M^{\ell}(kn) = o$ ne peut avoir lieu quo si $a_n = 0$

En effet si $b_n= 0$, k_n serait réel ; on ault quo dans oc oas

$$\overline{\Pi^{\ell}}(kn) = M^{\ell}(-k_n)$$

D'après $(11)_2$, A' on aurait :

$$\varphi^{\ell}(k_n,x) = \frac{1}{2ik_n} \times (-1)^{\ell} \left[f^{\ell}(k_n,x)\, \overline{M^{\ell}}(k_n) - (-1)^{\ell} f^{\ell}(-k_n,x)\, M^{\ell}(k_n) \right]$$

$\equiv 0$ puisque $M^{\ell}(k_n) = M^{\ell}(-k_n) = 0$

Mais $\lim\limits_{x \to 0} \varphi^{\ell}(k_n,x) \times \frac{(2\ell+1)!!}{x^{\ell+1}} = 1$ ceci suppose

$\varphi^{\ell}(k_n,x) \not\equiv 0$

donc $M^{\ell}(k_n)=0$ n'a lieu que si $k_n = ib_n$.

Les valeurs complexes $k_n = i\beta_n$ réalisant $M^{\ell}(k_n)=0$ sont en nombre fini.

Rappelons que $\varphi^{\ell}(k,x)$ est une fonction entière de k et que $f^{\ell}(k,x)$ est analytique dans le demi plan $\mathrm{Im}\,k > 0$ on en conclut que

$M^{\ell}(k) = (-1)^{\ell} (ik)^{\ell} \, W \left[\varphi^{\ell}(k,x) \, , \, f^{\ell}(k,x) \right]$ est analytique dans le demi plan $\mathrm{Im}\,k > 0$; donc en particulier sur l'axe réel positif des imaginaires purs.

De l'expression de $M^{\ell}(k)$ on peut déduire que pour $|k| \to \infty$

$M^{\ell}(k) = 1 + 0(1)$

Si $b \to +\infty$, $|k| \to \infty$; par conséquent

$M^{\ell}(ib) = 1+0(1)$ lorsque $b \to +\infty$; ce résultat signifie que sur la partie positive de l'axe des imaginaires purs

$M^{\ell}(k) \not\equiv 0$

Comme $M^{\ell}(k)$ est analytique sur cette partie de l'axe, on déduit qu'il ne peut s'annuler que pour un nombre fini de fois sur ~~cet~~ partie de axe C.Q.F.D.

V **Relation.s entre $\varphi^{\ell}(i\xi_n, x)$ et $f^{\ell}(i\xi_n, x)$; $i\xi_n$ étant un zéro de $M^{\ell}(k)$.**

1°) **Proposition 1 .**

$$\boxed{f^{\ell}(i\xi_n, x) = \frac{(-1)^{\ell+1}\, 2i\,\xi_n^{\ell+1}}{\dot{M}^{\ell}(-i\xi_n)}\, \varphi^{\ell}(i\xi_n; x)} \qquad (V_1)_{A'}$$

Pour k complexe on montrerait que $(III_2)_{A'}$ s'écrit :

$$\varphi^{\ell}(k, x) = -\frac{1}{2ik} \times \left(\frac{1}{ik}\right)^{\ell}\left[f^{\ell}(k,x)M^{\ell}(-k) - (-1)^{\ell} f^{\ell}(-k,x)\overline{M^{\ell}(\bar{k})}\right]$$

Pour $k = i\xi_n$, $M(i\xi_n) = 0 \Longrightarrow \overline{M^{\ell}(i\xi_n)} = 0$; donc

$$\varphi^{\ell}(i\xi_n, x) = \frac{1}{2i\xi_n^{\ell+1}} \times (-1)^{\ell+1} f^{\ell}(i\xi_n, x)\, M^{\ell}(-i\xi_n)$$

d'où

$$f^{\ell}(i\xi_n, x) = \frac{(-1)^{\ell+1} \times 2i\,\xi_n^{\ell+1}}{M^{\ell}(-i\xi_n)}\, \varphi^{\ell}(i\xi_n, x)$$

2°) **Proposition 2 .**

$$\int_0^{\infty}\left[\varphi^{\ell}(i\xi_n, x)\right]^2 dx = \frac{\dot{M}(i\xi_n)}{2i\,\xi_n^{\ell+1}} \times \frac{1}{(2\ell+1)!!}\lim_{x\to 0}\left[\frac{f^{\ell}(i\xi_n, x)}{x^{\ell+1}}\right]^{-1}$$

avec

$$\dot{M}^{\ell}(i\xi_n) = \left[\frac{d}{dk} M^{\ell}(k)\right]_{k=i\xi_n} \qquad (V_2)_{A'}$$

D'après $(III_3)_{A'}$

$$\lim_{x\to 0}\; \dot{f}^{\ell}(i\xi_n, x)\, f'^{\ell}(i\xi_n, x) - \dot{f}'^{\ell}(i\xi_n, x)\, f^{\ell}(i\xi_n, x)$$

$$= 2i\,\xi_n \int_0^{\infty}\left[f^{\ell}(i\xi_n, t)\right]^2 dt$$

expression où $\mathring{f}^{\ell}(i\xi_n, x) = \left[\frac{d}{dk} f^{\ell}(k,x)\right]_{k=i\xi_n}$

on obtient la relation $(V_2)A'$ en se servant de l'équation ci-dessus de l'égalité (VII)A' et du résultant suivant

$$M^{\ell}(i\xi_n) = \xi_n^{\ell} \lim_{x\to 0} \frac{x^{\ell}}{(2\ell-1)!!} f^{\ell}(i\xi_n, x)$$

B') Fonction $A^{\ell}(x,y)$ et Potentiel $V(x)$.

I) Introduction d'une fonction $A^{\ell}(x,y)$.

on peut écrire $f_0^{\ell}(k,x)$ sous la forme

$$f_0^{\ell}(k,x) = M(kx)e^{ikx} \quad \text{avec} \quad |M(kx)| \leqslant C\left(\frac{1+|k|y}{|k|y}\right)^{\ell}$$

où C est une constante (voir connection between the S-matrix and Tensor Force de Roger Newton)

Posons

$$h(x,y,k) = \left[f^{\ell}(k,x) - f_0^{\ell}(k,x)\right] M(-ky)$$

$= h(x,y,a+ib)$ puisque $k=a+ib$

1°/ $h(x,y,a+ib) \in \mathcal{L}_2(-\infty,+\infty)$ par rapport à la variable réelle a.

Rappelons que

$$\begin{cases} |f^{\ell}(k,x)-f_0^{\ell}(k,x)| \leqslant \int_x^{\infty} |J^{\ell}(k,x,y)|\,|f^{\ell}(k,y)|\,|V(y)|\,dy & \text{(voir page } \quad) \\ |f^{\ell}(k,y)| \leqslant \left(A\,\frac{1+|k|y}{|k|y}\right)^{\ell} e^{-by} & \text{(voir page } \quad) \\ \int_x^{\infty} |V(y)|\,dy & \int |V(y)|\,dy \end{cases}$$

Pour $x < y$ $\left|\begin{array}{l} e^{-by} \leqslant e^{-bx} \\ \dfrac{x}{1+|k|x} \quad \dfrac{y}{1+|k|y} \end{array}\right.$

on a :

$$|J^{\ell}(k,x,y)| \leqslant C_0^{\ell+1}\left(C_1 - \frac{x}{1+|k|y}\right)^{\ell+1}\left(\frac{y}{1+|k|y}\right)^{-\ell} e^{bx}\, x\, e^{-by}$$

(voir page)

d'après ci-dessus

$$|J^{\ell}(k,x,y)| \leqslant C_0^{\ell+1}\, C_1^{-\ell}\, \frac{x}{1+|k|x} \times \left(\frac{y}{1+|k|y}\right)^{\ell} \times \left(\frac{y}{1+|k|y}\right)^{-\ell} e^{bx}\, e^{-bx}$$

Soit

$$|J^{\ell}(k,x,y)| \leqslant C_0^{\ell+1}\, C_1^{-\ell}\, \frac{x}{1+|k|x}$$

de même

$$|f^{\ell}(k,y)| \leqslant A \times \frac{1}{|k|^{\ell}} \left(\frac{y}{1+|k|y}\right)^{-\ell} e^{-by} \leqslant A\, e^{-bx}\, \frac{1}{|k|^{\ell}} \left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{-\ell}$$

donc

$$|J^{\ell}(k,x,y)|\;|f^{\ell}(k,y)| \leqslant A\, C_0^{\ell+1}\, C_1^{-\ell}\, e^{-bx} \left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{1-\ell} \times \frac{1}{|k|^{\ell}}$$

$$= A\, C_0^{\ell+1}\, C_1^{-\ell}\, \frac{e^{-bx}}{|k|^{\ell}} \times \left(\frac{1+|k|x}{x}\right)^{\ell-1} = A\, C_0^{\ell+1}\, C_1^{-\ell}\, \frac{e^{-bx}}{|k|} \left(1+\frac{1}{x|k|}\right)^{\ell-1}$$

Par suite

$$|f^{\ell}(k,x) - f_0^{\ell}(k,x)| \leqslant A\, C_0^{\ell+1}\, C_1^{-\ell}\, \frac{e^{-bx}}{|k|} \left(1+\frac{1}{x|k|}\right)^{\ell-1} \int_0^{\infty} |V(y)|\, dy$$

Si je pose $S_1 = A\, C_0^{\ell+1}\, C_1^{-\ell} \int_0^{\infty} |V(y)|\, dy$

alors

$$|f^{\ell}(k,x) - f_0^{\ell}(k,x)| \leqslant S_1\, \frac{e^{-bx}}{|k|} \left(1+\frac{1}{x|k|}\right)^{\ell-1}$$

d'autre part

$$|M(-ky)| \leqslant C \left(\frac{1+|k|y}{|k|\,y}\right)^{\ell} = C \left(1+\frac{1}{y|k|}\right)^{\ell}$$

donc

$$|f^{\ell}(k,x) - f_0^{\ell}(k,x)|\;|M(-ky)| \leqslant S_1 C \left(1+\frac{1}{x|k|}\right)^{\ell+1} \left(1+\frac{1}{y|k|}\right)^{\ell} \times \frac{e^{-bx}}{|k|}$$

En posant $|k| = \sqrt{a^2+b^2}$, il vient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left| f(k,x) - f_0^{\ell}(k,x) \right| \left| M(-ky) \right| \right]^2 da \leqslant$$

$$\frac{R\, e^{-2bx} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2+b^2} \left[1 + \frac{1}{x\sqrt{a^2+b^2}} \right]^{2(\ell-1)} \times \left[1 + \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \right]^{2\ell} do}{o}$$

avec $n = C^2$ (c'est donc une constante dépendant soulement do ℓ).

L'intégrale du second membre est convergente, la proposition est donc vérifiée.

2'/ Si $|k| \to +\infty$. $b \to +\infty$

L'intégrale du second membre designée par (n) se comporte comme e^{-2bx} pour $|k|$ assez grand et tend vers zéro.

L'intégrale du premier membre sera aussi nulle pour $|k| \to +\infty$, c'est à dire que e tend vers zéro avec e^{-2bx} on peut donc dire 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| f^{\ell}(A+ib,x) - f_0^{\ell}(0+ib,x) \right| \left| M(-a-ib,y) \right|^2 da = 0 \; (e^{-2bx})$$

pour $|k|$ assez grand

(I1) B'

3'/ Enoncé du théorème de TITCHMARSH et conséquence.

La relation :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x,a)\, e^{-iay}\, da = o$$

pour $x > y$

est une condition nécessaire et suffisante pour que

$b(x,a) = \lim_{b \to 0} h(x, a+1b)$ nveo $h(x,n+1b)$ analytiquo dans le

dem1 plan correspondant à $b > 0$ et

$$<, \int_{-\infty}^{+\infty} \left| h(x, a+ib) \right|^2 da = Q(e^{-2bY})$$

D'après précedemment $h(x,y, a+ih)$ réalise les conditions du théorème de Titchmarsh. Si k est réel on aura $k = a$; nous pouvons conclure que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y,k)\, e^{-iky}\, dk = o \quad \text{pour} \quad x > y$$

soit

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[f^{\ell}(k,x) - f_o^{\ell}(k,x)\right] M(-ky)\, e^{-iky}\, dk = 0$$

$(I_3)'_D$ pour $x > y$

Mais $M(-ky)\, e^{-iky} = f_o^{\ell}(-k,y)$; on peut donc écrire

$$A^{\ell}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[f^{\ell}(k,x) - f_o^{\ell}(k,x)\right] f_o^{\ell}(-k,y)\, dk = o$$

pour $x > y$ $\quad (I_3)_D$

4°) Proposition

L'inversion de $(I_3)_D$ donne pour k réel

$$f^{\ell}(k,x) = f_o^{\ell}(k,x) + \int_x^{\infty} A^{\ell}(x,y)\, f_o^{\ell}(k,y)\, dy$$

Démonstration

On peut écrire $(I_4)_D$ de la façon suivante

$$f^{\ell}(k,x) - f_o^{\ell}(k,x) = \int_x^{\infty} A^{\ell}(x,t)\, f_o^{\ell}(k,t)\,dt = \int_o^{\infty} A(x,t) f_o(k,t)\,dt$$

notant que $A(x,t) = 0$ pour $x > t$,

Portons cette valeur dans le second membre de $(I_3)_D$ et montrons que nous obtenons $A^{\ell}(x,y)$; soit

$$I(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_o^{+\infty} A^{\ell}(x,t)\, f_o^{\ell}(k,t)\, dt\right) f_o^{\ell}(-k,y)\, dk$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} A^{\ell}(x,t)\, dt \times \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_o^{\infty} f_o^{\ell}(k,t)\, f_0^{\ell}(-k,y)\, dk}$$

Les fonctions propres de l'équation de Schrödinger

(1) $\Delta \Psi(r,\theta,\varphi) + \left[k^2 - V(x)\right] \Psi(r,\theta,\varphi) = 0$

sont de la forme

$$\Psi_{k\ell m}(r,\theta,\varphi) = R_k^\ell(r)\, Y_\ell^m(\theta,\varphi)$$

Lorsque V(r) est négligeable, la partie radiale de l'équation (1) est

(2) $$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR_k^\ell(r)}{dr}\right) + \left(k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right) R_k^\ell(r)$$

En posant

$$R_k^\ell(r) = \frac{\chi_k^\ell(r)}{r}$$ (2) devient

$$\frac{d^2\chi_k^\ell(r)}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right)\chi_k^\ell(r) = 0$$

Cette dernière équation n'est autre que l'équation (11 3) At • trcua ecnnee dana le cas k réel ; donc: $E > 0$.
Les fonctions propres forment un spectre continu.

Les fonctions cttoudee Ψ_{klm} vérifient les conditions de normalité et d'orthogonalité du spectre continu.

$$\int_V \Psi^*_{k'\ell' m'}\, \Psi_{klm}\, dV = \delta_{mm'}\,\delta(k-k')\,\delta_{\ell\ell'}$$

Mais

$$\int \Psi^*_{k'\ell' m'}\, \Psi_{k\ell m}\, dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} Y_{\ell'}^{m'}(\theta,\varphi)\, Y_\ell^m(\theta,\varphi)$$

$$\times \sin\theta\, d\theta \int_0^\infty R_{k'}^{\ell *}(r)\, R_k^\ell(r) r^2\, dr$$

Comme

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} Y_{\ell'}^{m'}(\theta,\varphi)\, Y_\ell^m(\theta,\varphi)\, \sin\theta\, d\theta = \delta_{\ell\ell'}\,\delta_{mm'}$$

les fonctions radiales doivent être normalisées par la condition

$$\int_0^\infty r^2 R^{\ell'}_{k'}(r)\, R^{\ell}_{k}(r)\, dr = \delta(k-k') = \int_0^\infty \chi^{\ell'\,*}_{k'}(r)\, \chi^{\ell}_{k}(r)\,dr$$

$f^\ell_o(k,t)$ est solution de $(II_3)_A$, cette fonction radiale sera normalisée en posant

$$\chi^\ell_k(t) = a f^\ell_o(k,t)$$

où a est la constante de normalisation cherchée -

Pour a convenable on aura :

$$\int_0^\infty a f^\ell_o(k,t)\left[a f^\ell_o(k,y)\right]^* dk = \delta(t-y) = |a|^2 \int f_o(k,t)\overline{f^\ell_o(k,y)}\,dk$$

$$= |a|^2 \int f^\ell_o(k,t)\, f^\ell_o(-k,y)\,dk \text{ car pour } k \text{ réel}$$

$$f^\ell_o(k,y) = f^\ell_o(-k,y) \text{ (voir IV A')}$$

Déterminons le coefficient a approprié en utilisant la méthode donnée par Landau et Lifchitz dans leur ouvrage de Mécanique Quantique.

Pour $\ell = o$, $f^o_o(k,x) = e^{ikx}$

on vérifie aussitôt, que dans le cas $\ell = 0$ la fonction radiale normalisée est obtenue en prenant

$$\chi^o_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ikt}$$

Considérons la forme asymptotique de $f^\ell_o(k,t)$ pour $|t| \to \infty$: $f^\ell_o(k,t) \approx e^{ikt}$

Il ressort de cette constatation que le coefficient de normalisation cherché est $a = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

donc $\chi_k^{\ell}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f_0^{\ell}(k,t)$

Nous pouvons donc écrire

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_0^{\ell}(k,t) f_0^{\ell}(-k,y)\, dk = \delta(t-y)$$

Par conséquent

$$1\,(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} A^{\ell}(x,t)\, \delta(t-y)\, dt = A^{\ell}(x,y)$$

ceci démontre la proposition $(I_4)_{B'}$

II Etablissement de 2 équations différentielles.

Nous supposons que les conditions de dérivation sous le signe somme sont remplies.

Dérivons les 2 membres de l'équation $(1_4'B')$ deux fois par rapport à la variable x ; on obtient lorsque k est réelle :

$$(\alpha_{B'})\quad \left\{ \begin{aligned} f''^{\ell}_0(k,x) &= \frac{\partial A^{\ell}}{\partial x} f^{\ell}_0(k,x) - A^{\ell}(x,x)\, f'^{\ell}_0(k,x) \\ &- f^{\ell}_0(k,x)\left[\frac{\partial A(x,y)}{\partial x}\right]_{x=y} + \int_x^{\infty} f^{\ell}_0(k,y)\,\frac{\partial^2 A^{\ell}(x,y)}{\partial x^2}\,dy \end{aligned} \right.$$

En posant $f^{\ell}_0(k,x) = M(kx)e^{ikx}$; on a les égalités suivantes

$$(\beta_{B'})\quad \left\{ \begin{aligned} f'^{\ell}_0(k,x) &= ik\, f^{\ell}_0(k,x) + e^{ikx} M'(kx) \\ f''^{\ell}_0(k,x) &= -k^2\, f^{\ell}_0(k,x) + 2ik\,e^{ikx}M'(kx) + e^{ikx}M''(kx) \end{aligned} \right.$$

D'après $(I_4)_{B'}$ o, a :

$$(\gamma_{B'}) \quad f^{\ell}(k,x) = f_o^{\ell}(kx) \int_x^{\infty} A^{\ell}(x,y) M(ky) e^{lky}\, dy$$

Intégrons $\gamma_{B'}$ deux fois par parties ; on obtient en tenant compte de $\beta_{B'}$ l'égalité suivante

$$k^2 f^{\ell}(k,x) = k^2 f_o^{\ell}(k,x) + A^{\ell}(x,x)\, f_o'^{\ell}(k,x)$$

$$+ \int_x^{\infty} \left[f_o''^{\ell}(k,y) + k^2 f_o^{\ell}(k,y) \right] A^{\ell}(x,y)\,dy - f_o(h,x) \left[\frac{\partial A(x,y)}{\partial y} \right]_{y=x}$$

$$- \int_x^{\infty} f_o^{\ell}(k,y) \frac{\partial^2 A(x,y)}{\partial y^2}\, dy$$

$\alpha_{B'} + \beta_{B'} \Longrightarrow$

$$k^2 f^{\ell}(k,x) + f''^{\ell}(k,x) = k^2 f_o^{\ell}(k,x) + f_o''^{\ell}(k,x) - 2 \frac{\partial A(x,x)}{\partial x} f_o^{\ell}(k,x)$$

$$(S_{B'}) \quad \begin{cases} + \displaystyle\int_x^{\infty} f_o^{\ell}(k,y) \left[\frac{\partial^2 A(x,y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A(x,y)}{\partial y^2} \right] dy \\ + \displaystyle\int_x^{\infty} \left[f''(k,y) + k^2 f_o^{\ell}(k,y) \right] A^{\ell}(x,y)\,dy \end{cases}$$

$f^{\ell}(k,x)$ étant solution de $(I_3)_A$; on a :

$$(L_{B'}) \quad \begin{cases} k^2 f^{\ell}(k,x) + f''^{\ell}(k,x) = \left[\dfrac{\ell(\ell+1)}{x^2} + V(x) \right] f^{\ell}(k,x) \\ = \left[\dfrac{\ell(\ell+1)}{x^2} + V(x) \right] \left[f_o^{\ell}(k,x) + \displaystyle\int_x^{\infty} \left[f_o^{\ell}(k,y)\, A^{\ell}(x,y) \right] dy \right] \\ = \dfrac{\ell(\ell+1)}{x^2} f_o^{\ell}(k,x) + \displaystyle\int_x^{\infty} \dfrac{\ell(\ell+1)}{x^2} f_o^{\ell}(k,y) A^{\ell}(x,y)\,dy + V(x) f_o^{\ell}(k,x)\, dy \end{cases}$$

$$+ \int_x^{\infty} V(x)\, fa^{\ell}\, (k,y> A^{\ell}(x,y)\, dy$$

De plus $f_o^\ell(k,x)$ étant solution de l'équation $(II_3)_{A'}$, il vient que $f_o^{''\ell}(k,x) + k^2 f_o^\ell(k,x) = \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} f_o^\ell(k,x)$

D'après $(S_{B'})$, on a :

$$(N_{B'})\begin{cases} k^2 f^\ell(k,x)+f''^\ell(k,x)=\frac{\ell(\ell+1)}{x^2} f_o^\ell(k,x)+\int_x^\infty \frac{\ell(\ell+1)}{y^2} f_o^\ell(k,y)A^\ell(x,y)dy \\ -2\frac{dA^\ell(x,x)}{dx} f_o^\ell(k,x)+\int_x^\infty f_o^\ell(k,y)\left[\frac{\partial^2 A^\ell(x,y)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 A^\ell(x;y)}{\partial y^2}\right]dy \end{cases}$$

En comparant $(L_{B'})$ et $(N_{B'})$ je constate qu'il y aura égalité si je prends

$$(a)\quad \frac{\partial^2 A^\ell(x,y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A^\ell(x,y)}{\partial y^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{y^2} = \left[V(x)+\frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\right] A^\ell(x,y)$$

et

$$V(x) = -\frac{2dA^\ell(x,x)}{dx} \qquad (II_1)_{B'}$$

Montrons que $(II_1)_{B'}$ est justifiée ; ce qui revient au même de dire que $(II_1)_{B'}$ (a) admet une solution $A^\ell(x,y)$ qui vérifie $V(x) = -\frac{2dA^\ell(x,y)}{}$

III <u>Expression</u> de $A^\ell(x,y)$

Déterminons : une solution de $(II_1)_{B'}$ vérifiant

$$\lim_{x+y\to+\infty} A(x,y) = 0$$

cherchons là sous la forme

$$A(x,y)=\frac{1}{2}\int_{\frac{x+y}{2}}^\infty V(s)ds + \frac{1}{2}\int_x^{\frac{x+y}{2}} V(s)\int_{y+x-s}^{y+s-x} A^\ell(s,u)du$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\frac{x+y}{2}}^\infty V(s)\int_s^{y+s-x} A^\ell(s,u)du \qquad (II_2)_{B'}$$

Montrons que $A^{\ell}(x,y)$ ainsi définie est solution de $(II_1)_8($

En effet

$$A(x,x) = \frac{1}{2}\int_x^{\infty} V(s)ds$$ 1

La dérivation sous le signe somme donne

$$v(x) = -\frac{2dA^{\ell}(x,x)}{dx}$$

De plus $\lim\limits_{x+y\to\infty} A(x,y) = 0$

Montrons que la série de NEUMANN associée à $A^{\ell}(x,y)$ est uniformément convergente.

Ecrivons $A^{\ell}(x,y)$ sous la forme

$$A^{\ell}(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(x,y) \quad \text{avec}$$

$$A_0(x,y) = \frac{1}{2}\int_{\frac{x+y}{2}}^{\infty} V(s)ds \quad \text{et}$$

$$A_m(x,y) = \frac{1}{2}\int_x^{\frac{x+y}{2}} V(s)ds \int_{y+x-s}^{y+s-x} A_{m-1}(s,u)\,du$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\frac{x+y}{2}}^{\infty} V(s)ds \int_s^{y+s-x} A_{m-1}(s,u)\,du$$

Montrons que

$$\left|A_m(x,y)\right| \leq \frac{1}{2}\int_{\frac{x+y}{2}}^{\infty} |V(t)|\,dt \;\frac{\left[\int_x^{\infty} s\,|V(s)|\,ds\right]^m}{m!}$$

Vérifions que la relation est vraie pour $m = 1$

$$A_1(x,y) = \frac{1}{2}\int_x^{\frac{x+y}{2}} V(s)ds \int_{y+x-s}^{y+s-x} A_0(s,u)\,du + \frac{1}{2}\int_{\frac{x+y}{2}}^{\infty} V(s)ds \int_s^{y+s-x} A_0(s,u)\,du$$

Puisque

$$\left|A_0(x,y)\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_{\frac{x+y}{2}}^{\infty}\left|V(s)\right| ds \text{ ; on a}$$

$$\left|A_1(x,y)\right| \quad \frac{1}{2}\int_{x}^{\frac{x+y}{2}}\left|V(s)\right| ds \int_{y+x-s}^{y+s-x} du \left(\frac{1}{2}\int_{\frac{s+u}{2}}^{\infty}\left|V(t)\right| dt\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{\frac{x+y}{2}}^{\infty}\left|V(s)\right| ds \int_{s}^{y+s-x} du \int_{\frac{s+u}{2}}^{\infty}\left|V(t)\right| dt \qquad = I_1+I_2$$

$$s \geqslant \frac{x+y}{2} \quad \text{et} \quad u \geqslant \frac{x+y}{2} \Rightarrow \frac{u+s}{2} \geqslant \frac{x+y}{2}$$

donc

$$\int_{\frac{s+u}{2}}^{\infty}\left|V(t)\right| dt \leqslant \int_{\frac{x+y}{2}}^{\infty} V(t)\, dt$$

En majorant

$$\int_{\frac{s+u}{2}}^{\infty}\left|V(t)\right| dt \text{ par } \int_{\frac{x+y}{2}}^{\infty}\left|V(t)\right| dt, \text{ on constate que}$$

$$I_1 \leqslant \frac{1}{2}\int_{\frac{x+y}{2}}^{\infty}\left|V(t)\right| dt \int_{x}^{\frac{x+y}{2}} s\left|V(s)\right| ds \quad \text{et que}$$

$$I_2 \leqslant \frac{1}{2}\int_{\frac{x+y}{2}}^{\infty}\left|V(t)\right| dt \int_{\frac{x+y}{2}}^{\infty} s\left|V(s)\right| ds \quad \text{par conséquent}$$

$$\left|A_1(x,y)\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_{\frac{x+y}{2}}^{\infty}\left|V(t)\right| dt \int_{x}^{\infty} s\left|V(s)\right| ds$$

La proposition est donc vraie pour $m = 1$; Il est aisé de constater par reccurence que

$$\left|A_m(x,y)\right| \quad \frac{1}{2}\int_{\frac{x+y}{2}}^{\infty}\left|V(t)\right| dt \;\frac{\left[\int_{x}^{\infty} s\left|V(s)\right| ds\right]^m}{m!}$$

Il résulte que

$$(R_B') \quad |A^{\ell}(x,y)| \leq \sum_{m=0}^{\infty} |A_m(x,y)| \leq \frac{1}{2}\int_{\frac{x+y}{2}}^{\infty} |V(t)|\,dt \; e^{\int_x^{\infty} s|V(s)|\,ds}$$

Les intégrales $\int_{\frac{x+y}{2}}^{\infty} |V(t)|\,dt$ et $\int_x^{\infty} s|V(s)|\,ds$ étant convergente on déduit que la série de NEUMANN considérée est uniformément convergente.

Par conséquent $A^{\ell}(x,y)$ définie par $(II_2)_{B'}$ est solution unique de l'équation différentielle $(II)_{B'}$ pour la condition envisagée et vérifie

$$\boxed{V(x) = -\,2\,\frac{dA^{\ell}(x,x)}{dx}} \qquad (\Gamma_{B'})$$

III Expression de $f_0^{\ell}(k,x)$ à l'aide de $f^{\ell}(k,x)$

Considérons l'équation $(I_4)_{B'}$

$$f^{\ell}(k,x) = f_0^{\ell}(k,x) + \int_x^{\infty} A^{\ell}(x,y)\, f_0^{\ell}(k,y)\,dy \qquad B'$$

$(I_4)_{B'}$ est une équation de VOLTERRA.

D'après $(R_{B'})$ $\quad |A^{\ell}(x,y)| \leq \frac{1}{2}\int_{\frac{x+y}{2}}^{\infty} |V(t)|\,dt \; e^{\int_x^{\infty} s|V(s)|\,ds}$

$A^{\ell}(x,y)$ est donc bornée et continue ; il en résulte que $(I_4)_{B'}$ admet une solution $f_0^{\ell}(k,x)$ définie par

$$f_0^{\ell}(k,x) = f^{\ell}(k,x) + \int_x^{\infty} \tilde{A}^{\ell}(x,y)\, f^{\ell}(k,y)\,dy \qquad (III_1)_{B'}$$

expression où $\tilde{A}^{\ell}(x,y)$ désigne le noyau inverse de $A^{\ell}(x,y)$.

Ct) Relation entre la fonction de Dirac et la solution (k,x) définie par $(II_1)_{A}$'

1 Opérateur $L = \frac{d^2}{dx^2} + V(x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} - E$ et fonction δ

Rappelons que $k^2 = E$, que $\varphi^{\ell}(k,x)$ et $f^{\ell}(-k,Y)$ vérifient

$$\left[\frac{-d^2}{dx^2} + V(x) \quad \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} - k^2\right] \varphi^{\ell}(k,x) = 0$$

$$\left[\frac{-d^2}{dy^2} + V(y) \quad \frac{\ell(\ell+1)}{y^2} - k^2\right] f^{1}(-k,y) = 0$$

Les 2 fonctions φ^{ℓ} et f^{ℓ} sont deux solutions linéairement indépendantes de notre équation radiale

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} + V(r) + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - k^2\right) U(r) = 0 \quad =$$

En vertu d'un résultat établi en analyse, on déduit que la fonction définie à une constante près par

$\varphi^{\ell}(k,x) \quad f^{\ell}(-k,y)$ si $y > x$ et par

$\varphi^{\ell}(k,y) \quad f^{\ell}(-kty)$ si $Y < x$

est une fonction de Green associée à l'opérateur

$$\frac{d^2}{dr^2} + V(r) + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}$$

Notons que $W^{\ell}(-k)$ est une constante par rapport à x et à y.

Nous pouvons donc prendre comme fonction de Green associée la fonction G (E,x,y) définie par :

$$G^{\ell}(E,x,y) = \frac{\varphi^{\ell}(k,x) \quad f^{\ell}(-k,y)}{M^{\ell}(-k)} \qquad \text{si } y > x$$

ot

$$G^{\ell}(E,x,y) = \frac{\varphi^{\ell}(k,y)\ f^{\ell}(-k,x)}{M^{\ell}(-k)} \qquad .1\ y \quad x$$

où

$$0 \leqslant \arg k \leqslant \pi \quad , \text{c'est à dire } \mathrm{Im}\,k = b \geqslant 0.$$

$G^{\ell}(E,x,y)$ vérifie en tant que fonction de Green l'équation différentielle

$$\left(\frac{-d^2}{dx^2} + V(x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} - E\right) G^{\ell}(E,x,y) = \delta(x-y)$$

I_C

II Introduction d'une fonction auxiliaire

1°) Hypothèses.

Considérons que fonction ψ de la variable réelle x ; $x > 0$

Faisons sur ψ les hypothèses suivantes :

fois continûment différentiable.

ⓑ $\psi(x) = 0$ pour $x \in \,]0,\varepsilon[$ assez petit et positif

ⓒ $\psi(x)=0$ pour $x \geq A$; A suffisamment grand

Désignons alors par θ^{ℓ} la fonction suivante :

$$\theta^{\ell}(x) = -\psi''(x) + \left[V(x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\right]\psi(x)$$

2°) Expression de $\psi(x)$ à l'aide d'une intégrale double.

Posons $I^{\ell}(E,x) = \int_0^{\infty} G^{\ell}(E,x,y)\,\psi(y)\,dy$

D'après $(I)_{C'}$ on a :

$$\theta^{\ell}(y)\,G^{\ell}(E,x,y) = \left[-\frac{d^2}{dy^2} + V(y) + \frac{\ell(\ell+1)}{y^2}\right] G^{\ell}(E,x,y)\,\psi(y)$$

$$= \delta(x-y)\,\psi(y) + E\,G^{\ell}(E,x,y)\,\psi(y) \quad \text{d'où}$$

$$G^{\ell}(E,x,y)\,\psi(y) = \frac{1}{E}\,\theta^{\ell}(y)\,G^{\ell}(E,x,y) - \frac{1}{E}\,\delta(x-y)\,\psi(y)$$

Par suite

$$\boxed{\begin{aligned}\int_0^{\infty} G^{\ell}(E,x,y)\,\psi(y)\,dy &= -\frac{1}{E}\int_0^{\infty}\delta(x-y)\,\psi(y)\,dy + \frac{1}{E}\int_0^{\infty} G^{\ell}(E,x,y)\,\psi(y)\,dy \\ &= -\frac{1}{E}\,\psi(x) + \frac{1}{E}\int_0^{\infty} G^{\ell}(E,x,y)\,\psi(y)\,dy \qquad (\alpha_{C'})\end{aligned}}$$

D'après $\gamma_{A'}$ et $\delta_{A'}$ nous avons :

$$\left|\varphi^{\ell}(k,x)\right| \leq s.b.X \left(\frac{x}{1+|k|\,x}\right)^{\ell+1}$$

$$|f^{\ell}(k,x)| \leqslant A e^{-bx}\left(\frac{|k|\,x}{1+|k|\,x}\right)^{\ell} = A e^{-bx}\left(\frac{1+|k|\,x}{|k|\,x}\right)^{-\ell}$$

De plus on peut majorer $\left|\frac{1}{E(-k)}\right|$ par m $|k|^{\ell}$; m étant une constante appropriée dépendant seulement de ℓ

De plus on a pour :

$x > y \quad \frac{x}{1+|k|x} > \frac{y}{1+|k|y}$. et pour

$x < y \quad \frac{x}{1+|k|x} < \frac{y}{1+|k|y}$

De l'ensemble de ces inégalités on déduit que

$$\boxed{|G^{\ell}(E,x,y)| \leqslant K \frac{x}{1+|k|\,x}\, e^{b(x+y)} \qquad (\beta_{C'})}$$

K étant une constante positive

Intégrons les 2 membres de $(\alpha_{C'})$ le long d'un cercle de rayon $R=|E|$; E considérée comme variable complexe :

$$\int_{|E|=R}\frac{dE}{E}\int_0^{\infty} G^{\ell}(E,x,y)\,\varphi(y)\,dy = -\varphi(x)\int_{|E|=R}\frac{dE}{E}$$

$$+ \int_{|E|=R}\frac{dE}{E}\int_0^{\infty} G^{\ell}(E,x,y)\,\theta^{\ell}(y)\,dy$$

Notons que $-\varphi(x)\int_{|E|=R}\frac{dE}{E} = 2i\pi\,\varphi(x)$

$$\left|\int_0^{\infty} G^{\ell}(E,x,y)\,\theta^{\ell}(y)\,dy\right| \leqslant \int_0^{\infty} |G^{\ell}(E,x,y)|\,|\theta^{\ell}(y)|\,dy$$

Par construction $\theta^{\ell}(y)$ est continue sur $[0, A]$; il est donc possible de la majorer par un nombre M ; soit

$$|\theta^{\ell}(y)| \leqslant M$$

D'après les hypothèses fatter ,

$\theta^{\ell}(y) = 0$ pour $y \notin [\varepsilon, A]$; en se sorvant de l'inégalité $(\beta_{C'})$ on trouve

$$\int_0^{\infty} \mathrm{Kil}\, \frac{x}{1+|k|x}\, e^{bx}\, e^{by}\, dy \leqslant C\, \frac{x}{1+|k|\,x} \quad \text{avec}$$

$C = \frac{KMe^{bA}}{b}\left[e^{bA} - 1\right]$; donc en posant $E = Re^{i\theta}$ on obtient

$$\left|\int_{|E|=R} \frac{dE}{E} \int_0^{\infty} G^{\ell}(E,x,y)\,\theta^{\ell}(y)\,dy\right| \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{Cx}{1+|k|\,x}\, d\theta = 2\pi C\, \frac{x}{1+|k|\,x}$$

$$= 2\pi C\, \frac{x}{1+x\sqrt{R}}$$

Il résulte el $R \longrightarrow \infty \displaystyle\int_{|E|=R} \frac{dE}{E} \int_0^{\infty} G^{\ell}(E,x,y)\,\varphi(y)\,dy$

De C Té. tat on ~~déduit que :~~

$$(II_{C'}) \qquad \varphi(x) = \frac{-1}{2i\pi} \lim_{R \to \infty} \int_{|E|=R} dE \int_0^{\infty} G^{\ell}(E,x,y)\,\varphi(y)\,dy$$

III Singularités de la fonction $I^{\ell}(E,x) = \int_0^{\infty} G^{\ell}(E,x,y)\varphi(y)dy$

SQit $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}$

De l'équation I_{Gt} on a :

$(H - E)\, G^{\ell}(E,x,y)\varphi(y) = \delta(x-y)\varphi(y)$ soit

$G^{\ell}(E,x,y)\varphi(y) = (H - E)^{-1}\delta(x-y)\varphi(y)$

Par suite :

$$\int_0^{\infty} G^{\ell}(E,x,y)\varphi(y)dy = \int_0^{\infty} (H-E)^{-1}\delta(x-y)\varphi(y)dy$$

$$= (H-E)^{-1}\int_0^{\infty}\delta(x-y)\varphi(y)dy = (H-E)^{-1}\varphi(x)$$

De plus

$$\left|G^{\ell}(E,x,y)\right| \leq K e^{b(x+y)} \frac{x}{1+|k|x}$$

A cause de l'hypothèse V(x) tend vers zéro Quand x tend vers l'infini on vérifie sans peine Que

$G^{\ell}(E,x,y) \in L^2(0,\infty)$; de carré sommable

en x et en y.

Le noyau G (E,x,y) étant de carré sommable il engendre un opérateur $G = (H - E)^{-1}$

On sait que l'opérateur résolvant $(H - E)^{-1}$ admet pour singularités les valeur. propreR de H.

Rappelons Que H admet un spoctre continu Qui est <u>l'axe réel positif</u> et pour spectre discret cortQines valeurs négatives qui sont ici les énergies $E_n = -\xi_n^2$ $(n=1, 2, \dots p)$.

Ce. énergies correspondent aux valeurs $k_n = i\xi_n$ qui 8nnulent $M^{\ell}(-k)$

IV Relation entra $\varphi^{\ell}(k,x)$ et la fonction S_{ℓ}

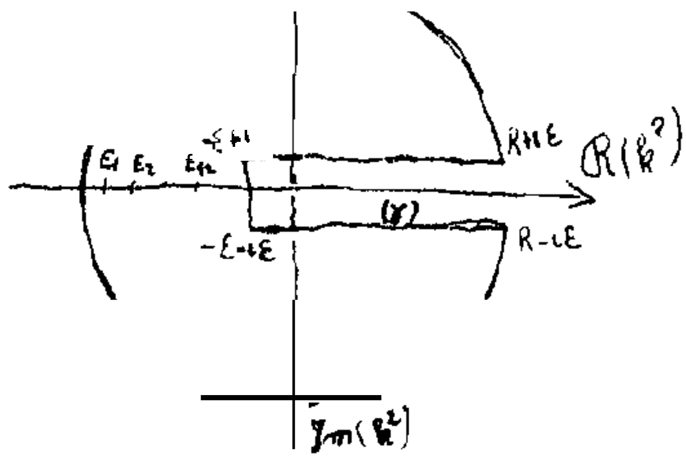
Des conDidérations précédontca, il résulte quo

$I^{\ell}(E,x) = \int_0^{\infty} G^{\ell}(E,x,y)\,\psi(y)dy$ oot boLoecepbe dans

tout le plan complexe E excep.é sur l'axe réel poaitif et aux pôles simpleo de valeur $E_n = -\beta_n^2$.

Intégrons $I^{\ell}(E,x)$ le, lonC d'UD chemin fermé C formé d'un oerole de rayen $R = |E|$ ot d'une courbe γ oon.tituée des segments joignant dans l'ordre 2es points

$R - i\varepsilon$, $-\varepsilon - i\varepsilon$, $-\varepsilon + i\varepsilon$ ot $R + i\varepsilon$



Le théorème des résidus pormot d'écrira

$$\int_{|E|=R} dE \int_0^{\infty} G^{\ell}(E,x,y)\,\psi(y)dy + \int_0^{R} dE \int_0^{\infty} \left[G^{\ell}(E+i\varepsilon,x,y) - G^{\ell}(E-i\varepsilon,x,y)\right]\psi(y)dy$$

$$= 2i\pi \sum_{E=E_n} \mathrm{Res} \int_0^{\infty} G^{\ell}(E,x,y)\,\psi(y)dy$$ soit

$$\int_{|E|=R} dE \int_0^{\infty} G^{\ell}(E,x,y)\,\psi(y)dy = 2i\pi \sum_{E=E_n} \mathrm{Res} \int_0^{\infty} G^{\ell}(E,x,y)\,\psi(y)dy$$

$$-\int_0^R dE \int_0^\infty \left[G^\ell(E+i\varepsilon,x,y) - G^\ell(E-i\varepsilon,x,y)\right]\varphi(y)\,dy$$

Si nous faisons tendre R vers l'infini ; il vient d'après $(I_{C'})$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty dE \int_0^\infty \left[G^\ell(E+i\varepsilon,x,y) - G^\ell(E-i\varepsilon,x,y)\right]\varphi(y)\,dy$$

$(S_{C'})$

$$-\sum_{E=E_n} \mathrm{Res} \int_0^\infty G^\ell(E,x,y)\,\varphi(y)\,dy = \int_0^\infty \delta(x-y)\,\varphi(y)\,dy$$

puisque $\varphi(x) = \int_0^\infty \delta(x-y)\,\varphi(y)\,dy$

Remplaçons $G^\ell(E,x,y)$ par sa valeur et utilisons les relations $(III_2)_{A'}$; $(V_1)_{A'}$

on obtient pour

$$\varepsilon \longrightarrow 0$$

$$\int_0^\infty \delta(x-y)\,\varphi(y)\,dy = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \varphi^\ell(k,x)\,\frac{k^{2(\ell+1)}}{M^\ell(k)\,M^\ell(-k)}\,dk \int_0^\infty \varphi^\ell(k,y)\,\varphi(y)\,dy$$

$(S_{C'})$

$$+\sum_{n=1}^{p} C_n^\ell\, \varphi^\ell(i\xi_n,x)\int_0^\infty \varphi^\ell(i\xi_n,y)\,\varphi(y)\,dy$$

avec

$$C_n^\ell = \frac{\dot{M}(i\xi_n)}{2i\,\xi_n^{\ell+1}\,(2\ell+1)!!}\left[\lim_{x\to 0} \frac{f^\ell(i\xi_n,x)}{x^{\ell+1}}\right]^{-1}$$

D'après $(V_2)_{A'}$

$$C_n^\ell = \int_0^\infty \left[\varphi^\ell(i\xi_n,x)\right]^2 dx$$

En comparant les deux membres de l'égalité $(S_{C'})$ on trouve que

$$\delta(x,y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \varphi^\ell(k,x)\, \varphi^\ell(k,y)\, \frac{k^{2(\ell+1)}}{M^\ell(k) M^\ell(-k)}\, dk$$

$$+ \sum_{n=1}^{p} C_n^\ell\, \varphi^\ell(i\xi_n,x)\, \varphi^\ell(i\xi_n,y) \qquad \mathrm{III}_{C'}$$

D) Forme de l'Equation Intégrale.

1-) Transformation de l'Equation $\mathrm{III}_{C'}$ lorsque k est réelle et x > t.

Rappelons que nous prenons comme hypothèse

k réelle $\Longleftrightarrow$ E > o entier positif

Puisque E > 0 ; il n'y a pas d'états liés et par conséquent pas de spectre discret par suite les constantes C_n^ℓ disparaissent de l'équation $\mathrm{III}_{C'}$ qui se réduit à

$$\mathrm{D'} \quad \delta(t-x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \varphi^\ell(k,t)\, \varphi^\ell(k,x)\, \frac{k^{2(\ell+1)}}{M^\ell(k)\, M^\ell(-k)}\, dk$$

Dans le cas $\ell > 0$, la fonction de phase S est définie par

$$S^\ell(k) = \frac{M^\ell(-k)}{M^\ell(k)}$$

La relation (III2) A' permet d'écrire

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \varphi^\ell(k,t)\, \varphi^\ell(k,x)\, \frac{k^{2(\ell+1)}}{M^\ell(k) M^\ell(-k)}\, dk \; -$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left[f^\ell(k,t)\, f^\ell(k,x)\, \frac{M^\ell(-k)}{M^\ell(k)} - (-1)^\ell f^\ell(k,t)\, f^\ell(-k,x)\right] dk$$

$$+\ \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left[f^\ell(-k,t)\, f^\ell(-k,x)\, \frac{M^\ell(k)}{M^\ell(-k)} - (-1)^\ell f^\ell(-k,t)\, f^\ell(k,x)\right] dk$$

Soit

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f^\ell(k,t)\left[f^\ell(k,x)\, S^\ell(k) - (-1)^\ell f^\ell(-k,x)\right] dk$$

$$+\ \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f^\ell(k,t)\left[f^\ell(k,x)\, S^\ell(k) - (-1)^\ell f^\ell(-k,x)\right] dk$$

ce qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\boxed{I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f^\ell(k,t)\left[f^\ell(k,x)\, S^\ell(k) - (-1)^\ell f^\ell(-k,x)\right] dk = \delta(t-x) \qquad (\beta_{D'})}$$

D'après $(III_1)_{B'}$ on a :

$$f^\ell(k,x) = f_0^\ell(k,x) - \int_x^\infty \tilde{A}^\ell(x,y)\, f^\ell(k,y)\,dy \quad \text{et}$$

$$f^\ell(-k,x) = f_0^\ell(-k,x) - \int_x^\infty \tilde{A}^\ell(x,y)\, f^\ell(-k,y)\,dy$$

Remplaçons $f^\ell(k,x)$ et $f^\ell(-k,x)$ dans $(\beta_{D'})$, par ces nouvelles valeurs. Il vient que

$$\delta(t-x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f^\ell(k,t)\left[f_0^\ell(k,x)\, S^\ell(k) - (-1)^\ell f_0^\ell(-k,x)\right] dk$$

$$-\int_x^\infty \tilde{A}^\ell(x,y)\,dy \times \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f^\ell(k,y)\, S^\ell(k) - (-1)^\ell f^\ell(-k,y)\right] f^\ell(k,t)\,dk}_{\delta(t-y) \text{ d'après } (\beta_{D'})}$$

La 2ème int'_ral. du second membr. Yaut

$$- \int_x^{\infty} \hat{A}^{\ell}(x,y)\,\delta(t-y)\,dy = - \hat{A}^{\ell}(x,t)$$

Pour $x > t$ $\begin{cases} A^{\ell}(s,t) = 0 \Rightarrow \hat{A}^{\ell}(x.t) = 0 \text{ et} \\ \delta(t,x) = a \quad \text{car } x \neq t \end{cases}$

Nous pouvons alors écrire

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f^{\ell}(k,t)\left[f_o^{\ell}(k,x)S^{\ell}(k)-(-1)^{\ell} f_o^{\ell}(-k,x)\right]dk = 0 \quad \text{pour } x > t \qquad (\gamma_{D'})}$$

En remplaçant $f^{\ell}(k,t)$ par sa valeur donnée au $(I_{4\,B'})$

$(\gamma_{D'})$ donne

$$o = \int_{-\infty}^{+\infty} f_o^{\ell}(k,t) f_o^{\ell}(k,x) \cdot S^{\ell}(k)dk$$

$$+ \int_t^{\infty} A^{\ell}(t,y)dy \int_{-\infty}^{+\infty} f_o^{\ell}(k,y)\, f_o^{\ell}(k,x)\, S^{\ell}(k)dk$$

$$(\delta_{D'}) \qquad -(-1)^{\ell}\int_{-\infty}^{+\infty} f_o^{\ell}(k,t) f_o^{\ell}(-k,x)dk - (-1)^{\ell}\int_t^{\infty} A^{\ell}(t,y)dy \int_{-\infty}^{+\infty} f_o^{\ell}(k,y) f_o^{\ell}(-k,x)dk$$

2°) Relation entre $f_o^{\ell}(k,x)$ et $f_o^{\ell}(-k,x)$

Rappelons que

$$j_{\ell}(kx) = \left(\frac{1}{2}\pi kx\right)^{\frac{1}{2}} J_{\ell+\frac{1}{2}}(kx)$$

$$h_{\ell}^{1}(kx) = -i\left(\frac{1}{2}\pi kx\right)^{\frac{1}{2}}\left[(-1)^{\ell} J_{-\ell-\frac{1}{2}}(kx) + i\, J_{\ell+\frac{1}{2}}(kx)\right]$$

J_ν (t) étant la fonction ordinaire de BESSEL défini par

$$J_\nu(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\nu+n+1)}$$

Par suite

$$J_\nu(-t) = \left(\frac{-t}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{-t}{2}\right)^{2n}}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\nu+n+1)}$$

$$= (-1)^\nu \, J_\nu(t)$$

De cette égalité je déduis que :

$$(S_{D'})\quad \begin{cases} J_{\ell+\frac{1}{2}}(-kx) = (-1)^\ell \sqrt{-1}\; J_{\ell+\frac{1}{2}}(kx) \text{ , et} \\ J_{-\ell-\frac{1}{2}}(-kx) = \dfrac{(-1)^\ell}{\sqrt{-1}}\; J_{-\ell-\frac{1}{2}}(kx) \end{cases}$$

on a :

$$f_0^\ell(k,x) = i^{\ell+1}\, h_\ell^1(kx) = i^\ell \left(\tfrac{1}{2}\pi kx\right)^{\frac{1}{2}} \left[(-1)^\ell J_{-\ell-\frac{1}{2}}(kx) + i\, J_{\ell+\frac{1}{2}}(kx)\right]$$

donc

$$f_0^\ell(-kx) = i^\ell \left(\tfrac{1}{2}\pi kx\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{-1} \left[(-1)^\ell J_{-\ell-\frac{1}{2}}(-kx) + i\, J_{\ell+\frac{1}{2}}(-kx)\right]$$

D'après $(S_{D'})$ il vient que :

$$f_0^\ell(-k,x) = i^\ell \left(\tfrac{1}{2}\pi kx\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{-1}} J_{-\ell-\frac{1}{2}}(kx) + i\sqrt{-1} \times (-1)^\ell J_{\ell+\frac{1}{2}}(kx)\right]$$

$$= i^\ell \left(\tfrac{1}{2}\pi kx\right)^{\frac{1}{2}} \left[(-1)^\ell J_{-\ell-\frac{1}{2}}(kx) - i\,(-1)^\ell\, J_{\ell+\frac{1}{2}}(kx)\right]$$

$$= (-1)^\ell\, i^\ell \left(\tfrac{1}{2}\pi kx\right)^{\frac{1}{2}} \left[(-1)^\ell J_{-\ell-\frac{1}{2}}(kx) - i\, J_{\ell+\frac{1}{2}}(kx)\right]$$

$$= (-1)^\ell\, i^\ell \left(\tfrac{1}{2}\pi kx\right)^{\frac{1}{2}} \left[(-1)^\ell J_{-\ell-\frac{1}{2}}(kx) + i\, J_{\ell+\frac{1}{2}}(kx)\right]$$

$$- 2\,(-1)^\ell\, i^{\ell+1} \left(\tfrac{1}{2}\pi kx\right)^{\frac{1}{2}} J_{\ell+\frac{1}{2}}(kx)$$

$$= (-1)^{\ell} \, f_o^{\ell}(k,x) - 2(-1)^{\ell} \, i^{\ell+1} \left(\frac{1}{2}\pi kx\right)^{\frac{1}{2}} J_{\ell+\frac{1}{2}}(kx) \text{ ; soit}$$

$$f_o^{\ell}(-k,x) = (-1)^{\ell} f_o^{\ell}(k,x) + L(kx) \text{ avec}$$

$$L(kx) = -2(-1)^{\ell} i^{\ell+1}\left(\frac{1}{2}\pi kx\right)^{\frac{1}{2}} J_{\ell+\frac{1}{2}}(kx) \qquad (R_{D'})$$

3°) __Etablissement de l'Equation Intégrale__ .

Remplaçons $f_o(-k,x)$ définie par $(R_{D'})$ dans l'équation $(\delta_{D'})$;

on obtient

$$o = \int_{-\infty}^{+\infty} f_o^{\ell}(k,t) f_o^{\ell}(k,x) \left[S^{\ell}(k)-1\right] dk - (-1)^{\ell} \int_{-\infty}^{+\infty} f_o^{\ell}(k,t) L(kx) dk$$

$$+ \int_t^{\infty} A^{\ell}(t,y) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_o^{\ell}(k,y) f_o^{\ell}(k,x)\left[S^{\ell}(k)-1\right] dk - (-1)^{\ell}\int_{-\infty}^{+\infty} f_o^{\ell}(k,y) L(kx) dk\right] dy$$

pour $x > t$

Posons

$$F^{\ell}(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_o^{\ell}(k,t) f_o^{\ell}(k,x)\left(S^{\ell}(k)-1\right) dk - (-1)^{\ell}\int_{-\infty}^{+\infty} f_o^{\ell}(k,t) L(kx) dk$$

On __peut écrire l'équation suivante__ :

$$F^{\ell}(t,x) + \int_t^{\infty} A^{\ell}(t,y) F^{\ell}(y,x)\, dy = 0$$

pour $x > t$ $\qquad (I_{D'})$

4°) Ca. particulier $\ell = 0$.

Montrons que $(I_{D'})$ vérifie l'équation de MARCHENKO pour $\ell = 0$. Nous avons

$$f_0^D(k,x) = i h_0^1 (kx) \text{ avec } h_0^1 (kX) = -i h_0^+ (hx) = -ie^{ikx}$$

donc $f_0^0(k,x) = -i^2 e^{ikx} = e^{ikx}$

Pour $\ell = 0$

$$L(kx) = -2i \left(\frac{1}{2}\pi kx\right)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(kX)$$

Mais

$$J_{\frac{1}{2}}(kx) = \left(\frac{2}{\pi kx}\right)^{\frac{1}{2}} \sin kx = \left(\frac{2}{\pi kx}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

$$L(kx) = -(e^{ikx} - e^{-ikx})$$

$(I_{D'})$ peut encore s'écrire

$$\frac{1}{2\pi} p^{\ell}(t,x) + \frac{1}{2\pi}\int_t^{\infty} A^{\ell}(t,y)\, F^{\ell}(y,x)\, dy = 0$$

pour $x > t$

Pour $\ell = 0$ ~~et dans~~,

$$\frac{1}{2\pi} p^0(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(t+x)} \left(S(k)-1\right)dk + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \cancel{e^{ik(t+x)}}\, dk$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(t-x)}\, dk = P(t+x) + \delta(t+x) - \delta(t-x)$$

de même

$$\frac{1}{2\pi} p^0(y,x) = P(y+x) + \delta(y+x) - \delta(y-x)$$

donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_t^{\infty} A^0(t,y)\, p^0(y,x)\, dy = \int_t^{\infty} A^0(t,y)\, P(x+y)\, dy$$

$$+ \int_t^{\infty} A^0(t,y)\,\delta(y+x)\,dy - \int_t^{\infty} A^0(t,y)\,\delta(y-x)\, dy$$

$$= \int_t^{\infty} A^{0}(t,y)\, F(x+y)\,dy + A^{0}(t,-x) - A^{0}(t,x)$$

Pour $x > t$; on $x \neq t$; d'où

$\delta(t-x) = 0$; $\delta(t+x) = 0$ car $x+t \neq 0$

$A^{0}(t,-x) = 0$ car $-x < t$

donc

$$\frac{1}{2\pi} F^{0}(t,x) + \frac{1}{2\pi}\int_t^{\infty} A^{0}(t,y).\, F^{0}(y,x)\,dy$$

$$= F(y+x) + \int_t^{\infty} A^{0}(t,y)\, F(x+y)\,dy - A^{0}(t,x) = 0$$

Nous retrouvons ainsi l'équation de MARCHENKO lorsque $\ell = 0$

E' COMMBNTAIRBS .

1°) MARCHENKO a établi une équation intégrale non homogène • L'équation généralisée que j'al obtenu .at une équation intégrale homogène.

2°) $F^{\ell}(t,x)$ eat blen définie lor.que la fonotion de ph••• $S^{\ell}(k)$ ••t eeeeue,

Si dono $S^{\ell}(k)$ eat donaée. $(I_{D'})$ se présente oomme une équation intégrale où l'inoonnue .at $A^{\ell}(t,x)$

3°) A priori je ne peux pas conclure que $(I_{D'})$ admet une aolution. $A^{\ell}(t,x)$; mai. ceci ne t.it pas l'objet cle mon exposé qui • aon.laté à établir une équation intégrale généralisée de MARCHENKO et à faire une extention de sa méthode.

4°) Si $(I_{D'})$ admet une 801utlon $A^{\ell}(t,x)$; le potentiol $V(x)$ aura pour valeur

$$V(x) = -2\,\frac{dA^{\ell}(x,x)}{dx}$$

,

REPERENCES

1 FRØDBERG CB (1941) Phya Rev. 72, 619.

2 LEVINSON (1949) Kgl Danak Viden.kab. Belakab Mat.Fys. Medd 25 ft0 9.

3 JOST et KOHN (1953) Kgl DBbilk Videnakab. Se18kab Mat. Fye, Medd, 21 n° 29.

4 NEWTON a,O, (1955) Phys. Rev. 100, 412.

FADDEYLO L.D (1959) USPEKI. Matem, NBUk 14;II;57 1 English TrBnalatlon J. Mat-Phys 4,72(1983),

6 POTENTIAL SCATTERING PAR ALFARO et REGGE (1965)

7 AGRONOVITCH et MARCHENKO - The lavera. Problem (1968>,

8 BIB8R-MAOY _ Analya. - Ponotionnelle.

9 VALIRON _ Théorie de. Fonction••

00000