

THESE de DOCTORAT de l'UNIVERSITE PARIS 6

Spécialité :

MECANIQUE

présentée

par : Monsieur ADOU Kablan Jérôme

pour obtenir le titre de DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS 6

Sujet de la thèse :

ETUDE DU FONCTIONNEMENT DYNAMIQUE DES
REGULATEURS-DETENDEURS
INDUSTRIELS DE GAZ.

soutenue le : 18 décembre 1989

devant le jury composé de :

Mr	J.L. PEUBE	Président - Rapporteur
Mr	J.S. DARROZES	Rapporteur
Mme	R. DROUOT	} Examineurs
Mr	F. DENEUVE	
Mr	J.P. GUIRAUD	
Mr	F. FAVRET	Invité

Il y a donc deux sortes d'esprit : l'une de pénétrer vivement et profondément les conséquences des principes, et c'est là l'esprit de justesse ; l'autre de comprendre un grand nombre de principes sans les confondre et c'est là l'esprit de géométrie.

L'une est force et droiture d'esprit, l'autre est amplitude d'esprit.

Or, l'un peut bien être sans l'autre, l'esprit pouvant être fort et étroit et pouvant être aussi ample et faible

Blaise PASCAL (Pensées)

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur J.P. GUIRAUD, Professeur à l'Université Paris VI, d'avoir bien voulu diriger ces travaux de recherches. Sa grande compétence scientifique, ses précieux conseils et encouragements m'ont permis de mener à bien ce travail.

Je remercie Monsieur J.L. PEUBE, Professeur à l'Université de Poitiers, d'honorer de sa présence cette soutenance et d'avoir accepté le rôle de rapporteur.

Monsieur J.S. DARROZES, Professeur à l'Université Paris VI, qui m'a initié aux méthodes de techniques asymptotiques de modélisation, me fait un grand honneur en acceptant de participer au jury et de porter un jugement à ce travail.

Qu'il me soit permis de remercier tous les membres du Laboratoire de Modélisation en Mécanique à travers Madame R. DROUOT, Maître de conférences à l'Université Paris VI. Je suis très heureux de sa présence dans ce jury.

Monsieur F. DENEUVE, Chef du Service Métrologie et Matériels de réseaux du Gaz de France et Monsieur F. FAVRET, Ingénieur chercheur du Gaz de France, ont, par leur présence continuelle à nos côtés dans le cadre du projet détenteur, su trouver à chaque fois les éléments de motivation nécessaires pour que ce travail avance. En acceptant de faire partie du jury, ils prouvent une fois de plus tout l'intérêt qu'ils portent à ce projet. Qu'ils en soient remerciés.

Je ne saurais terminer sans remercier tout le personnel du Service Métrologie et Matériels de réseaux du Gaz de France qui, par son accueil, m'a permis de mener ce travail dans de bonnes conditions. J'exprime en particulier toute ma reconnaissance à l'équipe du projet détenteur, à savoir :

Monsieur B. LE JAN, Ingénieur chercheur au Gaz de France, auprès de qui j'ai toujours trouvé accueil et bienveillance.

Monsieur J.Ph. CORNIL, Ingénieur, "bibliothèque ambulante" du Gaz de France. Sa parfaite connaissance des différents problèmes du terrain, nous a permis d'orienter ce travail et de lui donner un contenu pratique.

Monsieur A. DEBAILLEUL, Technicien au Gaz de France, grâce à qui nous avons pu effectuer toute la partie expérimentale.

Bonne chance à Monsieur M. JEMMALI et merci pour sa précieuse collaboration.

Je remercie enfin Monsieur B. DUMONT du Bureau d'études et Madame M. GAUVIN qui a frappé avec amabilité et gentillesse ce mémoire.

RESUME

Le régulateur-détendeur est un appareil placé sur le réseau de distribution du gaz, dont la fonction est d'une part d'abaisser le niveau de pression et d'autre part de maintenir ce niveau de pression à une valeur dite de consigne. Des instabilités de fonctionnement des régulateurs-détendeurs se manifestent parfois sur les réseaux. Afin d'étudier ces mécanismes d'instabilité, un modèle mathématique a été mis en place. Celui-ci, constitué de huit équations différentielles à huit inconnues, dont deux du second ordre, fait intervenir, après écriture sous forme canonique (c'est-à-dire élimination classique des dérivées secondes), une matrice carrée 10×10 caractérisant la partie linéaire, une matrice colonne d'ordre 10 dont les composantes sont des fonctions fondamentalement non linéaires, et une matrice colonne caractérisant l'excitation. Une démarche, consistant à linéariser abusivement les fonctions non linéaires, nous a permis de mettre en place un système, dit linéaire, afin de pouvoir nous servir de la théorie de la stabilité linéaire. Une étape décisive, a été la validation des modèles linéaire et non linéaire. Pour cela, après avoir retenu un appareil déterminé, et effectué des essais expérimentaux sur celui-ci, la méthode d'identification paramétrique nous a permis d'estimer les valeurs de certains paramètres assez mal connus, afin de réaliser au mieux une adéquation entre le comportement réel de l'appareil et le modèle mathématique. Après réduction du système linéaire grâce à une analyse phénoménologique, nous avons étudié, d'une part l'influence des différents paramètres sur la stabilité, d'autre part le domaine de l'espace des paramètres permettant un fonctionnement stable. Ces différentes analyses, confortées par une série de simulation numérique, ont été confirmées par des essais expérimentaux. Elles rendent compte, entre autres, de certaines observations effectuées par les professionnels du gaz. En appliquant la méthode de Liapunoff au système non linéaire, nous avons défini une notion originale de stabilité adaptée au cas des régulateurs-détendeurs. Cette définition consiste à dire que si l'excitation vérifie une certaine condition, alors les diverses inconnues du système resteront dans un certain domaine que l'on peut spécifier à l'avance. Une application par simulation numérique du système non linéaire, nous a permis de vérifier que cette notion de stabilité non linéaire est bien adaptée au comportement des régulateurs-détendeurs.

ABSTRACT

The pressure reducer is a device which is installed on a gas network to lower the pressure and control it, so that it is kept close to a given value. Under some circumstances, pressure reducers can have unsteady behaviours. In order to study these unsteady phenomena, a mathematical model has been set up. This model, based upon eight differential equations (two of them being of second order) with eight unknowns, uses (after the classical elimination of second order derivatives) a 10×10 square matrix related to the linear part, a single column matrix of 10 elements related to the non-linear functions and a single column matrix related to the excitation of the system.

A first task - consisting in linearizing roughly the non-linear functions - has made us able to set up a so called linear model using the theory of linear stability.

Validating the linear and non-linear models was then a crucial step. For that purpose, a given pressure reducer was chosen and extensively tested experimentally. A parametric identification method was then applied to those data in order to assess some unknown coefficients, so that the mathematical model best matches the real behaviour of the pressure reducer.

The linear system was simplified through a phenomenological analysis. We studied then on one hand the influence of various parameters on the system stability, on the other hand the domain in parameters space inside which the system is stable.

Those various analysis, backed up with numerical simulations, were found in agreement with experimental test results and professional experience.

Applying Liapunoff's method to the non-linear system, we defined an original notion of stability suited to pressure reducers : if the excitation matches a given condition, the various unknowns of the system must then stay inside a given domain that can be specified.

The validity of this notion of non-linear stability was checked by a numerical simulation of the non-linear system.

T A B L E D E S M A T I E R E S

I - <u>INTRODUCTION</u>	4
I.1 - <u>POSITION DU PROBLEME</u>	4
I.2 - <u>DESCRIPTION DE L'APPAREIL</u>	8
II - <u>MODELISATION</u>	10
II.1 - <u>MODELE</u>	10
II.2 - <u>RAPPELS SUR LES ECOULEMENTS DE FLUIDE FORMULES DE DEBIT</u>	14
II.3 - <u>CONVENTIONS, NOTATIONS ET HYPOTHESES</u>	17
II.4 - <u>EQUATIONS DU SYSTEME</u>	21
II.4.1 - <u>EQUATION DE LA DYNAMIQUE POUR LE MOUVEMENT DE L'EQUIPAGE MOBILE DU PILOTE</u>	21
II.4.2 - <u>EQUATION DE LA DYNAMIQUE POUR LE MOUVEMENT DE L'EQUIPAGE MOBILE DU DETENDEUR PRINCIPAL</u>	23
II.4.3 - <u>MODELISATION DE LA VARIATION DE L'ETAT DU GAZ DANS LA CHAMBRE SUPERIEURE DU PILOTE</u>	23
II.4.4 - <u>MODELISATION DE LA VARIATION DE L'ETAT DU GAZ DANS LA CHAMBRE INFERIEURE DU PILOTE</u>	26
II.4.5 - <u>MODELISATION DE LA VARIATION DE L'ETAT DU GAZ DANS LA CHAMBRE SUPERIEURE DU DETENDEUR PRINCIPAL</u>	28
II.4.6 - <u>MODELISATION DE LA VARIATION DE L'ETAT DU GAZ DANS LA CHAMBRE INFERIEURE DU DETENDEUR PRINCIPAL</u>	30
II.4.7 - <u>MODELISATION DE LA VARIATION DE L'ETAT DU GAZ DANS LE VOLUME COMPRIS ENTRE LA VANNE D'AMORTISSEMENT V_{A2} ET LA VANNE DE FUITE V_{A3}</u>	32
II.4.8 - <u>MODELISATION DE LA VARIATION DE L'ETAT DU GAZ DANS LE VOLUME AVAL</u>	34

II.5 - <u>LINEARISATION DU SYSTEME</u>	36
II.5.1 - <u>INDETERMINATION ET METHODE DE LA SECANTE</u>	36
II.5.2 - <u>ETUDE DES EQUATIONS</u>	39
II.5.2.1 - Equation linéaire de la dynamique pour le mouvement de l'équipage mobile du pilote	39
II.5.2.2 - Equation linéaire de la dynamique pour le mouvement de l'équipage mobile du détenteur principal	40
II.5.2.3 - Equation linéaire traduisant la variation de l'état du gaz dans la chambre supérieure du pilote	41
II.5.2.4 - Equation linéaire traduisant la variation de l'état du gaz dans la chambre inférieure du pilote	42
II.5.2.5 - Equation linéaire traduisant la variation de l'état du gaz dans la chambre supérieure du détenteur principal	43
II.5.2.6 - Equation linéaire traduisant la variation de l'état du gaz dans la chambre inférieure du détenteur principal	44
II.5.2.7 - Equation linéaire traduisant la variation de l'état du gaz dans le volume compris entre la vanne d'amortissement et la vanne de fuite	45
II.5.2.8 - Equation linéaire traduisant la variation de l'état du gaz dans le volume aval	47
II.6 - <u>PRESENTATION DU SYSTEME LINEAIRE</u>	50
III - <u>APPLICATION A UN CAS PARTICULIER DE DETENDEUR</u>	54
III.0 - <u>INTRODUCTION</u>	54
III.0.1 - <u>PRESENTATION DU REGULATEUR PILOTE FRANCEL BP</u>	54

III.0.2 - <u>ESSAIS EN STATIQUE</u>	55
III.0.2.1 - Raideur du ressort pilote et du ressort principal	55
III.0.2.2 - Loi d'ouverture du clapet principal	56
III.0.2.3 - Mesure des pertes de charge	57
III.0.2.4 - Etude de la vanne de décharge	61
III.0.2.5 - Différentes valeurs caractéristiques du FRANCEL BP	62
III.1 - <u>ETUDE DU SYSTEME LINEAIRE</u>	63
III.1.0 - <u>RAPPEL SUR LA THEORIE DE LA STABILITE LINEAIRE</u>	63
III.1.1 - <u>PRESENTATION DU POLYNOME CARACTERISTIQUE ET ETUDE DE LA STABILITE DU SYSTEME LINEAIRE</u>	79
III.1.2 - <u>INFLUENCE DES DIFFERENTS PARAMETRES SUR LA STABILITE DU SYSTEME LINEAIRE</u>	81
III.1.2.1 - Effets de frottements visqueux	81
III.1.2.2 - Raideur des ressorts pilote et détenteur principal	84
III.1.2.3 - Section de la membrane pilote et de la membrane du servomoteur principal	86
III.1.2.4 - Perte de charge des prises d'influence	87
III.1.2.5 - Vanne d'amortissement V_{a2}	90
III.1.2.6 - Vanne de fuite V_{a3}	91
III.1.2.7 - Débit nominal	93
III.1.2.8 - Influence de la forme du clapet principal	93
III.1.2.9 - Influence du volume aval	96

III.1.3 - <u>ESSAIS EN DYNAMIQUE</u>	98
III.1.3.1 - Introduction	98
III.1.3.2 - Présentation du banc d'essais	98
III.1.3.3 - Analyse de quelques résultats d'essais	100
III.1.3.4 - Influence de la position du servomoteur	104
III.1.3.5 - Influence du débit nominal	105
III.1.3.6 - Essai de mise en vibration	107
III.1.3.7 - Influence du volume aval	109
III.1.4 - <u>IDENTIFICATION DU SYSTEME LINEAIRE</u>	113
III.1.4.1 - But de l'identification	113
III.1.4.2 - Méthode d'identification paramétrique	113
III.1.4.3 - Identification	119
III.1.5 - <u>SIMULATION DU SYSTEME LINEAIRE</u>	126
III.1.5.1 - Introduction	126
III.1.5.2 - Résultats d'un test de simulation	126
III.1.5.3 - Influence du volume aval	130
III.1.5.4 - Influence du débit nominal	132
III.1.5.5 - Influence de la forme du clapet	133
III.1.5.6 - Influence de vanne d'amortissement V_{a2}	135
III.1.6 - <u>REDUCTION DU SYSTEME, ETUDE DU DOMAINE DE STABILITE</u>	137
III.1.6.0 - Présentation du système linéaire adimensionnalisé	137
III.1.6.1 - Justification mathématique de la réduction	141
III.1.6.2 - Etude du système réduit	145
III.1.6.3 - Etude du domaine de l'espace des paramètres pour lequel le modèle est stable	155

III.2 - <u>IDENTIFICATION DU SYSTEME NON LINEAIRE</u>	159
III.2.1 - <u>INTRODUCTION</u>	159
III.2.2 - <u>METHODE D'IDENTIFICATION NON LINEAIRE</u>	159
III.2.3 - <u>IDENTIFICATION</u>	164
IV - <u>ETUDE DE LA NON LINEARITE EN RACINE CARREE</u>	168
IV.1 - <u>POSITION DU PROBLEME</u>	168
IV.2 - <u>EQUATIONS DU SYSTEMES EN TENANT COMPTE DES FONCTIONS NON LINEAIRES</u>	168
IV.2.1 - <u>ETUDE DU SYSTEME D'EQUATIONS</u>	171
IV.2.2 - <u>CAS OU LA MATRICE A A TOUTES SES VALEURS PROPRES A PARTIE REELLE NEGATIVE</u>	177
IV.2.3 - <u>CAS OU LA MATRICE A N'A PAS TOUTES SES VALEURS PROPRES A PARTIE REELLE NEGATIVE</u>	181
IV.3 - <u>ETUDE DU CAS DU DETENDEUR</u>	190
IV.3.1 - <u>ANALYSE PHENOMENOLOGIQUE ET REDUCTION DU SYSTEME</u>	190
IV.3.2 - <u>ETUDE DE LA STABILITE</u>	195
IV.4 - <u>CONCLUSION RELATIVE A LA NOTION DE SABILITE GLOBALE</u>	203
V - <u>CONCLUSION</u>	204

HISTORIQUE

Initialement, le gaz dans les différents réseaux de distribution était du gaz manufacturé. Celui-ci était fabriqué dans les usines, à basse pression, puis stocké dans des gazomètres à une pression se situant entre la dizaine et la trentaine de millibars. Avant d'être livré aux utilisateurs, ce gaz subissait à l'émission des usines, une détente du niveau de pression. Ces détentes s'effectuaient à l'aide des détendeurs à poids, c'est à dire dont la force de tarage était due à une masse. Ces premiers détendeurs étaient assez encombrants compte tenu de leur faible taux de détente.

Avec l'accroissement de la consommation en gaz, il a fallu acheminer le gaz sur des distances de plus en plus longues. D'où l'introduction de réseaux dits de répartition, en parallèle aux réseaux de distribution. Ces réseaux de répartition, transportaient du gaz sous moyenne pression, c'est à dire se situant au voisinage de la centaine de millibars. A l'interface entre ces réseaux de répartition (ayant une pression de l'ordre de la centaine de millibars) et ces réseaux de distribution (ayant une pression de l'ordre de la dizaine de millibars), il a fallu introduire des détendeurs plus performants. Les premiers détendeurs furent donc adaptés aux nouvelles nécessités et on assista à l'introduction des régulateurs à ressort.

La notion de pilotage est apparue de façon indirecte. Compte tenu du taux de fuite important de certains réseaux, il s'est avéré nécessaire de moduler la pression en fonction des heures de fortes et faibles consommations. Cette modulation de pression s'est effectuée grâce à un système de pilotage dont la fonction n'était pas celle de régulation mais plutôt d'automatisation de la surcharge horaire. Il a fallu dès lors, passer d'un système à poids à un système pneumatique commandé par une horloge.

Avec la découverte du gaz naturel, les niveaux de pression dans les réseaux ont à nouveau augmenté, et on assista à l'introduction des réseaux haute pression (de l'ordre de 60 bars). Ceci entraîna une augmentation des niveaux de variations de pression. Il a fallu, à nouveau, réadapter les détendeurs. On assista alors, à la cohabitation de deux techniques :

.../...

- la technique des régulateurs à poids, qu'il a fallu adapter aux nouvelles exigences. Ainsi, on a soit réduit les sections de clapet pour palier les problèmes d'instabilité liés à l'augmentation de pression, soit adapté la pression du réseau de façon à pouvoir utiliser les appareils déjà existants.

- la technique des régulateurs à ressort, qu'il a fallu adapter pour des problèmes d'instabilité.

Dans tous les cas, et surtout du fait des fortes variations de pression sur ces nouveaux réseaux, l'utilisation des régulateurs à poids ou à ressort s'est avérée insatisfaisante. Il a fallu introduire des nouveaux régulateurs dits de type piloté. Ceux-ci avaient la particularité de posséder un système de relais pneumatique amplificateur permettant d'utiliser toute la dynamique de l'appareil, et avaient l'avantage d'avoir un système de pilotage automatique asservi à la pression aval.

Les différentes évolutions de ces appareils se sont faites, il faut bien le dire, de façon relativement empirique puisque basées essentiellement sur une conduite à vue effectuée en fonction des nouvelles nécessités et des performances des appareils précédents.

Dans certaines configurations, des instabilités de fonctionnement des régulateurs se manifestent parfois sur les réseaux avec des conséquences néfastes. Les interventions sur le terrain en vue de remédier à ces défauts de stabilité, se font alors de façon empiriques.

Le Gaz De France, grand utilisateur de ce type de matériels, et qui par l'intermédiaire du Service Métrologie et Matériels de Réseaux suit l'évolution de ces appareils, a senti la nécessité de lancer un programme de recherches, en vue de mieux comprendre leur dynamique et d'expliquer les divers mécanismes d'instabilité.

.../...

Ce programme de recherches, qui associe le Laboratoire de Modélisation en Mécanique de l'Université Paris VI à la Direction des Etudes et Techniques Nouvelles du Gaz De France, allie une motivation technologique très directe à des études destinées à comprendre des mécanismes fondamentaux. Tout progrès réel en vue de mieux maîtriser le fonctionnement de cet appareil, passe par une analyse scientifique des mécanismes élémentaires, qui sont schématisés de manière simple dans la construction d'un modèle global que nous nous proposons de mettre en place.

I - INTRODUCTION

I.1 - POSITION DU PROBLEME

Pour des raisons économiques, le gaz est d'une façon générale, transporté sous haute pression. Cependant, avant d'être livré à l'utilisateur, il subit des détentes successives à l'aide de certains appareils dont l'étude fait l'objet du présent travail. Ces appareils sont appelés régulateurs-détendeurs en raison de leurs deux fonctions principales qui sont, d'une part d'abaisser le niveau de pression entre deux parties du réseau de distribution, d'autre part d'assurer une régulation du niveau de pression dans celle des deux parties du réseau, appelée réseau aval, où la pression est la plus faible. L'objectif ultime est de faire en sorte que dans le réseau basse pression (qui est aussi le réseau aval dans le sens de l'écoulement du gaz) la pression s'écarte aussi faiblement que possible d'une pression imposée, dite pression de consigne.

Ces appareils, actuellement en place sur les réseaux de distribution du Gaz de France, sont le résultat d'une lente évolution d'appareils au départ peu performants, adaptés progressivement de manière à se rapprocher au mieux des nécessités technico-économiques, suivant un processus de mises au point successives à caractère relativement empirique.

Des instabilités de fonctionnement des régulateurs-détendeurs se manifestent parfois sur les réseaux de distribution. Ces instabilités ont des conséquences néfastes pouvant conduire à des risques importants pour les installations et les usagers comme :

- La mise en pompage de l'ensemble du réseau.
- La détérioration du régulateur-détendeur.
- Une anomalie de comptage.

.../...

- Un écart entre la pression du réseau aval et la pression de consigne.

Le but qui nous avait été assigné en commençant le travail, qui a mené au mémoire présenté ici, était de construire un modèle mathématique, en vue de le soumettre à la simulation numérique et à une étude de stabilité. Ce modèle devait être assez élaboré pour prendre en compte les phénomènes essentiels agissant sur le fonctionnement des régulateurs-détendeurs, il devait néanmoins rester assez simple pour permettre de remédier aux défauts de stabilité de ces appareils et plus généralement de définir des critères de choix des caractéristiques des matériels et des protocoles d'installation et de réglage.

Pour cela, la première étape de cette étude a consisté à construire un modèle mathématique constitué par un système d'équations différentielles ordinaires décrivant les lois du mouvement des équipages mobiles et les lois de la variation de l'état du gaz dans les diverses chambres de l'appareil. Cette étude, qui fait l'objet du chapitre II, nous a conduit à un système différentiel du premier ordre de dix équations à dix inconnues (après élimination classique des dérivées secondes). Soit :

$$(1) \quad \dot{U} = G(U) + E(t),$$

où :

* $E(t)$ représente la matrice colonne dont les composantes, fonctions connues du temps, caractérisent l'excitation du système, en dehors du régime permanent.

* $U(t)$ représente la matrice colonne dont les composantes sont les fonctions inconnues qui décrivent l'état instantané du système.

Afin de pouvoir utiliser tout l'arsenal de la théorie de la stabilité linéaire, nous avons, au § II.5, appliqué la méthode classique de linéarisation en considérant que les diverses quantités (débits, déplacements, efforts de pression) subissent des petites perturbations chacune autour d'une valeur dite de régime permanent.

.../...

A ce stade, on s'est rendu compte que, de par la nature du régulateur-détendeur, tous les débits correspondant à certains organes sont nuls en régime permanent. En raison de la nature de ces lois de débit cette observation a pour conséquence, comme on l'a vu, que ces lois ne sont pas linéarisables par quelque artifice que ce soit. Tant et si bien, qu'en première approximation, le système (1) peut se mettre sous la forme :

$$(2) \quad \Delta \dot{U} = A \Delta U + F(\Delta U) + E(t),$$

où :

* A est la matrice dont les composantes caractérisent le fonctionnement des organes à caractéristiques linéaires.

* F(ΔU) est la matrice colonne dont les composantes sont des fonctions non linéarisables caractérisant les débits correspondant à certains organes.

Cependant, afin d'avoir un système entièrement linéarisé et de pouvoir utiliser toute la théorie de la stabilité linéaire, nous avons, au § II.5.1, procédé à une linéarisation ad'hoc, en remplaçant F(ΔU_0) par B. ΔU_0 où ΔU_0 désigne une valeur moyenne estimée pour ΔU , dans la plage de fonctionnement et B une matrice carrée dépendant du choix de ΔU_0 .

Après avoir construit par voie déductive, les deux modèles respectivement non linéaire et linéaire représentant le fonctionnement dynamique de l'appareil, une étape décisive dans notre recherche a été la validation des modèles. La réalisation effective de celle-ci ne pouvait se faire que sur un appareil bien déterminé. Ainsi, après avoir retenu un appareil, une série d'essais en statique (au § III.0.2) nous a permis d'affecter des valeurs aux paramètres du système.

Il est à signaler que certains de ces paramètres étaient connus avec beaucoup d'incertitude.

Toujours est il qu'avec les différentes valeurs des paramètres, nous avons au § III.1.1 et III.1.2 effectué une étude de la stabilité linéaire. Cette étude a mis en évidence, l'existence de deux couples de valeurs propres complexes conjuguées deux à deux susceptibles de déstabiliser le système. Une, dont la fréquence est de l'ordre du hertz rend compte de ce que les professionnels du gaz appellent "pompage", tandis que l'autre dont la fréquence est de l'ordre de la dizaine de hertz est appelée "vibration".

.../...

La validation proprement dite du modèle, s'est effectuée après l'identification. Celle-ci a consisté, après une série d'essais en dynamique (§ III.1.3), à déterminer les valeurs des paramètres mal connus, afin de réaliser aux mieux l'adéquation entre le comportement réel du système, observé lors de la campagne d'essais, et le comportement du système différentiel décrivant le modèle mathématique. Les paragraphes III.1.4 et III.2, décrivent la mise en oeuvre des méthodes d'identification linéaire et non linéaire. Après analyse phénoménologique et réduction du système au § III.1.6, une étude de l'influence des paramètres significatifs sur la stabilité nous a permis de définir le domaine de l'espace des paramètres pour lequel le modèle est stable.

Le chapitre IV a consisté à étudier la stabilité du système non linéaire (2). En appliquant la méthode de Liapunoff, nous avons défini une notion de stabilité, adaptée au cas des régulateurs-détendeurs, à savoir que si l'excitation vérifie une certaine condition alors la réponse vérifie :

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \{ U^T(t) \cdot M \cdot U(t) \} \leq C,$$

où C est une constante positive que l'on peut donner arbitrairement et M une matrice symétrique définie positive dont le choix qui comporte un assez large degré d'arbitraire dépend du poids que l'on veut donner aux composantes de U(t). Cela signifie en clair, que si l'excitation vérifie une certaine condition, alors les diverses inconnues du système resteront dans un domaine que l'on peut enfermer dans un domaine que l'on peut spécifier à l'avance.

.../...

I.2 - DESCRIPTION DE L'APPAREIL

Il existe deux types de régulateurs :

- Les régulateurs à action directe dont le fonctionnement est le plus simple. La pression aval agit sous la membrane du servomoteur et équilibre la force du ressort de tarage. Si le débit augmente (resp. diminue), la pression aval tend à baisser (resp. augmenter). Le ressort fait alors ouvrir (resp. fermer) le clapet par l'intermédiaire d'une tige de levier.

- Les régulateurs pilotés (voir figure I.2.1) qui font l'objet de ce mémoire. Ce sont des appareils de conception beaucoup plus complexe qui utilisent à la place du ressort de tarage le gaz lui-même comme fluide moteur. Celui-ci est prélevé sur la capacité amont (1) et est stabilisé en pression intermédiaire par un prédétendeur (2) (qui est un régulateur à action directe). La modulation de pression du fluide moteur vers le servomoteur (3) est réalisée par le jeu du clapet pilote (4) dont l'ouverture est directement commandée par la membrane d'impulsion (5) et un orifice de rejet (6). Le clapet principal (7) est directement commandé par la pression de gaz moteur agissant sous la membrane principale du servomoteur (8). Ainsi, à tout mouvement du clapet pilote consécutif à une variation de la pression aval (9) et entraînant une modification de la pression motrice, correspond une correction de la position du clapet principal donc de la pression aval.

.../...

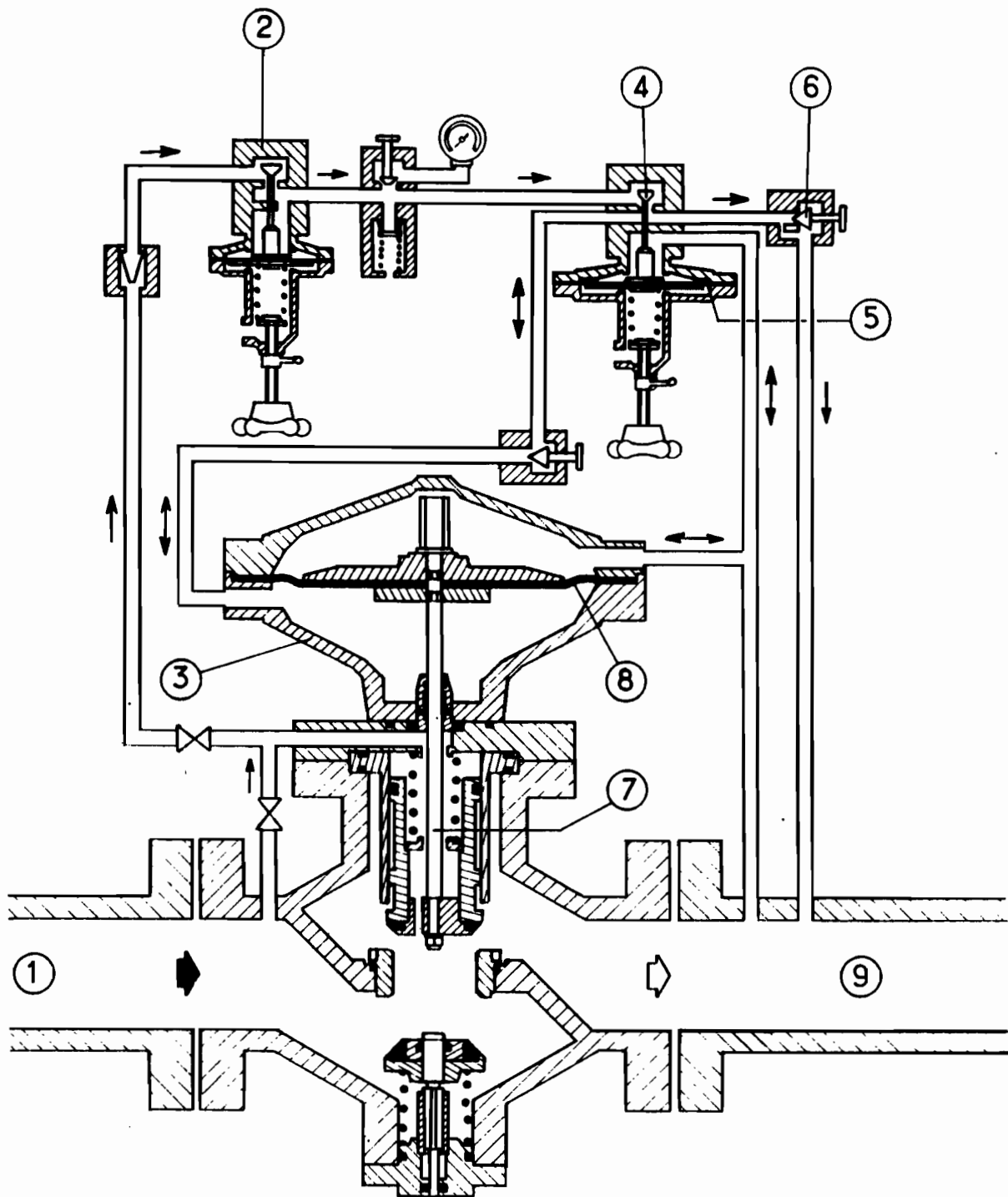


Figure I. 2.1 : Schéma d'un régulateur piloté

II - MODELISATION

II.1 - MODELE

D'une façon générale, on retrouve quels que soient les appareils, trois modules principaux sur les régulateurs-détendeurs de type piloté. Ces modules sont :

- le prédétendeur,
- le pilote,
- le détendeur principal.

Ces trois éléments sont représentés sur la figure II.1.1.

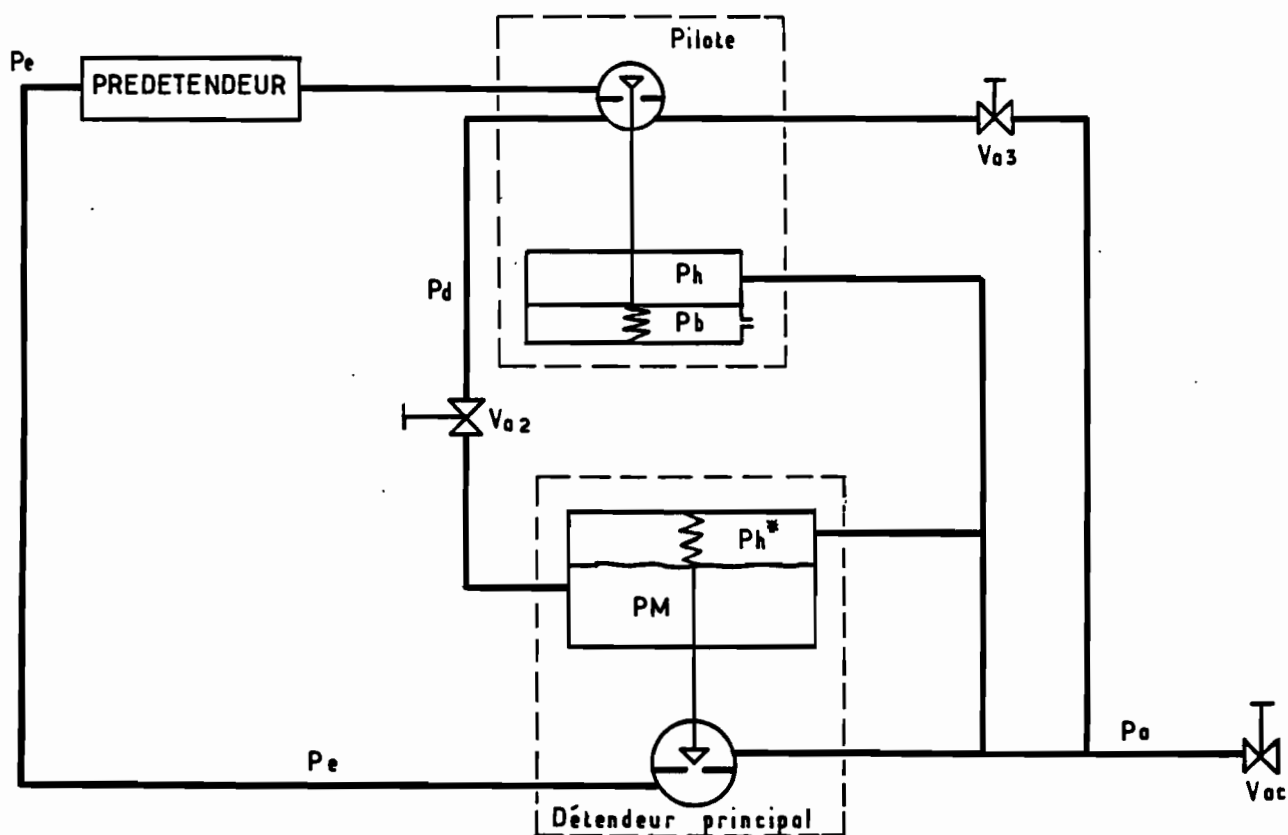


Figure II.1.1. SCHEMA D'UN REGULATEUR PILOTE

La figure 2.a - b - c représente chacun des éléments de manière schématique. Une représentation détaillée d'un appareil réel est donnée en annexe 1.

Le modèle prend en compte chacun de ces trois modules et en outre un volume aval représenté par un morceau de canalisation obturée, partiellement, par une vanne dite de laminage, qui permet tant dans le modèle que dans les essais, de contrôler le débit appelé. La figure 3 représente un schéma du modèle. Dans la réalité, un régulateur-détendeur est souvent raccordé à une canalisation servant d'alimentation à tout un réseau de distribution. Une modélisation complète devrait prendre en compte l'effet des divers appels de débit enregistrés sur tout ce réseau aval. Un tel raffinement est impossible et n'est même pas souhaitable à notre niveau. Le modèle en prend compte en considérant que, par le jeu de la vanne de laminage, on peut régler le débit sortant du volume aval, de manière à le prescrire selon une loi horaire.

Dans un souci analogue de simplification nous avons supposé, dans l'établissement du présent modèle, que la pression délivrée par le prédétendeur, qui est un régulateur à action directe, est indépendante du temps. Mais ceci n'est pas une restriction contraignante dans la mesure où l'on pourra considérer comme fonction de perturbation, la pression délivrée par le prédétendeur au cas où celle-ci serait dépendante du temps.

En définitive, les fonctions de perturbation du présent modèle sont :

- la variation de la pression d'entrée,
- la variation de l'ouverture de la vanne de laminage en sortie de ce que nous appelons volume aval.

.../...

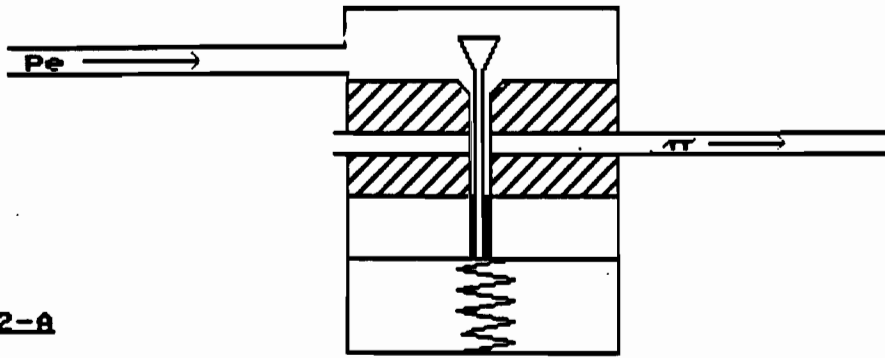
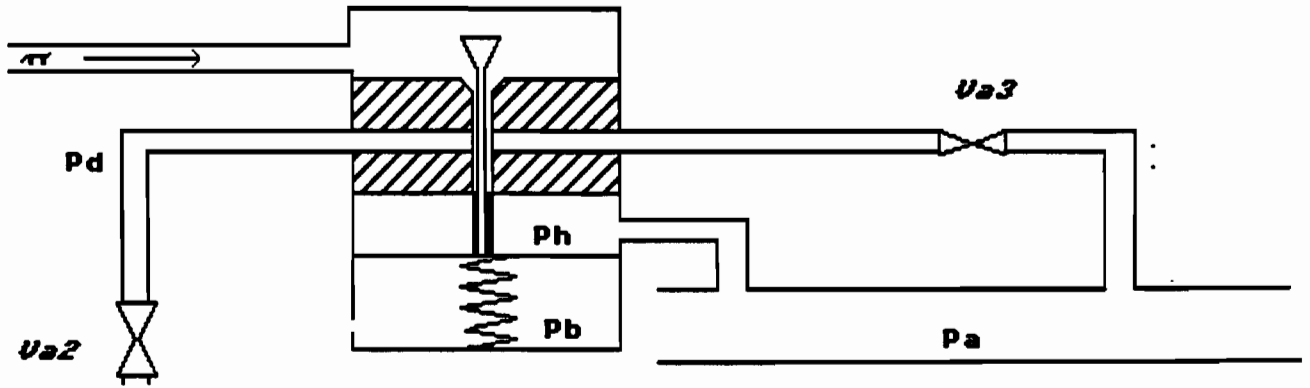


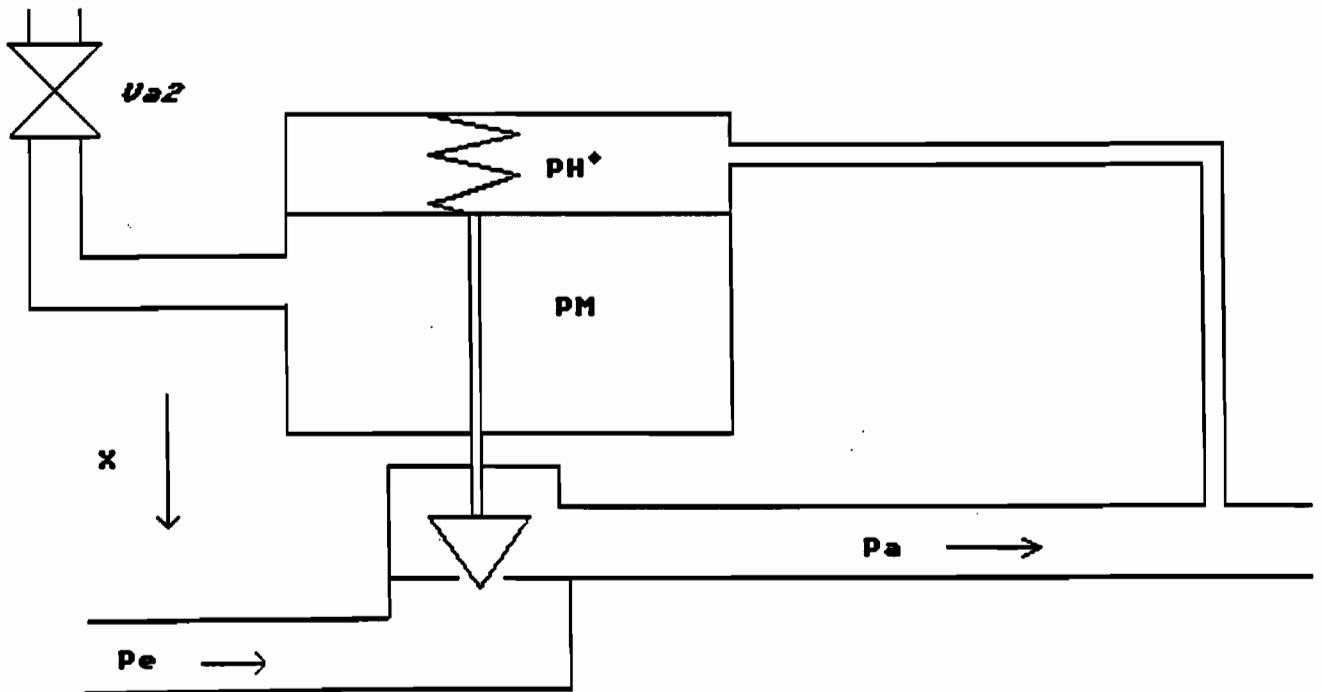
FIGURE 2-A

SCHEMA DE PRINCIPE DU PREDETENDEUR



SCHEMA DE PRINCIPE DU PILOTE

FIGURE 2-B



SCHEMA DE PRINCIPE DU DETENDEUR PRINCIPAL

FIGURE 2-C

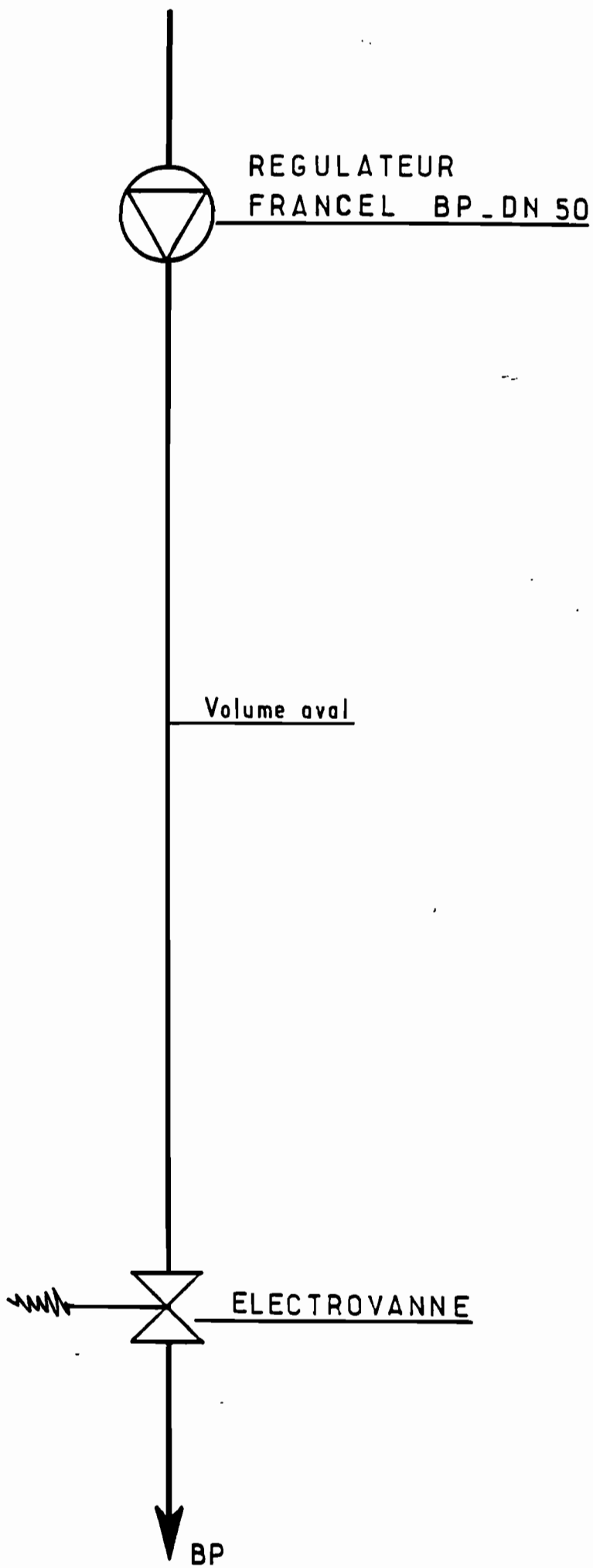


figure 3 Schéma du modèle

II.2 - RAPPELS SUR LES ECOULEMENTS DE FLUIDE ; FORMULE DE DEBIT

Nous nous proposons dans ce présent paragraphe, de rappeler quelques formules que nous aurons à utiliser dans la modélisation. Nous nous sommes restreints au cas d'un orifice. Mais l'on retrouve des formules analogues tant pour une tuyère convergente que pour une tuyère convergente-divergente. Pour de plus amples informations, l'on pourra se reporter à [14].

Nous supposons que le gaz est un fluide parfait, plus exactement un gaz parfait à chaleurs spécifiques constantes, que le régime permanent est établi et que dans toute section courante S les variables de l'écoulement à savoir la vitesse V , la pression P , la masse volumique ρ et la température T sont constantes. On supposera également négligeables, les forces volumiques extérieures.

On a d'après le théorème de Bernouilli :

$$(1) \quad \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[\frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2} \right] . . .$$

Si l'indice 1 définit l'indice de l'état générateur, c'est-à-dire l'état correspondant aux variables thermodynamiques qui sont telles que le fluide est au repos ($v_1 = 0$), en tenant compte du fait que la détente est adiabatique c'est-à-dire que :

$$(2) \quad P_1 = \alpha_1 \times \rho_1^\gamma \quad \text{et} \quad P_2 = \alpha_2 \times \rho_2^\gamma \quad (\alpha_1 \text{ et } \alpha_2 \text{ sont des constantes),}$$

on a

$$(3) \quad v_2 = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{P_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} .$$

Le débit massique de la canalisation dans une section courante S sera :

$$q = \rho v S = \rho S \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} \left[1 - \left(\frac{P}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} .$$

Comme $\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^\gamma = \frac{P}{P_1}$ [à cause de (2)]

on a l'expression suivante du débit :

$$(4) \quad q = \left(\frac{P}{P_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \rho_1 S \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{P_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{P}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}$$

Considérons la fonction $y = f\left(\frac{P}{P_1}\right)$ définie comme suit :

$$y = \left(\frac{P}{P_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1 - \left(\frac{P}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

Tenant compte de l'équation de continuité, si on maintient constantes les grandeurs génératrices, on constate que la fonction y passe par un maximum pour une valeur critique P_c de la pression telle que :

$$(5) \quad P_c = P_1 \left[\frac{2}{\gamma+1} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Pour une telle pression, la vitesse du fluide dans la section la plus étroite c'est-à-dire au col (correspondant au maximum de y), est égale à la vitesse du son.

$$(6) \quad v_c = \sqrt{\gamma \frac{P_c}{\rho_c}}$$

Nous allons établir à partir des formules ci-dessus, les formules pratiques de débit tant en régime subsonique qu'en régime sonique pour un orifice calibré de section S.

Soient P_1 la pression à l'amont et P_2 la pression à l'aval, c'est-à-dire la pression dans l'enceinte où débouche la section S.

Si à P_1 constant, on fait varier P_2 , on constate que :

* Tant que $P_2 < P_c$, d'après (4) q croît, lorsque P croît. On est en régime subsonique.

Partant de (4), exprimant ρ_1 en fonction de P_1 et T_1 et comme P_2 est très voisin de P_1 ($P_2 = P_1 + \epsilon P_1 + 0$ (ϵ^2) où $\epsilon \ll 1$) l'expression du débit peut s'écrire :

$$(7) \quad q = KS \sqrt{P_2} \frac{P_1 - P_2}{|P_1 - P_2|} \sqrt{|P_1 - P_2|}$$

où K dépend de la nature du gaz et S dépend de la géométrie de l'orifice.

* Pour $P_2 = P_c$, on est en régime sonique à l'orifice. Si on continue à faire décroître la pression dans l'enceinte où débouche l'orifice en dessous de la pression critique, la pression à l'orifice reste égale à P_c .

Partant de (4) et tenant compte de (5) et (6) on a :

$$(8) \quad q = \frac{K'}{2} S P_1$$

où K' dépend de la nature du gaz et S dépend de la géométrie de l'orifice.

Notons qu'on peut établir des formules analogues, pour une tuyère convergente, pour une tuyère convergente-divergente.

II.3 - CONVENTIONS - NOTATIONS ET HYPOTHESES

L'on pourra se reporter à la figure II.3.1, pour pouvoir réperer toutes les notations utilisées. Sur la figure, les flèches indiqueront les sens des grandeurs correspondantes.

Dans tout ce qui suit, nous adopterons les conventions, notations et hypothèses suivantes :

* q (resp. q^*) désignera le débit dans la prise d'influence du pilote (resp. du servomoteur principal) et on conviendra que q (resp. q^*) est positif quand le fluide pénètre dans la chambre supérieure du pilote (resp. dans la chambre supérieure du servomoteur principal) par la prise d'influence du pilote (resp. du servomoteur principal).

* q_2 désignera le débit à travers la vanne de temporisation qu'on appelle aussi vanne d'amortissement et que nous noterons vanne V_{a2} . Le débit q_2 peut changer de signe au cours du fonctionnement de l'appareil. Signalons que la vanne V_{a2} est réglable.

* q_3 désignera le débit à travers la vanne de fuite qu'on appelle aussi vanne de décharge ou de rejet et que nous noterons vanne V_{a3} . Le débit q_3 n'a qu'un seul sens, dans la mesure où il contribue à remplir le volume aval et ce, dans toutes les conditions d'utilisation. La vanne V_{a3} est une vanne réglable.

* q_4 désignera le débit de fuite à l'atmosphère au niveau de l'évent pilote. Il sera compté positivement quand l'air pénètre dans la chambre inférieure du pilote.

* Q_p désignera le débit au niveau du clapet pilote. Signalons que dans toutes les conditions d'utilisation, le débit Q_p n'a qu'un seul sens dans la mesure où la pression de prédétente est toujours supérieure à la pression délivrée par le pilote.

.../...

* Q_1 désignera le débit au niveau du clapet principal.

* Q_c désignera le débit à travers la vanne de laminage appelée encore vanne de décharge et notée V_{ac} . Nous supposerons que cette vanne débite à l'atmosphère. Le débit Q_c n'a qu'un seul sens, dans la mesure où il contribue à vider le volume aval.

* Σ (resp. σ) désignera la section de la membrane du servomoteur principal (resp. du pilote).

* Σ_D désignera la section de la tige du clapet pilote.

* Les tiges du clapet du détendeur principal et du pilote sont en contact avec le fluide. Nous désignerons alors par f (resp. F) le coefficient de frottement visqueux de la tige du clapet pilote (resp. clapet du détendeur principal).

* K (resp. k) désignera la constante de raideur du ressort du détendeur principal (resp. du pilote).

* On appelle équipage mobile du pilote, la partie dudit module, pouvant se déplacer en mouvement de translation rectiligne et uniforme caractérisée par une loi horaire $x(t)$, et qui permet la modulation de la pression délivrée par le prédétendeur. Cet équipage comprend le ressort pilote, la membrane pilote et le clapet pilote. On désignera par m la masse équivalente de cet équipage.

* On appelle équipage mobile du détendeur principal, la partie dudit module pouvant se déplacer en mouvement de translation rectiligne et uniforme suivant une loi horaire $X(t)$, et qui permet la correction de la pression aval. Cet équipage comprend le ressort principal, la membrane du servomoteur principal et le clapet du détendeur principal. On désignera par M , la masse équivalente de cet équipage.

* P_h (resp. P_h^*) désignera la pression régnant dans la chambre supérieure du pilote V_h (resp. du servomoteur principal V_h^*).

.../...

* P_b (resp. P_m) désignera la pression régnant dans la chambre inférieure du pilote V_b (resp. du servomoteur principal V_m).

* P_d désignera la pression délivrée par le pilote, c'est-à-dire la pression régnant dans le volume V_d compris entre la vanne d'amortissement V_{a2} et la vanne de fuite V_{a3} .

* Π désignera la pression délivrée par le prédétendeur. C'est la pression de prédétente. Nous supposerons dans le présent modèle que Π est indépendante du temps.

* P_e (resp. P_a) désignera la pression amont (resp. aval) du régulateur.

* P_{at} désignera la pression atmosphérique que nous supposerons constante.

* Nous supposerons que les différentes pressions s'établissent instantanément dans les chambres.

* Nous supposerons négligeables les frottements secs.

* Nous supposerons le gaz parfait en évolution adiabatique.

* Compte tenu du fait que le clapet du détendeur principal est un clapet équilibré, nous pouvons en première approximation estimer que les efforts aérodynamiques qui s'exercent sur lui s'équilibrent mutuellement.

* Nous noterons . la dérivée temporelle $\frac{d}{dt}$

* On appelle prise d'influence pilote (resp. servomoteur principal), un élément de tuyauterie de très faible volume, reliant le volume aval à la chambre supérieure du pilote (resp. du servomoteur principal). Compte tenu de leur faible dimension, on admettra qu'ils n'introduisent que des pertes de charge.

* x (resp. X) désignera le déplacement de l'équipage mobile du pilote (resp. du détendeur principal).

.../...

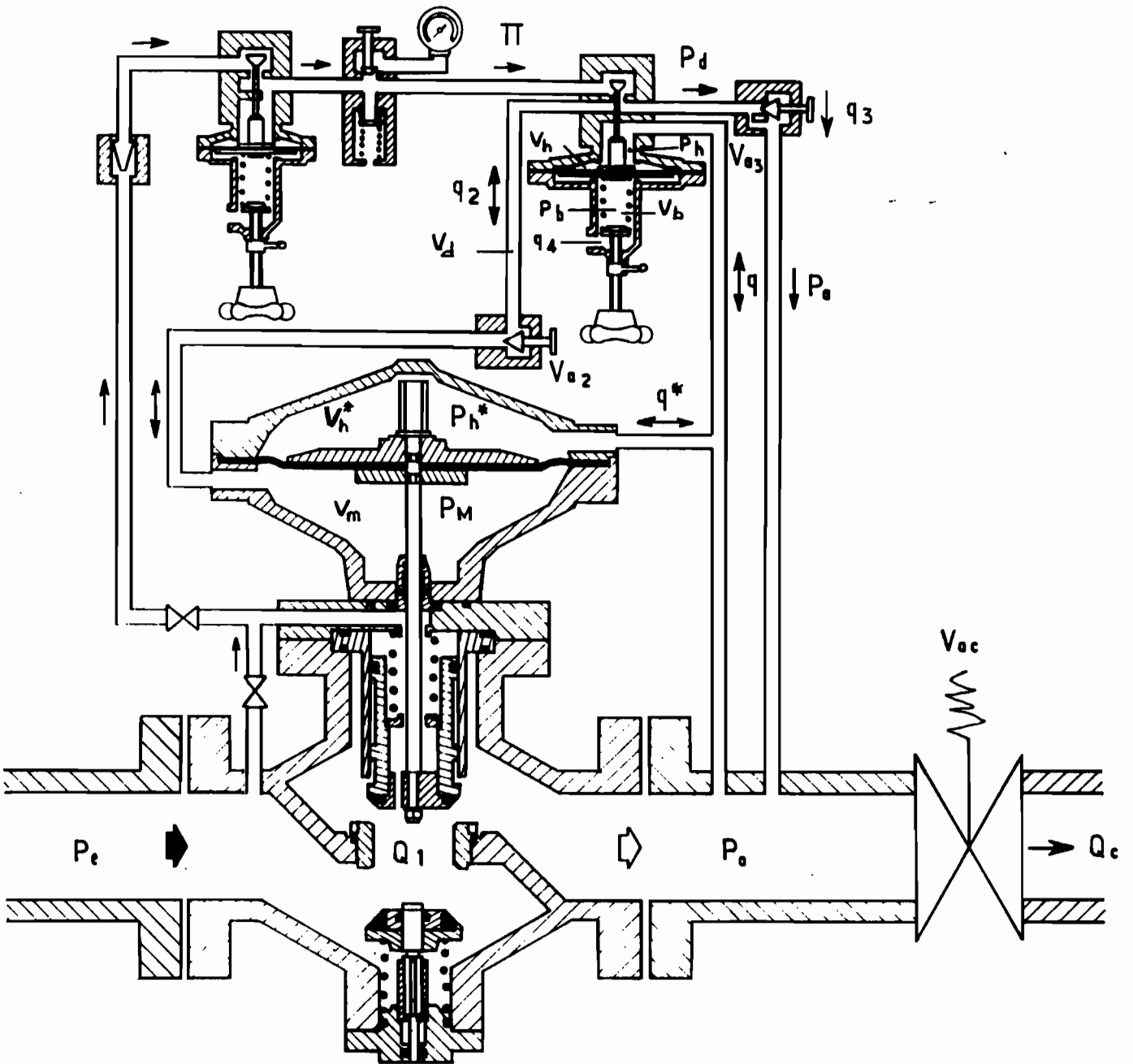


Figure II.3.1 : Schéma du régulateur piloté
avec les notations utilisées

II.4 - EQUATIONS DU SYSTEME

Conformément à la division modulaire faite en II.1, nous allons décrire les différentes équations du système.

II.4.1 - EQUATION DE LA DYNAMIQUE POUR LE MOUVEMENT DE L'EQUIPAGE MOBILE DU PILOTE

Rappelons que l'on appelle équipage mobile du pilote, la partie du module appelé pilote qui peut se déplacer en mouvement de translation rectiligne et uniforme caractérisé par une loi horaire $x(t)$ et qui permet la modulation de la pression de prédétente vers le volume compris entre la vanne d'amortissement V_{a2} et la vanne de fuite V_{a3} .

L'équation fondamentale de la dynamique est appliquée à l'ensemble de cet équipage mobile sous la forme.

$m\ddot{x} = \Sigma \text{ forces appliquées aux éléments constituant l'équipage mobile du pilote.}$

On pourra se reporter au § II.3 pour se remémorer les notations. Les forces extérieures sont de diverses sortes, plus ou moins faciles à évaluer.

- La pesanteur mg est sans ambiguïté.

Les forces résultant de l'action du gaz sont déjà moins évidentes. Elles dépendent de l'état de mouvement du gaz.

L'équipage mobile comprend une membrane d'aire σ séparant les deux chambres (supérieure et inférieure) du pilote. Dans la chambre supérieure évolue le gaz naturel (gaz de distribution) et dans la chambre inférieure évolue de l'air. Il est légitime de considérer que les deux types de fluide sont non visqueux et que les actions de chaque type de fluide sur les parois en mouvement ou non, et en particulier sur les deux faces de la membrane, se réduisent à des actions de pression.

.../...

Le modèle considère que la pression dans chacune des chambres est homogénéisée et représentable par une pression unique, P_h pour la chambre supérieure du pilote (en communication avec le volume aval par l'intermédiaire de la prise d'influence pilote), P_b pour la chambre inférieure du pilote (en communication avec l'atmosphère). Dans ces conditions, les actions des deux types de fluide sur les deux faces de la membrane, se réduisent à une force du type $(P_h - P_b)\sigma$ comptée positivement quand elle a tendance à déplacer la membrane vers le bas. L'hypothèse sous-jacente à cette modélisation des actions du fluide est que, au cours du mouvement, le gaz dans chacune des chambres se met instantanément en équilibre de pression ; elle suppose aussi que l'énergie cinétique volumique de la turbulence qui règne dans les deux chambres est négligeable en comparaison de la pression. Nous n'avons aucune idée du niveau de turbulence qui règne dans les deux chambres, mais l'expérience cumulée nous incite à considérer que ce niveau est faible (probablement quelques %). En ce qui concerne l'hypothèse d'équilibre, on peut en avoir une idée avec le modèle considéré dans l'annexe 2 et nous pouvons en conclure que l'hypothèse est acceptable.

L'équipage mobile a pour fonction essentielle d'animer le mouvement du clapet dont la partie supérieure subit une force de pression due à la pression de prédétente Π . Cette force de pression se décompose en deux forces antagonistes s'exerçant d'une part sur la face supérieure et d'autre part sur la face inférieure. Σ_D la section de la tige est la différence de section entre la face supérieure et la face inférieure de la partie du clapet subissant cette force de pression. Par conséquent, la force de pression due à la prédétente Π peut s'écrire sous la forme $\Sigma_D \Pi$.

La tige du clapet pilote, se trouve en contact permanent avec le fluide. Ainsi dans son mouvement, le clapet subit un effet de résistance dû aux effets de frottements visqueux. On peut modéliser par $(-f\dot{x})$, la force caractérisant cet effet de frottement visqueux.

Le ressort pilote, élément de l'équipage mobile pilote, est soumis à une force de rappel que l'on peut représenter sous la forme $(-kx)$. Soit f_0 la tension du ressort lorsque le clapet est entièrement ouvert.

Tenant compte de toutes ces considérations, l'équation de la dynamique pour le mouvement de l'équipage mobile du pilote s'écrit :

$$\text{II.4.1. - (1) } \quad m\ddot{x} = (P_h - P_b) \sigma + mg - kx - f\dot{x} - f_0 + \Sigma_D \Pi .$$

II.4.2 - EQUATION DE LA DYNAMIQUE POUR LE MOUVEMENT DE L'EQUIPAGE MOBILE DU DETENDEUR PRINCIPAL

En ce qui concerne l'équipage mobile du détendeur principal, l'analyse est analogue à celle du § II.4.1, sauf que, comme convenu au § II.3, le clapet du détendeur principal étant équilibré, nous estimons en première approximation que les efforts aérodynamiques qui s'exercent sur lui s'équilibrent mutuellement.

Toutes ces considérations conduisent avec les notations de II.3 à l'égalité suivante :

$$\text{II.4.2 - (1)} \quad M\ddot{X} = (-P_h^* + P_m) \Sigma + Mg - KX - F\dot{X} - F_0 .$$

II.4.3 - MODELISATION DE LA VARIATION DE L'ETAT DU GAZ DANS LA CHAMBRE SUPERIEURE DU PILOTE.

Nous avons indiqué en annexe 2 que le mouvement du fluide dans chacune des chambres pouvait être considéré comme ayant une influence négligeable sur les actions exercées par le fluide sur la membrane. Ici, nous devons relier l'état du gaz dans chacune des chambres (en l'occurrence ici la chambre supérieure du pilote) à l'état géométrique de la chambre et aux débits qui y entrent et (ou) en sortent. On se reportera à l'annexe 2 pour une justification du modèle qui consiste à ne retenir que l'équation de la conservation de la masse pour le fluide qui se trouve à un instant courant dans la chambre. Cette dernière se réduit à l'équation, avec les notations du § II.3 :

$$\text{II.4.3 - (1)} \quad \frac{d}{dt} (\rho_h V_h) = q ,$$

où

* ρ_h désigne la masse volumique du fluide qui y règne.

* q désigne le débit passant du volume aval à la chambre supérieure du pilote par la prise d'influence pilote, compté positivement quand la masse de la chambre augmente.

* V_h désigne le volume de la chambre supérieure du pilote.

.../...

Si on tient compte du fait que la variation du volume de la chambre est due exclusivement au déplacement de la membrane on arrive à :

$$\text{II.4.3 - (2)} \quad \frac{d}{dt} (V_h) = \sigma \dot{x} .$$

Pour établir la formule II.4.3 - (2), remarquons que l'on a :

$$\frac{d}{dt} V_h = \int_{[\sigma]} W(p) dS_p ,$$

où $[\sigma]$ désigne le domaine surfacique occupé par la membrane et W la composante normale de la vitesse de déplacement de la membrane (évalué localement ce qui veut dire que $W(p)$ dépend du point p sur la membrane). Du fait que tous les points de la membrane ont la même vitesse normale, on a :

$$W(p) = \dot{x} , \quad \forall p \in \sigma ,$$

$$\text{d'où II.4.3 - (3)} \quad \frac{d}{dt} V_h = \dot{x} \int_{[\sigma]} dS_p = \sigma \dot{x} .$$

Dans ces conditions, l'équation II.4.3 - (1) devient :

$$V_h \frac{d}{dt} (\rho_h) + \rho_h \frac{d}{dt} (V_h) = q ,$$

c'est-à-dire :

$$\text{II.4.3 - (4)} \quad \rho_h \sigma \dot{x} + V_h \dot{\rho}_h = q .$$

Nous avons discuté en annexe 2 de l'état du mouvement dans l'une des chambres et nous avons vu que le fluide pouvait y être considéré comme étant en quasi équilibre et en évolution réversible c'est à dire adiabatique, nous avons donc :

$$P_h = \text{cte } \rho_h^\gamma ,$$

où γ désigne le rapport des chaleurs spécifiques, supposées constantes, du gaz.

.../...

Par dérivation, nous obtenons

$$\frac{dP_h}{dt} = \gamma \frac{P_h}{\rho_h} \frac{d\rho_h}{dt} ,$$

soit en utilisant II.4.3 - (4)

$$\text{II.4.3 - (5)} \quad \frac{dP_h}{dt} = \frac{1}{C_h} (q - \rho_h \sigma \dot{x}) ,$$

avec :

$$C_h = \frac{\rho_h V_h}{\gamma P_h} .$$

L'équation aux dimensions du coefficient C_h est :

$$[C_h] = [L] [T]^2 .$$

D'après l'analyse du § II.2, on peut écrire que :

$$q = k_1 \frac{P_a - P_h}{|P_a - P_h|} \sqrt{P_h |P_a - P_h|} ,$$

Avec la valeur de k_1 qui dépend de la nature du gaz, du diamètre et de la longueur de la prise d'influence pilote.

L'expression de q est en accord avec le sens commun qui suggère que q est positif quand le gaz pénètre dans la chambre, ce qui a lieu lorsque $P_a > P_h$.

Par la suite, nous utiliserons la notation :

$$|q| = k_1 \sqrt{P_h |P_a - P_h|} .$$

Cela nous permet d'écrire :

$$\text{II.4.3 - (6)} \quad \frac{dP_h}{dt} = \frac{1}{C_h} \left[\frac{(P_a - P_h)}{|P_a - P_h|} |q| - \rho_h \sigma \dot{x} \right] .$$

II.4.4 - MODELISATION DE LA VARIATION DE L'ETAT DU GAZ DANS LA CHAMBRE
INFERIEURE DU PILOTE

S'agissant de la chambre inférieure du pilote, le raisonnement qui conduit à la formule II.4.3 - (1) donne dans ce cas :

$$\text{II.4.4 - (1)} \quad \frac{d}{dt} (\rho_b V_b) = -q_4 ,$$

avec la convention que q_4 est compté positivement quand l'air venant de l'atmosphère pénètre par l'évent, dans la chambre inférieure du pilote. ρ_b désigne la masse volumique de l'air se trouvant dans la chambre dont le volume est V_b . Compte tenu de la convention sur q_4 , on a :

$$\text{II.4.4 - (2)} \quad q_4 = k_4 \frac{P_b - P_{at}}{|P_b - P_{at}|} \sqrt{P_{at} |P_b - P_{at}|} ,$$

où k_4 dépend du diamètre de l'évent pilote et de la nature du fluide.

La différence avec le paragraphe précédent est qu'ici on doit écrire

$$\text{II.4.4 - (3)} \quad \frac{d}{dt} (V_b) = -\sigma \dot{x} ;$$

nous aurons II.4.4 - (1) qui s'écrira :

$$-\rho_b \sigma \dot{x} + V_b \frac{d\rho_b}{dt} = -q_4 .$$

Comme

$$\frac{dP_b}{dt} = \gamma \frac{P_b}{\rho_b} \frac{d\rho_b}{dt} ,$$

.../...

On a, avec

$$C_b = \frac{\rho_b V_b}{\gamma P_b} \quad , \quad (|[C_b] - [L] [T]^2|)$$

la relation finale suivante :

$$\text{II.4.4 - (4)} \quad \frac{dP_b}{dt} = \frac{1}{C_b} \left[- \frac{P_b - \text{Pat}}{|P_b - \text{Pat}|} |q_4| + \rho_b \sigma \dot{x} \right] ,$$

après avoir posé $|q_4| = k_4 \sqrt{\text{Pat} |P_b - \text{Pat}|}$.

II.4.5 - MODELISATION DE LA VARIATION DE L'ETAT DU GAZ DANS LA CHAMBRE SUPERIEURE DU SERVOMOTEUR PRINCIPAL

La chambre supérieure du servomoteur principal est reliée au volume aval par l'intermédiaire de la prise d'influence principale.

Le raisonnement ici est analogue à celui qui a conduit à la formule II.4.3 - (1). Avec les notations du § II.3, on a l'équation.

$$\text{II.4.5 - (1)} \quad \frac{d}{dt} (\rho_h^* V_h^*) = q^* ,$$

où :

* ρ_h^* désigne la masse volumique du fluide qui règne dans la chambre supérieure du servomoteur principal.

* q^* désigne le débit passant du volume aval à la chambre supérieure du servomoteur principal par la prise d'influence principale, compté positivement quand la masse de la chambre augmente.

* V_h^* désigne le volume de la chambre supérieure du servomoteur principal.

Compte tenu de la convention sur q^* , on a, d'après l'analyse de II.2.

$$\text{II.4.5 - (2)} \quad q^* = k_1^* \frac{P_a - P_h^*}{|P_a - P_h^*|} \sqrt{P_h^* |P_a - P_h^*|} ,$$

avec la valeur de k_1^* qui dépend de la nature du gaz, du diamètre et de la longueur de la prise d'influence principale. Nous utiliserons la notation :

$$|q^*| = k_1^* \sqrt{P_h^* |P_a - P_h^*|} .$$

Si on tient compte du fait que la variation du volume V_h^* est due exclusivement au déplacement de la membrane du servomoteur principal, on arrive à :

$$\text{II.4.5 - (3)} \quad \frac{dV_h^*}{dt} = - \Sigma \dot{x} .$$

.../...

Le raisonnement qui conduit à l'établissement de la formule II.4.5 - (3) est analogue à celui de II.4.3 - (2).

Comme :

$$\frac{dP_h^*}{dt} = \gamma \frac{P_h^*}{\rho_h^*} \frac{d\rho_h^*}{dt} ,$$

on a l'équation II.4.5 - (1) qui s'écrit :

$$\text{II.4.5 - (4)} \quad \frac{dP_h^*}{dt} = \frac{1}{C_h^*} \left[\frac{P_a - P_h^*}{|P_a - P_h^*|} |q^*| + \rho_h^* \Sigma \dot{x} \right] .$$

II.4.6 - MODELISATION DE LA VARIATION DE L'ETAT DU GAZ DANS LA CHAMBRE
INFERIEURE DU SERVOMOTEUR PRINCIPAL

La chambre inférieure du servomoteur principal est reliée à la vanne d'amortissement (donc au volume V_d qui est le volume compris entre la vanne d'amortissement V_{a2} et la vanne de fuite V_{a3}) par un élément de tuyauterie de très faible dimension. De sorte que la perte de charge de l'élément de tuyauterie est négligeable devant celle induite par la vanne d'amortissement.

Par conséquent, la pression motrice, c'est-à-dire la pression régnant dans la chambre inférieure du détendeur principal, est la pression délivrée (éventuellement reçue) par le volume compris entre la vanne de fuite et la vanne d'amortissement après passage à travers celle-ci.

En suivant un raisonnement analogue à celui qui a conduit à la formule II.4.3 - (1), et en tenant compte des notations du § II.3, on a l'équation suivante :

$$\text{II.4.6 - (1)} \quad \frac{d(\rho_m V_m)}{dt} = -q_2 ,$$

où

* ρ_m désigne la masse volumique du fluide qui règne dans la chambre inférieure du servomoteur principal.

* q_2 désigne le débit à travers la vanne d'amortissement compté positivement quand la masse de la chambre inférieure du servomoteur principal augmente.

* V_m désigne le volume de la chambre inférieure du servomoteur principal.

Compte tenu de la convention sur q_2 , on a d'après l'analyse du paragraphe II.2.

$$\text{II.4.6 - (2)} \quad q_2 = k_2 \frac{P_m - P_d}{|P_m - P_d|} \sqrt{P_d |P_m - P_d|} ,$$

avec la valeur de k_2 qui dépend de la nature du gaz et de l'ouverture de la vanne d'amortissement (qui est une vanne réglable).

.../...

En tenant un raisonnement analogue à celui qui a conduit à l'établissement de la formule II.4.3 - (2), on arrive, dans le cas de la chambre inférieure du servomoteur principal à :

$$\text{II.4.6 - (3)} \quad \frac{d(V_m)}{dt} = \Sigma \dot{X} .$$

L'équation de la variation de l'état du gaz dans la chambre inférieure du servomoteur principal s'écrira :

$$\text{II.4.6 - (4)} \quad \frac{dP_m}{dt} = \frac{1}{C_m} \left[- \frac{(P_m - P_d)}{|P_m - P_d|} |q_2| - \rho_m \Sigma \dot{X} \right]$$

II.4.7 - MODELISATION DE LA VARIATION DE L'ETAT DU GAZ DANS LE VOLUME VD COMPRIS ENTRE LA VANNE D'AMORTISSEMENT V_{a2} ET LA VANNE DE FUIITE V_{a3}

En observant le schéma de la figure II.3.1 on voit qu'entre les deux vannes appelées l'une vanne d'amortissement et notée V_{a2} l'autre vanne de fuite et notée V_{a3} , il y a une tuyauterie sur laquelle vient se brancher la sortie du clapet pilote.

Soit V_d le volume constant de cette tuyauterie, ρ_d et P_d la masse volumique et la pression du gaz qu'elle contient. Notons Q_p le débit à travers le clapet pilote compté positivement quand il alimente la tuyauterie, notons également q_2 le débit à travers la vanne V_{a2} compté positivement quand il alimente la tuyauterie et enfin q_3 le débit à travers la vanne V_{a3} . Comme V_d est constant, la formule exprimant la conservation de la masse s'écrit :

$$\text{II.4.7 - (1)} \quad V_d \frac{d\rho_d}{dt} = Q_p + q_2 - q_3 ,$$

Soit, en introduisant le coefficient C_d avec :

$$C_d = \frac{\rho_d V_d}{\gamma P_d} ,$$

analogue à ceux déjà introduits, on a :

$$\text{II.4.7 - (2)} \quad \frac{dP_d}{dt} = \frac{1}{C_d} [Q_p + q_2 - q_3] .$$

Le débit Q_p dépend des pressions P_d (régnant dans le volume V_d compris entre V_{a2} et V_{a3}), P à la sortie du prédétendeur et également de l'ouverture du clapet c'est-à-dire de la section de passage du gaz au col. L'écoulement au niveau de cette section étant subsonique, l'expression de Q_p sera analogue à celle donnée par la formule II.2 - (7).

.../...

L'épaisseur de la fente laissée ouverte par le clapet (voir le schéma de la figure 2.b) dépend évidemment de la position de la tige du clapet pilote et peut être égale à x si on convient de placer l'origine de l'abscisse x lorsque le clapet est fermé. On a donc :

$$\text{II.4.7 - (4)} \quad Q_p = K_p x \sqrt{P_d |\Pi - P_d|},$$

où K_p est un coefficient qui dépend de la nature du gaz. Dans toutes les conditions d'utilisation on a $\Pi > P_d$ ce qui signifie qu'avec notre convention de signe Q_p est positif (le fluide s'écoule toujours du prédétendeur vers le volume V_d à travers le clapet pilote).

Le débit q_3 passant à travers la vanne de fuite V_{a3} est toujours positif. Cela résulte du fait que dans toutes les conditions d'utilisation, la pression P_d dans le volume V_d est supérieure à la pression P_a dans le réseau aval. Nous écrirons que :

$$\text{II.4.7 - (5)} \quad q_3 = K_3 \sqrt{P_a (P_d - P_a)},$$

en notant que K_3 est un coefficient qui dépend de la nature du gaz et de l'ouverture de la vanne V_{a3} et sur la valeur duquel l'on peut jouer pour modifier les conditions de fonctionnement de l'appareil.

Le débit q_2 à travers la vanne d'amortissement V_{a2} (joignant le volume V_d à la chambre inférieure du servomoteur principal) peut changer de signe au cours du fonctionnement de l'appareil, son expression est donnée par :

$$\text{II.4.7 - (6)} \quad q_2 = k_2 \frac{P_m - P_d}{|P_m - P_d|} \sqrt{P_d |P_m - P_d|},$$

de sorte que la relation II.4.7 - (2) devient :

$$\text{II.4.7.- (3)} :$$

$$\frac{dP_d}{dt} = \frac{1}{C_d} [K_p x \sqrt{P_d (\Pi - P_d)} - k_3 \sqrt{P_a (P_d - P_a)} + k_2 \frac{P_m - P_d}{|P_m - P_d|} \sqrt{P_d |P_m - P_d|}],$$

et on rappelle que, dans toutes les conditions d'utilisation $\Pi > P_d$, $P_d > P_a$.

II.4.8 - MODELISATION DE LA VARIATION DE L'ETAT DU GAZ DANS LE VOLUME AVAL

Le volume aval est relié à divers organes. Par le clapet du détendeur principal il est en relation avec la canalisation amont. On note Q_1 le débit à travers le clapet principal, compté positivement lorsqu'il alimente le volume aval. Par la vanne de laminage V_{ac} se trouvant en bout de volume aval, l'on simule les appels en débit (c'est-à-dire les variations dans la demande).

Nous notons Q_c le débit à travers V_{ac} , compté positivement lorsqu'il s'agit d'une fuite pour le volume aval.

Le volume aval est également relié à la chambre supérieure du pilote et à la chambre supérieure du servomoteur principal par l'intermédiaire de deux prises d'influence : q et q^* représentent les débits correspondants.

En posant :

$$C_a = \frac{\rho_a V_a}{\gamma P_a} ,$$

où V_a désigne le volume (constant) de la capacité aval, tandis que P_a et ρ_a sont les pressions et masse volumique qui y règnent. On a :

$$\text{II.4.8 - (1)} \quad \frac{dP_a}{dt} = \frac{1}{C_a} (Q_1 - Q_c + q_3 - q - q^*) .$$

Le débit Q_1 , qui est toujours positif, est réglé par un col sonique parce que dans toutes les configurations le rapport de la pression dans la canalisation amont est toujours plus de deux fois supérieure à celle dans le volume aval (il s'agit des niveaux absolus de pression). Dans ces conditions on peut écrire :

$$\text{II.4.8 - (2)} \quad Q_1 = L_1 \times P_e/2 ,$$

.../...

où L_1 est un coefficient de la dimension d'une longueur qui dépend du périmètre de la section de fluide du clapet principal, tandis que X désigne le déplacement de l'équipage mobile du détendeur principal avec la convention que $X = 0$ correspond à la fermeture du clapet du détendeur principal. La vanne de décharge V_{ac} a pour débit:

$$\text{II.4.8 - (3) } Q_c = S_c \sqrt{P_{at} (P_a - P_{at})}$$

Nous avons bien sûr supposé que la vanne de décharge V_{ac} débite à l'atmosphère. Signalons que P_{at} désigne la pression atmosphérique. Dans toutes les conditions de fonctionnement on a toujours $P_a > P_{at}$.

II.5 - LINEARISATION DU SYSTEME

II.5.1 - INDETERMINATION ET METHODE DE LA SECANTE

Afin de pouvoir appliquer les critères classiques de stabilité linéaire à notre système, nous nous proposons d'étudier l'effet des petites perturbations au voisinage d'un point d'équilibre (dans notre cas le point d'équilibre choisi est le point correspondant au régime permanent). Pour cela, nous allons appliquer la méthode classique de linéarisation en considérant que les diverses quantités intervenant dans le modèle (débits, déplacements, efforts de pression) subissent des petites perturbations chacune autour d'une valeur dite de régime permanent.

Si f est une quelconque des grandeurs intervenant dans le modèle, nous noterons :

$$f = f^0 + \Delta f ,$$

en désignant par f^0 la valeur prise en régime permanent et par Δf la perturbation. Nous verrons au paragraphe II.5.2 comment effectuer la linéarisation équation par équation, mais auparavant il nous faut examiner les lois de débit que nous avons introduites à plusieurs reprises.

Soit :

$$Q = c \frac{P_2 - P_1}{|P_2 - P_1|} \sqrt{P_1 |P_2 - P_1|} ,$$

une de ces lois de débit. De par la nature du régulateur-détendeur, en régime permanent, tous les débits correspondant à certains organes (tels la vanne d'amortissement V_{a2} , les deux prises d'influence pilote et principale, l'évent pilote) sont nuls.

Pour un débit qui n'est pas nul en régime permanent on a :

$$\text{II.5.1 - (1)} \quad Q^0 = c \frac{P_2^0 - P_1^0}{|P_2^0 - P_1^0|} \sqrt{P_1^0 |P_2^0 - P_1^0|} ,$$

.../...

tandis qu'au voisinage du régime permanent on a :

$$Q^0 + \Delta Q = c \frac{P_2^0 - P_1^0 + \Delta P_2 - \Delta P_1}{|P_2^0 - P_1^0 + \Delta P_2 - \Delta P_1|} \sqrt{(P_1^0 + \Delta P_1) |P_2^0 - P_1^0 + \Delta P_2 - \Delta P_1|} ,$$

ce qui donne :

$$\Delta Q = c \left(\frac{P_2^0 - P_1^0 + \Delta P_2 - \Delta P_1}{|P_2^0 - P_1^0 + \Delta P_2 - \Delta P_1|} \sqrt{(P_1^0 + \Delta P_1) |P_2^0 - P_1^0 + \Delta P_2 - \Delta P_1|} - \frac{P_2^0 - P_1^0}{|P_2^0 - P_1^0|} \sqrt{P_1^0 |P_2^0 - P_1^0|} \right) ,$$

soit :

$$\text{II.5.1 - (2)} \quad \Delta Q = \frac{c}{2} \text{signe}(\Delta P_2 - \Delta P_1) \sqrt{P_1^0 |P_2^0 - P_1^0|} \left[\frac{\Delta P_1}{P_1^0} + \frac{\Delta P_2 - \Delta P_1}{|P_1^0 - P_2^0|} \right] .$$

On remarquera que la relation donnée en II.5.1 - (2) n'a de sens que parce que nous supposons que P_2^0 est différent de P_1^0 .

En revanche, si le débit est nul en régime permanent, c'est à dire qu'on a $P_1^0 = P_2^0$, l'expression du débit en régime perturbé sera en première approximation

$$\text{II.5.1 - (3)} \quad \Delta Q = c \frac{\Delta P_2 - \Delta P_1}{|\Delta P_2 - \Delta P_1|} \sqrt{P_1^0 |\Delta P_2 - \Delta P_1|} .$$

Cette relation est fondamentalement non linéaire et n'est jamais linéarisable par quelque artifice que ce soit. La loi de perturbation de débit représenté par II.5.1 - (3) peut être représentée par le diagramme II.5.1.

.../...

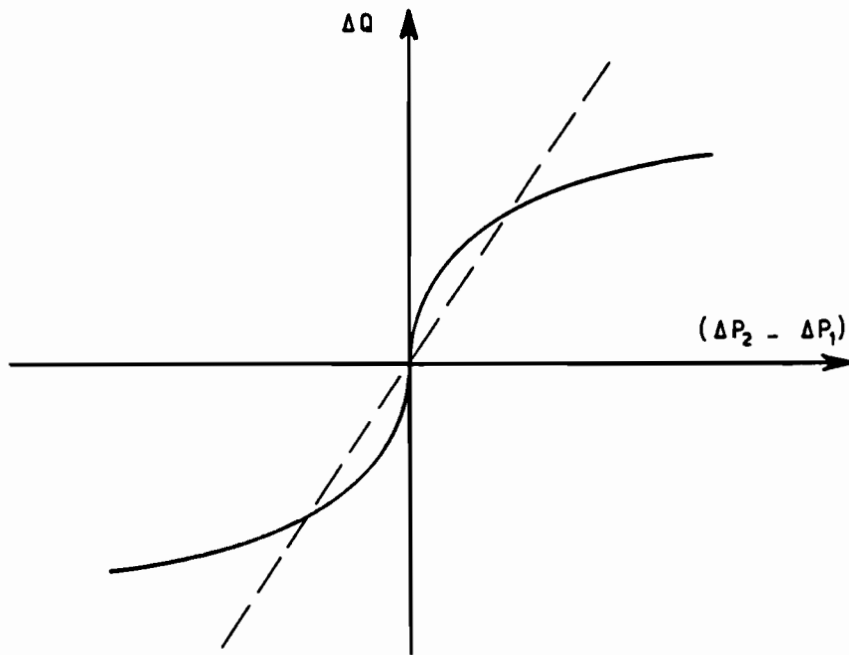


Fig. II - 5 - 1

Loi débit - différence de pression
pour certains éléments du régulateur

Nous verrons au chapitre IV comment traiter le modèle en conservant la loi non linéaire II.5.1 - (3), mais, pour l'instant, nous allons procéder à une linéarisation ad'hoc dans le but de pouvoir nous servir de tout l'arsenal de la théorie linéaire. Nous écrivons à la place de II.5.1 - (3) :

$$\text{II.5.1 - (4)} \quad \Delta Q = \frac{J}{R} (\Delta P_2 - \Delta P_1) ,$$

et nous déterminons la constante J par :

$$c \sqrt{P_1^0 |\Delta P_2 - \Delta P_1|_m} = \frac{J}{R} (\Delta P_2 - \Delta P_1)_m ,$$

où $(\Delta P_2 - \Delta P_1)_m$ désigne une valeur moyenne estimée pour l'écart $(\Delta P_2 - \Delta P_1)$ dans la plage de fonctionnement considérée.

La méthode que nous préconisons, n'a aucun fondement théorique et il faut envisager ses conséquences avec méfiance. Sa seule justification se trouve à la fois dans l'usage que l'on peut en faire et dans la confrontation avec soit une simulation numérique à partir du modèle utilisant la relation II.5.1 - (3) soit des résultats expérimentaux.

II.5.2 - ETUDE DES EQUATIONS

NOTATION : Dans tout ce qui suit, sauf mention expresse du contraire, toutes les expressions ayant un 0 en indice supérieur, correspondent à leur valeur en régime permanent.

II.5.2.1 - Equation linéaire de la dynamique pour le mouvement de l'équipage mobile du pilote

L'équipage mobile du pilote, peut se déplacer en mouvement de translation rectiligne. Son équation de mouvement est défini par la formule II.4.1 - (1). Si on remarque que la pression de prédétente Π est considérée comme étant indépendante du temps, l'équation II.4.1 - (1) donne à l'état de régime permanent :

$$\text{II.5.2.1 - (1)} \quad 0 = (P_h^0 - P_b^0)\sigma + mg - kx^0 - f_0 + \Sigma_D \Pi .$$

En régime instationnaire, l'équation linéaire de la dynamique par le mouvement de l'équipage mobile du pilote est :

$$\text{II.5.2.1. - (2)} : m\Delta\ddot{x} = -f\Delta\dot{x} - k\Delta x + \sigma(\Delta P_h - \Delta P_b) .$$

Rappelons que dans l'équation II.5.2.1 - (2), la variable Δx désigne la variation du mouvement de l'équipage mobile pilote autour de x^0 qui représente la position dudit équipage en régime permanent.

II.5.2.2 - Equation linéaire de la dynamique pour le mouvement de l'équipage mobile du détendeur principal

Signalons qu'on définit l'équipage mobile du détendeur principal, comme étant la partie dudit module comprenant outre le clapet du détendeur principal, le ressort principal et la membrane du servomoteur principal. Cet équipage peut se déplacer en mouvement de translation rectiligne et uniforme. L'équation décrivant son mouvement est définie par la relation II.4.2 - (1).

A l'état de régime permanent, cette équation donne :

$$\text{II.5.2.2 - (1)} \quad 0 = (P_m^0 - P_h^{*0}) \Sigma + Mg - KX^0 - F_0 .$$

En régime instationnaire, l'équation linéaire de la dynamique pour le mouvement de l'équipage mobile du détendeur principal est :

$$\text{II.5.2.2 - (2)} \quad M\Delta\ddot{X} = -F\Delta\dot{X} - K\Delta X + \Sigma (\Delta p_m - \Delta P_h^*) ,$$

où ΔX désigne la variation du mouvement de l'équipage mobile du détendeur principal autour de la position X^0 .

II.5.2.3 - Equation linéaire traduisant la variation de l'état du gaz dans la chambre supérieure du pilote

Nous avons défini au paragraphe II.4.3, l'équation traduisant la variation de l'état du gaz dans la chambre supérieure du pilote. Rappelons qu'elle s'écrit :

$$\text{II.5.2.3 - (1)} \quad C_h \frac{dP_h}{dt} = q - \rho_h \sigma x_i ,$$

et que l'expression de q est définie par :

$$q = k_1 \frac{P_a - P_h}{|P_a - P_h|} \sqrt{P_h |P_a - P_h|} .$$

Cette équation n'est pas linéarisable au voisinage du régime permanent, car dans un tel régime on a $p_a^0 = p_h^0$ et $q = 0$. De sorte qu'en première approximation, l'expression de la variation du débit sera :

$$\text{II.5.2.3 - (2)} \quad \Delta q = k_1 \frac{\Delta P_a - \Delta P_h}{|\Delta P_a - \Delta P_h|} \sqrt{P_h^0 |\Delta P_a - \Delta P_h|} ,$$

et cette expression est bien sûr non linéaire.

Nous avons expliqué au paragraphe II.5.1, qu'à titre de modèle, nous remplaçons la formule II.5.2.3 - (2) par :

$$\text{II.5.2.3 - (3)} \quad \Delta q = \frac{1}{R} (\Delta P_a - \Delta P_h) .$$

Moyennant cette modification de l'expression de Δq , nous pouvons écrire l'équation linéaire traduisant la variation de l'état du gaz dans la chambre supérieure du pilote soit :

$$\text{II.5.2.3 - (4)} \quad C_h^0 \Delta \dot{P}_h = \frac{1}{R} (\Delta P_a - \Delta P_h) - \rho_h^0 \sigma x_i .$$

II.5.2.4 - Equation linéaire traduisant la variation de l'état du gaz dans la chambre inférieure du pilote

L'équation traduisant la variation de l'état du gaz dans la chambre inférieure du pilote définie au paragraphe II.4.4 s'écrit :

$$\text{II.5.2.4 - (1)} \quad C_b \frac{dP_b}{dt} = -q_4 + \rho_b \sigma \dot{x} ,$$

avec :

$$q_4 = k_4 \frac{P_b - P_{at}}{|P_b - P_{at}|} \sqrt{P_{at} |P_b - P_{at}|} .$$

En régime permanent, on a $P_b^0 = P_{at}$ et $q_4 = 0$. De sorte qu'en régime instationnaire on a en première approximation :

$$\text{II.5.2.4 - (2)} \quad \Delta q_4 = k_4 \frac{\Delta P_b}{|\Delta P_b|} \sqrt{P_b^0 |\Delta P_b|} ,$$

car nous avons supposé que la pression atmosphérique p_{at} est constante.

Nous avons expliqué au paragraphe II.5.1, qu'à titre de modèle, nous remplaçons l'expression II.5.2.4 - (2) qui est non linéaire, par :

$$\text{II.5.2.4 - (3)} \quad \Delta q_4 = \frac{1}{R_4} \Delta P_b .$$

Dans de telles conditions, l'équation linéaire de la variation de l'état du gaz dans la chambre inférieure du pilote s'écrit :

$$\text{II.5.2.4 - (4)} \quad C_b^0 \Delta \dot{P}_b = - \frac{1}{R_4} \Delta P_b + \rho_b^0 \sigma \Delta \dot{x} .$$

II.5.2.5 - Equation linéaire traduisant la variation de l'état du gaz dans la chambre supérieure du servomoteur principal

La formule II.4.5 - (4) traduit la variation de l'état du gaz dans la chambre supérieure du servomoteur principal. Rappelons qu'elle s'écrit :

$$\text{II.5.2.5 - (1)} \quad C_h^* \frac{dP_h^*}{dt} = q^* + \rho_h^* \Sigma \dot{x} ,$$

avec

$$q^* = k_1^* \frac{P_a - P_h^*}{|P_a - P_h^*|} \sqrt{P_h^* |P_a - P_h^*|} .$$

En régime permanent, on a $p_a^0 = p_h^{*0}$ et $q^* = 0$. Comme développé au paragraphe II.5.1, nous remplaçons l'expression :

$$\text{II.5.2.5 - (2)} \quad \Delta q^* = k_1^* \frac{\Delta P_a - \Delta P_h^*}{|\Delta P_a - \Delta P_h^*|} \sqrt{P_h^{*0} |\Delta P_a - \Delta P_h^*|} ,$$

qui est non linéaire, par :

$$\text{II.5.2.5 - (3)} \quad \Delta q^* = \frac{1}{R^*} (\Delta P_a - \Delta P_h^*) .$$

La version linéarisée de l'équation II.5.2.5 - (1) donne :

$$\text{II.5.2.5 - (4)} \quad C_h^{0*} \Delta \dot{P}_h^* = \frac{1}{R^*} (\Delta P_a - \Delta P_h^*) + \rho_h^{0*} \Sigma \Delta \dot{x}$$

II.5.2.6 - Equation linéaire traduisant la variation de l'état du gaz dans la chambre inférieure du servomoteur principal

La formule II.4.6 - (4) traduit la variation de l'état du gaz dans la chambre inférieure du servomoteur principal. Rappelons qu'elle peut s'écrire :

$$\text{II.5.2.6 (1)} \quad C_m \frac{dP_m}{dt} = - q_2 - \rho_m \Sigma \dot{x} ,$$

avec

$$q_2 = k_2 \frac{P_m - P_d}{|P_m - P_d|} \sqrt{P_d |P_m - P_d|} ,$$

traduisant le débit à travers la vanne d'amortissement V_{a2} .

En régime permanent on a $P_m^0 = P_d^0$, de sorte que $q_2^0 = 0$. En régime instationnaire, on a en première approximation :

$$\text{II.5.2.6 - (2)} \quad \Delta q_2 = k_2 \frac{\Delta P_m - \Delta P_d}{|\Delta P_m - \Delta P_d|} \sqrt{P_d^0 |\Delta P_m - \Delta P_d|} .$$

A titre de modèle, nous remplaçons la formule II.5.2.6 - (2) par :

$$\text{II.5.2.6 - (3)} \quad \Delta q_2 = \frac{1}{R_2} (\Delta P_m - \Delta P_d) ,$$

conformément à ce qui a été expliqué au paragraphe II.5.1.

Moyennant cette modification, l'équation linéarisée de l'équation II.5.2.6 - (1) s'écrit :

$$\text{II.5.2.6 - (4)} \quad C_m^0 \dot{\Delta P}_m = - \frac{1}{R_2} (\Delta P_m - \Delta P_d) - \rho_m^0 \Sigma \dot{x}$$

.../...

II.5.2.7 - Equation linéaire traduisant la variation de l'état du gaz dans le volume compris entre la vanne d'amortissement et la vanne de fuite

Rappelons que nous voulons linéariser l'équation II.4.7 - (2) traduisant la variation de l'état du gaz dans le volume compris entre la vanne d'amortissement notée V_{a2} et la vanne de fuite notée V_{a3} .

Soit :

$$\text{II.4.7 - (2)} \quad C_d \frac{dP_d}{dt} = Q_p + q_2 - q_3 ,$$

où les formules de débit Q_p , q_2 et q_3 sont données respectivement par II.4.7 - (4), II.4.7 - (6) et II.4.7 - (5).

Nous avons déjà souligné au § II.4.7, que dans toute les conditions on avait toujours $\Pi > P_d$, en particulier $\Pi > P_d^0$. De même on toujours $P_d > P_a$ (en particulier $P_d^0 > P_a^0$). De sorte qu'en régime permanent, les débits Q_p et q_3 ne s'annulent pas. En revanche, comme développé au § II.5.2.6, le débit q_2 s'annule en régime permanent.

Une linéarisation des formules donnant Q_p et q_3 s'effectue tout à fait légitimement.

$$\Delta Q_p = K_p (x^0 + \Delta x) \sqrt{(P_d^0 + \Delta P_d) (\Pi - P_d^0 - \Delta P_d)} - K_p x^0 \sqrt{P_d^0 (\Pi - P_d^0)} ,$$

soit, tous calculs faits :

$$\Delta Q_p = - \delta \Delta x + \frac{Q_p^0 (\Pi - 2P_d^0)}{2P_d^0 (\Pi - P_d^0)} \Delta P_d ,$$

où $\delta = - K_p [P_d^0 (\Pi - P_d^0)]^{1/2}$

.../...

De manière analogue, on a :

$$\Delta q_3 = k_3 \sqrt{(P_a^0 + \Delta P_a) |(P_d^0 - P_a^0) + (\Delta P_d - \Delta P_a)|} - k_3 \sqrt{P_a^0 |P_d^0 - P_a^0|} ,$$

soit, tous calculs faits :

$$\text{II.5.2.7 - (4)} \quad \Delta q_3 = \frac{q_3^0 (P_d^0 - 2P_a^0)}{2P_a^0 (P_d^0 - P_a^0)} \Delta P_a + \frac{q_3^0}{2 (P_d^0 - P_a^0)} \Delta P_d .$$

Nous avons déjà parlé de la variation du débit q_2 au § II.5.2.6. Nous utiliserons donc la formule II.5.2.6 - (3) soit :

$$\Delta q_2 = \frac{1}{R_2} (\Delta P_m - \Delta P_d) .$$

En rassemblant tous ces résultats, on obtient la version linéarisée de l'équation II.4.7 - (2) :

$$\begin{aligned} \text{II.5.2.7 - (1)} \quad C_d^0 \Delta P_d = & - \delta \Delta x + \frac{Q_p^0 (\Pi - 2P_d^0)}{2P_d^0 (\Pi - P_d^0)} \Delta P_d - \frac{q_3^0 (P_d^0 - 2P_a^0)}{2P_a^0 (P_d^0 - P_a^0)} \Delta P_a \\ & - \frac{q_3^0}{2 (P_d^0 - P_a^0)} \Delta P_d + \frac{1}{R_2} (\Delta P_m - \Delta P_d) . \end{aligned}$$

Posons :

$$\text{II.5.2.7 - (2)} \quad \frac{1}{R_7} = \frac{1}{R_2} + \frac{q_3^0}{2(P_d^0 - P_a^0)} - \frac{Q_p^0 (\Pi - 2P_d^0)}{2(P_d^0 - P_a^0)}$$

.../...

II.5.2.7 - (1) donne en définitive :

$$\text{II.5.2.7 - (3)} \quad C_d^0 \Delta \dot{P}_d = - \delta \Delta x - \frac{1}{R7} \Delta P_d + \frac{1}{R2} \Delta P_M - \frac{q_3^0 (P_d^0 - 2P_a^0)}{2P_a^0 (P_d^0 - P_a^0)} \Delta P_a .$$

II.5.2.8 - Equation linéaire traduisant la variation de l'état du gaz dans le volume aval

La formule que nous voulons linéariser est celle qui est donnée par la relation II.4.8 - (1). Cette équation qui est rappelée ici, traduit la variation de l'état du gaz dans le volume aval.

$$\text{II.4.8 - (1)} \quad C_a \frac{dP_a}{dt} = Q_1 - Q_c + q_3 - q - q^* .$$

Les divers débits qui figurent au second membre ont tous été linéarisés à l'exception de Q_1 et Q_c . Q_1 est le débit à travers le clapet principal et peut, en raison de l'établissement d'un col sonique au niveau du clapet, s'écrire sous la forme :

$$Q_1 = L_1 X \frac{P_e}{2} .$$

La linéarisation de Q_1 au voisinage du régime permanent donne :

$$Q_1^0 + \Delta Q_1 = L_1 (X^0 + \Delta X) \frac{(P_e^0 + \Delta P_e)}{2} ,$$

avec

$$Q_1^0 = L_1 X^0 \frac{P_e^0}{2} ,$$

.../...

représentant le débit nominal soit :

$$\text{II.5.2.8 - (1)} \quad \Delta Q_1 = \alpha \Delta X + \frac{Q_1^0}{P_e^0} \Delta P_e .$$

Le débit de la vanne de décharge V_{ac} a pour expression :

$$Q_c = S_c \sqrt{P_{at} (P_a - P_{at})} .$$

La linéarisation de Q_c au voisinage du régime permanent donne :

$$\text{II.5.2.8 - (2)} \quad \Delta Q_c = \lambda^0 \Delta S_c + \frac{Q_c^0}{2\eta^0} \Delta P_a ,$$

où nous avons posé $\eta^0 = P_a - P_{at}$.

Rappelons que les expressions linéarisées de q_3 , q et q^* sont données respectivement par les formules II.5.2.7 - (4) (voir § II.5.2.7), II.5.2.3 - (3) (voir § II.5.2.3) et II.5.2.5 - (3) (voir § II.5.2.5).

En rassemblant toutes ces expressions, on obtient la version linéarisée de II.4.8 - (1), soit :

$$C_a^0 \frac{d\Delta P_a}{dt} = \alpha \Delta X + \frac{Q_1^0}{P_e^0} \Delta P_e - \lambda^0 \Delta S_c - \frac{Q_c^0}{2\eta^0} \Delta P_a + \frac{q_3^0}{2(P_d^0 - P_a^0)} \Delta P_d \\ + \frac{q_3^0 (P_d^0 - 2P_a^0)}{2P_a^0 (P_d^0 - P_a^0)} \Delta P_a - \frac{1}{R} (\Delta P_a - \Delta P_h) - \frac{1}{R^*} (\Delta P_a - \Delta P_h^*) .$$

Posons :

$$\frac{1}{R_g} = \frac{Q_c^0}{2\eta^0} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R^*} - \frac{q_3^0 (P_d^0 - 2P_a^0)}{2P_a^0 (P_d^0 - P_a^0)} ,$$

.../...

on a l'équation définitive suivante :

II.5.2.8 - (3)

$$C_a^0 \frac{d}{dt} \Delta P_a = \alpha \Delta X - \frac{1}{R_8} \Delta P_a + \frac{1}{R} \Delta P_h + \frac{1}{R^*} \Delta P_h^* + \frac{q_3^0}{2(P_d^0 - P_a^0)} \Delta P_d$$

$$- \lambda^0 \Delta S_c + \frac{Q_1^0}{P_e^0} \Delta P_e .$$

II.6 - PRESENTATION DU SYSTEME LINEAIRE

Comme tout système linéaire, le système d'équations que nous avons obtenu au § II.5 peut être décrit sous forme matricielle. Auparavant, nous écrirons les équations de la dynamique pour les deux équipages mobiles, après linéarisation :

$$\frac{d}{dt} \Delta x = \Delta \dot{x}$$

$$\frac{d}{dt} \Delta \dot{x} = - \frac{f}{m} \Delta \dot{x} - \frac{k}{m} \Delta x + \frac{\sigma}{m} (\Delta P_h - \Delta P_b)$$

$$\frac{d}{dt} \Delta X = \Delta \dot{X}$$

$$\frac{d}{dt} \Delta \dot{X} = - \frac{F}{M} \Delta \dot{X} - \frac{k}{M} \Delta X + \frac{\Sigma}{M} (\Delta P_M - \Delta P_h^*)$$

Nous considérons désormais que le système est parfaitement connu si on connaît, à chaque instant les valeurs prises par les 10 variables suivantes :

Δx , $\Delta \dot{x}$, ΔX , $\Delta \dot{X}$, ΔP_h , ΔP_b , ΔP_h^* , ΔP_M , ΔP_d , ΔP_a que nous rangeons en matrice colonne à 10 éléments

$$U = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \dot{x} \\ \Delta X \\ \Delta \dot{X} \\ \Delta P_h \\ \Delta P_b \\ \Delta P_h^* \\ \Delta P_M \\ \Delta P_d \\ \Delta P_a \end{bmatrix}$$

U est une fonction $t \rightarrow U(t)$ que l'on cherche à déterminer.

.../...

Nous dirons pour employer une terminologie d'usage courant en automatique [12] que U est la variable d'état du système.

Les équations du § II.5 font aussi intervenir deux fonctions :

$$t \rightarrow \Delta S_c(t)$$

$$t \rightarrow \Delta P_e(t)$$

qui ne sont pas des inconnues, mais sont des fonctions connues du temps qui caractérisent l'excitation du système.

La fonction $t \rightarrow \Delta S_c(t)$ remplace dans le modèle, la donnée en fonction du temps de la charge à laquelle doit répondre le réseau aval.

La fonction $t \rightarrow \Delta P_e(t)$ simule les variations de pression amont du régulateur.

Nous dirons que les quantités ΔS_c et ΔP_e caractérisent à chaque instant l'excitation extérieure appliquée au régulateur et nous les rangeons sous la forme d'une matrice colonne à deux éléments et notée E. Soit :

$$E = \begin{bmatrix} \Delta S_c \\ \Delta P_e \end{bmatrix} .$$

L'ensemble des équations obtenues au § II.5 peut se mettre sous la forme :

$$\frac{dU}{dt} = AU + BE ,$$

où A désigne une matrice carrée 10 x 10, indépendante du temps, dont les éléments sont donnés par le tableau suivant :

.../...

Matrice A :

$$\begin{array}{cccccccccc}
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -k/m & -f/m & 0 & 0 & \sigma/m & -\sigma/m & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -K/M & -F/M & 0 & 0 & -\Sigma/M & \Sigma/M & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{\dot{\rho}_h^\sigma}{C_h} & 0 & 0 & -\frac{1}{RC_h} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{RC_h} \\
 0 & \frac{\dot{\rho}_b^\sigma}{C_b} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_4 C_b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{\dot{\rho}_h^\Sigma}{C_h^*} & 0 & 0 & -\frac{1}{R C_h^*} & 0 & 0 & \frac{1}{R C_h^*} \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{\dot{\rho}_h^\Sigma}{C_m} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_2 C_m} & \frac{1}{R_2 C_m} & 0 \\
 -\frac{\delta}{C_d} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_2 C_d} & \frac{1}{R_7 C_d} & \frac{q_3(\dot{P}_d - 2\dot{P}_a)}{2\dot{P}_a(\dot{P}_d - \dot{P}_a)C_d} \\
 0 & 0 & \frac{\alpha}{C_a} & 0 & \frac{1}{RC_a} & 0 & \frac{1}{R C_a^*} & 0 & \frac{q_3}{2C_a(\dot{P}_d - \dot{P}_a)} & -\frac{1}{R_8 C_a}
 \end{array}$$

.../...

La matrice B, également indépendante du temps, est une matrice à 10 lignes et deux colonnes dont les éléments sont rangés dans le tableau suivant.

Matrice B :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{\lambda^{\circ}}{C_a^{\circ}} & \frac{Q_1^{\circ}}{C_a^{\circ} P_e^{\circ}} \end{bmatrix}$$

Nous voyons donc que le système linéaire fait intervenir tant dans la matrice A que dans la matrice B, des paramètres caractéristiques du régulateur.

Par abus de langage, nous dirons que U est le vecteur des variables d'état du système, de même s'agissant de E, nous dirons que c'est le vecteur des variables d'entrée du système.

Pour pouvoir soumettre notre modèle tant à la simulation numérique qu'à une étude de stabilité, et compte tenu du degré très élevé du système, il nous a semblé utile de fixer les paramètres en retenant un cas type d'appareil. L'intérêt de cette démarche, est la possibilité qu'elle nous offre de pouvoir confronter le modèle à la réalité représentée par les résultats d'une campagne de mesures effectuée sur un appareil déterminé. D'où l'étude que nous avons menée sur un cas particulier de détendeur-régulateur et qui fait l'objet du chapitre suivant.

.../...

III - APPLICATION A UN CAS PARTICULIER DE DETENDEUR

III.0 - INTRODUCTION

III.0.1 - PRESENTATION DU REGULATEUR PILOTE FRANCEL BP

Rappelons que le but du présent mémoire, est de construire un modèle permettant de décrire le fonctionnement dynamique des régulateurs-détendeurs de gaz. Le but ultime d'une telle modélisation étant de simuler numériquement le modèle et d'étudier la stabilité de l'appareil.

L'objectif de la recherche est double : d'une part il s'agit de construire un modèle mathématique fiable dont le rôle est de remplacer une campagne de mesures, longue à mettre en place, par une simulation numérique qui peut être effectuée très rapidement. Nous verrons que seul le modèle non linéaire peut être vraiment considéré comme fiable de ce point de vue. D'autre part il s'agit, pour un type d'appareil déterminé, d'arriver à prédire très rapidement les caractéristiques de stabilité en fonction des valeurs des paramètres de réglage du fonctionnement de l'appareil. Seul un modèle linéaire permet d'atteindre ce second volet de l'objectif dont l'exigence est la rapidité et la simplicité d'exécution obtenues aux prix d'une moindre exigence concernant l'exactitude de l'adéquation du modèle à l'appareil.

La démarche suivie en vue d'atteindre ce double objectif a sans doute une portée générale, pour une large classe de régulateurs-détendeurs, toutefois, la réalisation effective du double objectif ne peut se faire que sur un appareil de type déterminé et nous avons choisi un Francel BP pour mener à bien cette réalisation.

Comme l'indique son nom, le régulateur Francel BP a pour fonction d'une part de détendre le gaz d'un niveau de pression amont égal à 4 bar à un niveau de pression aval se situant au voisinage de 20 mbar (ces pressions étant données en valeur relative) et d'autre part de réguler ce niveau de pression aval.

Le régulateur Francel BP ne diffère pas de l'ensemble des régulateurs détendeurs de type piloté, puisqu'on retrouve les trois modules principaux c'est-à-dire :

- le prédétendeur,

.../...

- le pilote,
- le détendeur principal.

III.0.2 - ESSAIS EN STATIQUE

Le but de cette partie est de déterminer les valeurs des différents organes caractéristiques du régulateur Francel BP, correspondant aux paramètres qui apparaissent dans le système linéaire.

Pour cela, des essais ont été effectués sur l'appareil au Service Métrologie et Matériels de Réseaux du Gaz de France. Signalons que compte tenu de la difficulté de mise en oeuvre en régime dynamique de certaines caractéristiques, la plupart de ces essais ont été effectués en régime statique.

III.0.2.1 - Raideur de ressort pilote et de ressort du détendeur principal

Nous avons vu que chacun des éléments constitutifs de la partie que nous appelions équipage mobile, comportait, entre autres éléments, un ressort. La raideur du ressort pilote est caractérisée par le paramètre k , tandis que celle du ressort du détendeur principal est caractérisée par le paramètre K .

D'une façon générale, et pour des raisons de stabilité, les régulateurs Francel BP peuvent être équipés de ressorts dont les constantes de raideur peuvent prendre des valeurs différentes suivant la spécificité du servomoteur et du pilote utilisés. Pour les Francel BP en service, les ressorts utilisés communément sur l'organe pilote ont des raideurs qui prennent l'une des valeurs ci-dessous :

- * $k = 10^3 \text{ N/m}$,
- * $k = 1.86 \cdot 10^3 \text{ N/m}$,
- * $k = 4.2 \cdot 10^3 \text{ N/m}$,
- * $k = 8.2 \cdot 10^3 \text{ N/m}$.

Dans toute l'étude théorique, nous nous servirons de la constante $k = 1.86 \cdot 10^3 \text{ N/m}$, sauf mention expresse du contraire.

De même pour le détendeur principal, la valeur de la raideur du ressort retenue est $K = 8.1 \cdot 10^3 \text{ N/m}$.

.../...

III.0.2.2 - Loi d'ouverture du clapet principal

Un montage du régulateur Francel BP sur un réseau du SMM, et alimenté en gaz, nous a permis de déterminer la loi d'ouverture du clapet principal, c'est-à-dire la loi donnant le débit principal en fonction du déplacement de ce clapet.

Pour cela, le régulateur Francel BP a été pourvu d'un comparateur qui permet de repérer la position du clapet principal à tout instant en fonction du débit dont la valeur est donnée par un compteur ad'hoc.

La figure III.0.2.2 - (1) montre clairement que la loi de variation du débit à travers le clapet en fonction du déplacement de celui-ci à partir de sa position nominale, est linéaire. Ce qui confirme l'une des hypothèses faite dans la modélisation.

La valeur de la pente de cette loi débit-ouverture, appelée α dans le modèle linéaire, est donc déterminée.

Dans le cas qui nous intéresse on a $\alpha = 63 \frac{\text{kg/s}}{\text{m}}$

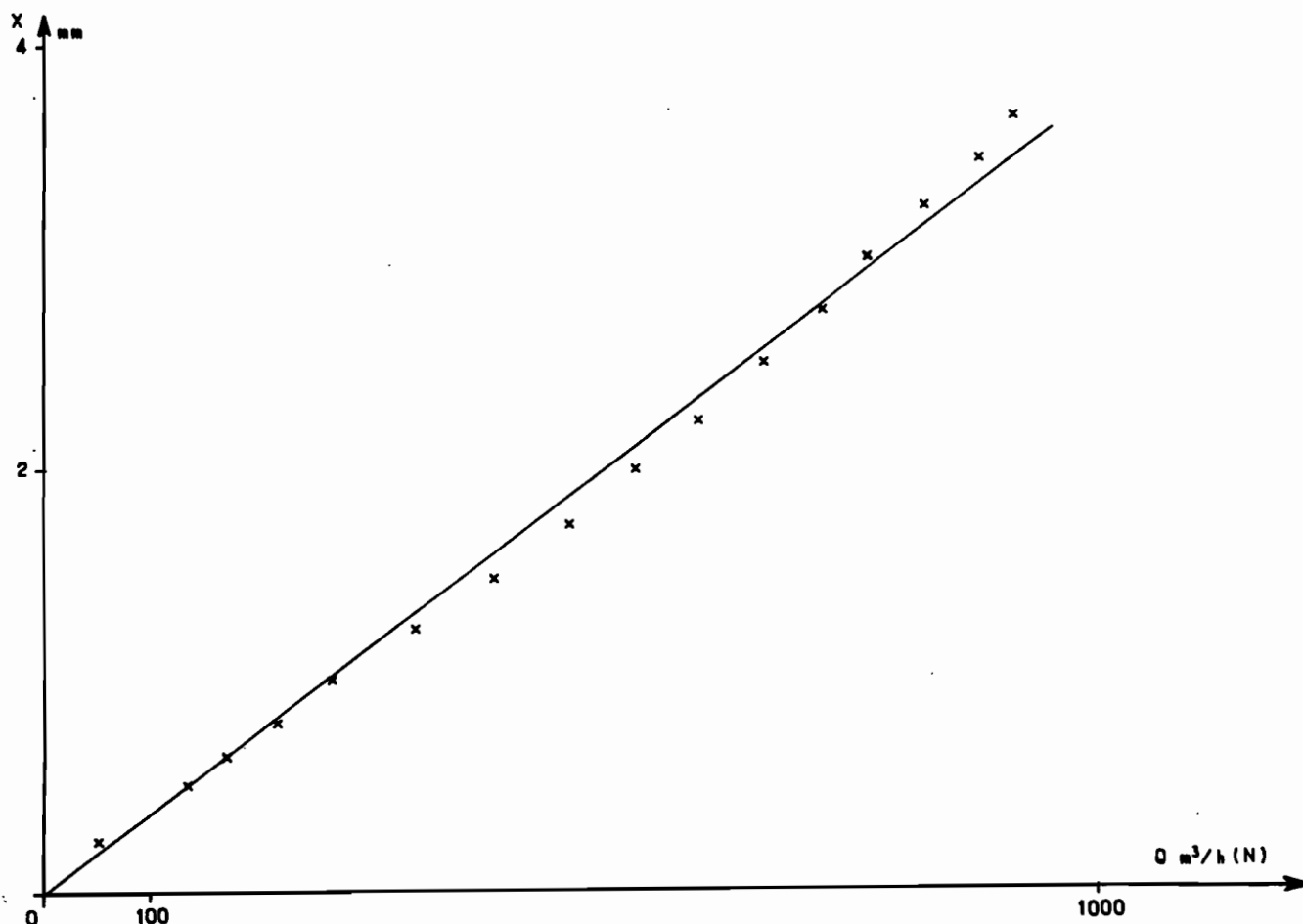


figure III.0.2.2.1 - Loi d'ouverture du clapet principal

III.0.2.3 - Mesure des pertes de charge

Comme signalé au § II.5.1, certains organes du régulateur, en l'occurrence la vanne d'amortissement V_{a2} , les prises d'influence du pilote et du détenteur principal, l'évent pilote, ont un débit nul en régime permanent. Par conséquent, la loi débit-différence de pression, n'est pas linéarisable au voisinage du régime permanent. Mais pour pouvoir utiliser la théorie linéaire, cette loi débit-différence de pression est remplacée par une loi linéaire dont le coefficient est estimé et dépend de la plage de fonctionnement de l'appareil que l'on a en vue d'étudier.

Des essais ont donc été effectués sur ces différents organes, et ont permis de déterminer avec une précision assez satisfaisante les lois débit-différence de pression (de part et d'autre de l'organe considéré).

Les résultats de ces mesures très difficiles à effectuer en raison des petits débits qu'ils mettent en oeuvre sont rassemblés dans les figures III.0.2.3 (2) a, b, c, d. Ces figures donnent, chaque fois, un débit porté en ordonnées en fonction d'une différence de pression portée en abscisses. Les courbes, qui mettent parfaitement en évidence la non linéarité de ces lois débit-différence de pression, sont en bon accord, chacune avec la forme retenue dans la modélisation, à savoir :

$$\text{III.0.2.3 (1)} \quad Q = K \frac{\Delta P}{|\Delta P|} \sqrt{|\Delta P|} .$$

Pour le modèle linéaire nous avons dû remplacer cette relation par une loi linéaire en utilisant un procédé appelé module sécant qui conduit à :

$$\text{III.0.2.3.(2)} \quad Q = \frac{1}{R} \Delta P .$$

La valeur de R étant prise de manière à ce que les valeurs déduites de III.0.2.3 (1) et III.0.2.3 (2) coïncident pour une valeur particulière ΔP_m considérée comme valeur moyenne caractéristique dans les essais effectués.

.../...

* La figure III.0.2.3.2.a est relative à la loi débit-différence de pression de la prise d'influence du pilote.

* La figure III.0.2.3.2.b est relative à la loi débit-différence de pression de la prise d'influence du détenteur principal.

* La figure III.0.2.3.2.c est relative à la loi débit-différence de pression de l'évent pilote.

* La figure III.0.2.3.d est relative à la loi débit-différence de pression pour une ouverture de la vanne d'amortissement.

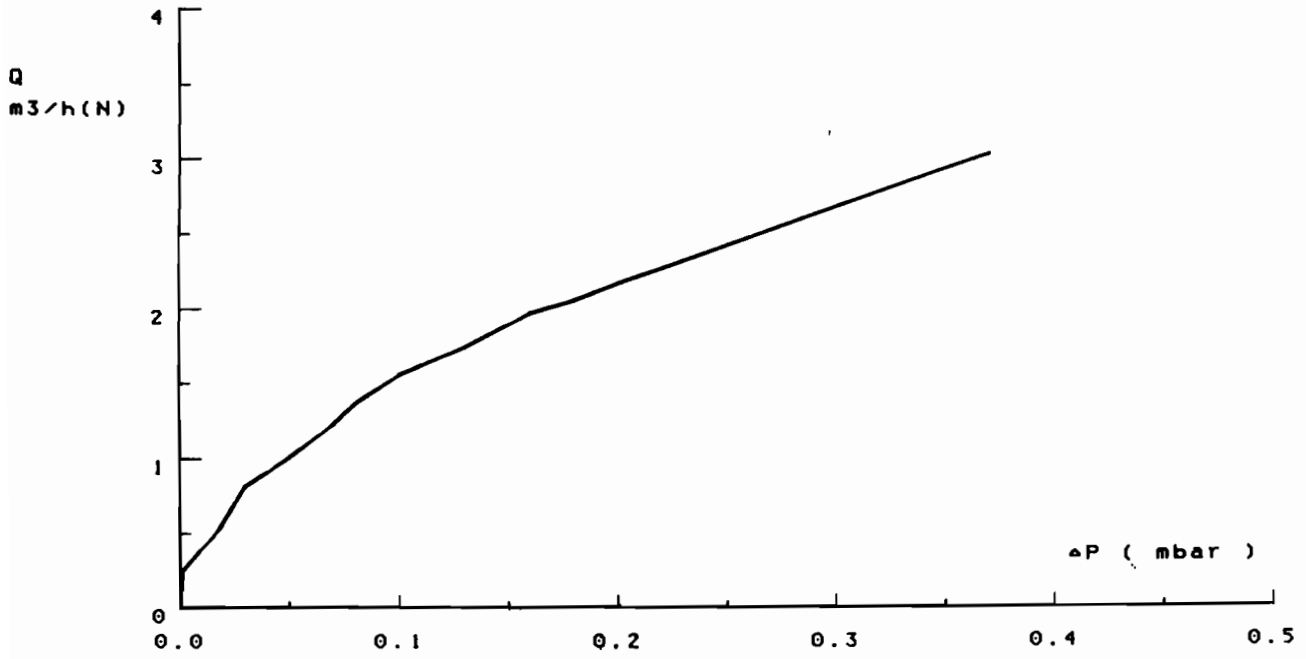


FIGURE III.0.2.3.2a - LOI DEBIT-DIFFERENCE DE PRESSION
DE LA PRISE D'INFLUENCE DU PILOTE

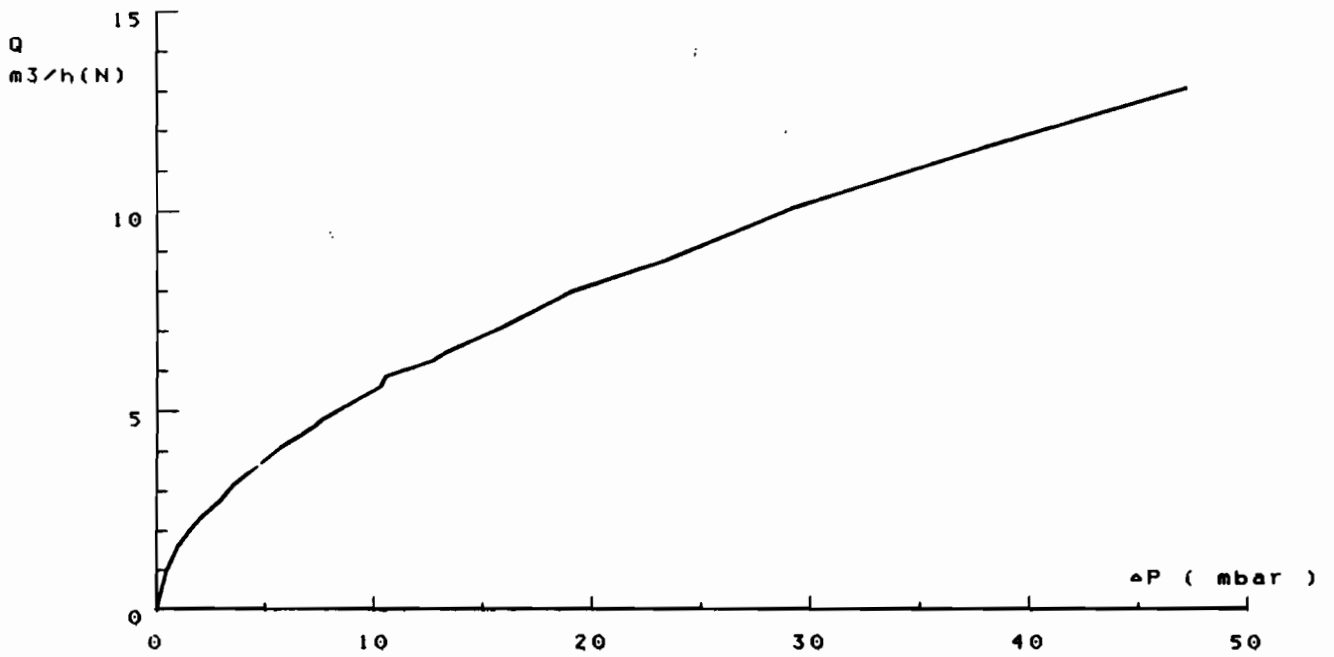


FIGURE III.0.2.3.2b - LOI DEBIT-DIFFERENCE DE PRESSION
DE LA PRISE D'INFLUENCE DU DETENDEUR PRINCIPAL

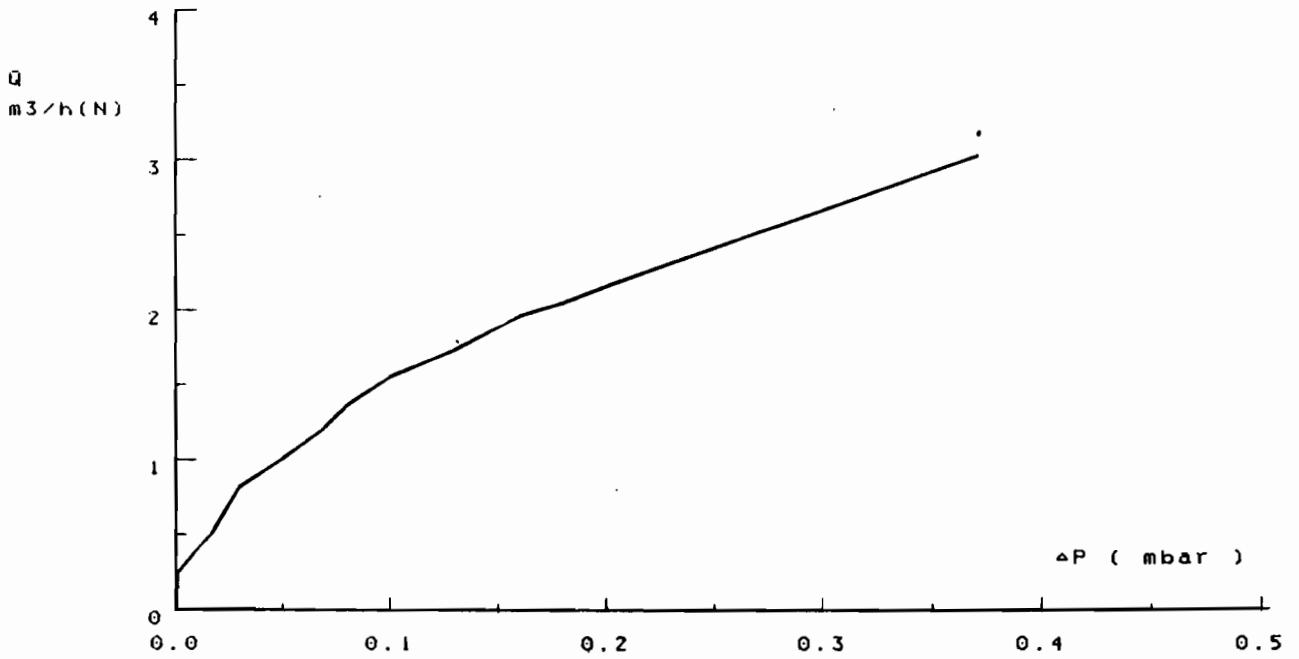


FIGURE III.0.2.3.2c - LOI DEBIT-DIFFERENCE DE PRESSION
DE L'EVENT PILOTE

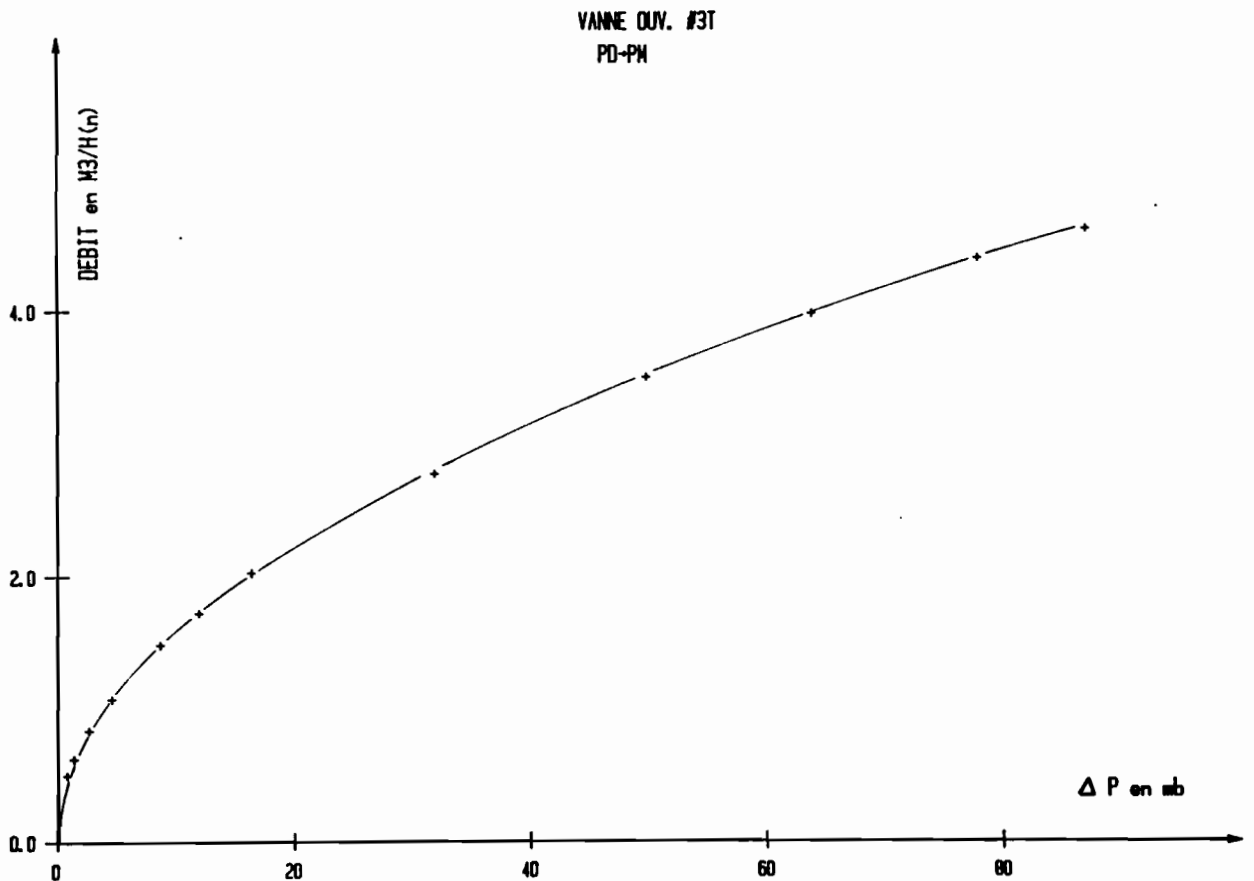


FIGURE III.0.2.3.2d - LOI DEBIT-DIFFERENCE DE PRESSION
DE LA VANNE D'AMORTISSEMENT

III.0.2.4 - Etude de la vanne de décharge dont la fonction est de faire varier le débit appelé

Nous avons, dans notre modèle, supposé que le volume aval était délimité par une vanne de décharge notée V_{ac} , qui débite à l'atmosphère et dont le rôle est de régler le débit sortant du volume aval, de manière à le prescrire selon une loi horaire

$$Q_c = S_c \sqrt{P_{at} (P_a - P_{at})} .$$

Cette vanne nous permet de simuler les divers appels en débit. La vanne que nous avons retenue, est constituée d'une part d'un clapet dont l'ouverture et la fermeture sont commandées par une électrovanne et un circuit d'air comprimé, et d'autre part d'une ouverture fixe permettant d'imposer le débit nominal de décharge Q_c° .

La linéarisation du terme Q_c , s'écrit comme mentionné au § II.5.2.8.

$$\Delta Q_c = \lambda^\circ \Delta S_c + \frac{Q_c^\circ}{2\eta^\circ} \Delta P_a .$$

Afin de pouvoir déterminer la valeur de λ° pour notre vanne de décharge retenue, nous avons à pression aval constante, déterminé la valeur du débit pour différentes positions du clapet de cette vanne.

La loi donnant la variation du débit de décharge en fonction de l'ouverture de cette vanne caractérisée par ΔS_c , nous permet de déterminer la valeur de la constante λ° .

Dans notre cas on a $\lambda^\circ \approx 7 \frac{\text{kg/s}}{\text{m}}$.

III.0.2.5 - Différentes valeurs caractéristiques du Francel BP

Outre les valeurs données dans les paragraphes précédents, on trouvera en Annexe 4, toutes les valeurs des grandeurs caractéristiques du Francel BP qui permettront d'effectuer l'étude de la stabilité du système linéaire modélisant cet appareil.

III.1 - ETUDE DU SYSTEME LINEAIRE

III.1.0 - RAPPEL SUR LA THEORIE DE LA STABILITE DU SYSTEME LINEAIRE

Nous avons vu au § II.6, que notre système linéaire pouvait s'écrire sous la forme :

$$\text{III.1.0 - (1)} \quad \frac{dU}{dt} = AU + BE$$

où

* U est la matrice colonne dont les composantes sont des fonctions inconnues du temps décrivant l'état instantané du système.

* E est la matrice colonne dont les composantes sont des fonctions connues du temps qui caractérisent l'excitation du système.

Nous avons en outre les conditions suivantes pour notre système :

$$\left\{ \begin{array}{l} U = [0] \text{ dans un voisinage de } t = -\infty \\ E(t) = 0 \text{ pour } t < t_0 \text{ où } t_0 \text{ désigne l'instant initial.} \end{array} \right.$$

Dans tout ce qui suit, nous prendrons comme instant initial $t_0 = 0$.

Le système d'équations définissant le système mécanique dont on veut étudier la stabilité sera donc du type :

$$\text{III.1.0 (3)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dU}{dt} = AU + BE \\ U = [0] \text{ dans un voisinage de } t = -\infty \\ E(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \end{array} \right.$$

Habituellement, dans de nombreuses études de stabilité, le système ne comporte pas d'excitations et on dit instinctivement que le système est stable si, une petite variation des données initiales entraîne une variation de la solution qui reste petite à tout instant. Cette notion peut être quantifiée.

.../...

Dans le cas qui nous occupe, la notion de stabilité est légèrement différente. L'intuition nous indique qu'un système stable doit avoir la caractéristique, pour l'instant imprécise, suivante : Une variation suffisamment faible de l'excitation $E(t)$ entraîne une variation également faible de la réponse $U(t)$. On peut quantifier cette notion en écrivant que la solution $U(t)$ est une fonctionnelle linéaire de l'excitation, c'est-à-dire :

$$\text{III.1.0 - (4) } U(t) = \mathcal{F}(\cdot, t; E(\tau), \tau \leq t)$$

On peut caractériser la petitesse d'une variation $\Delta E(t)$ de l'excitation par une norme (par exemple la norme du maximum).

$$\text{III.1.0 - (5) } |||\Delta E||| = \sup_{0 < t < \infty} ||\Delta E(t)||$$

De même, on peut caractériser la petitesse de la variation $\Delta U(t)$ de la solution par une (éventuellement autre) norme (par exemple la norme du maximum) soit :

$$\text{III.1.0 - (6) } |||\Delta U||| = \sup_{0 < t < \infty} ||\Delta U(t)||$$

Nous dirons alors que le système est stable, si la fonctionnelle $\mathcal{F}(\cdot, \cdot, \cdot)$ vérifie

$$\text{III.1.0 - (7) } |||\mathcal{F}(\cdot, \cdot, \cdot)||| < K |||\Delta E|||$$

Ce qui veut dire que si nous voulons rendre la variation $\Delta U(t)$ à tout instant inférieure, au sens de la norme des matrices, à une quantité ε positive arbitrairement petite, soit :

$$||\Delta U(t)|| < \varepsilon \quad \forall t,$$

il suffira, que les variations d'excitation remplissent la condition :

$$||\Delta E|| < \varepsilon/K.$$

.../...

Dans la première version de stabilité, on parle de stabilité asymptotique si $||\Delta U(t)||$ (au sens de la norme d'une matrice) tend vers zéro quand t tend vers l'infini. La notion correspondante dans notre cas est la suivante. Supposons que la variation $\Delta E(t)$ ne soit non nulle que sur un intervalle de temps fini, nous pouvons dire que le système est asymptotiquement stable si, d'une part il est stable au sens déjà indiqué et si par ailleurs :

$$||\Delta U(t)|| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

Afin d'établir la stabilité du système on est amené à résoudre le système III.1.0 - (3).

Supposons dans un premier temps, que $E(t)$ soit une fonction continue à support compact.

On effectue la transformation de Laplace suivante :

$$\tilde{U}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt} U(t) dt$$

On remarque que l'intégrale est toujours étendue à un intervalle ouvert du type $[a, +\infty[$ puisque l'on a imposé à $t \rightarrow U(t)$ de s'annuler dans un voisinage de $-\infty$.

De manière plus précise, on a convenu que toute fonction excitatrice $t \rightarrow E(t)$ étant nulle pour $t < 0$, sa transformée de Laplace peut donc être écrite

$$\tilde{E}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} E(t) dt$$

Par ailleurs, comme nous considérons des fonctions excitatrices à support compact, pour chaque fonction excitatrice il existe un b tel que :

$$\tilde{E}(p) = \int_0^b e^{-pt} E(t) dt$$

.../...

Le système III.1.0 - (3) devient par transformation de Laplace.

$$\text{III.1.0 - (8)} \quad p \bar{U}(p) - A \bar{U}(p) + B \bar{E}(p),$$

soit encore :

$$\text{III.1.0 - (8bis)} \quad (pI - A) \bar{U}(p) = B \bar{E}(p)$$

Dans, pourvu que $\det(pI - A) \neq 0$, on peut écrire que :

$$\text{III.1.0 - (9)} \quad \bar{U}(p) = (pI - A)^{-1} B \bar{E}(p)$$

Posons $\tilde{w}(p) = (pI - A)^{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) e^{-pt} dt$

où $w(t)$ est une fonction matricielle du temps définie par :

$$\text{III.1.0 - (10)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dw}{dt} = Aw, \quad t > 0 \\ w(0) = I \end{array} \right.$$

On remarque que $\tilde{w}(p)$ est une fonction méromorphe. Nous faisons, pour la suite de l'étude, l'hypothèse que toutes les valeurs propres de A sont simples. Cette hypothèse n'est pas restrictive, si on a en vue les appareils que nous voulons étudier. De sorte que $\tilde{w}(p)$ est une fonction méromorphe avec des pôles simples. De plus, $E(t)$ s'annulant en dehors d'un intervalle fini, $\bar{E}(p)$ n'a aucun point singulier à distance finie. Tant et si bien que la fonction $(pI - A)^{-1} B \bar{E}(p)$ n'a que des pôles simples à distance finie.

A ce stade du raisonnement, il est important de remarquer que $\tilde{w}(p)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\tilde{w}(p) = \frac{1}{\det(pI - A)} M(p) .$$

.../...

On dit que $\det(pI - A)$ est le polynôme caractéristique de la matrice A et les p solutions de $\det(pI - A) = 0$ sont les valeurs propres de la matrice A . Avec les vecteurs propres correspondants, ils définissent les modes propres du système. D'après la formule III.1.0 - (9), on remarque que $\tilde{U}(p)$ est le produit de $\tilde{w}(p)$ et $B \tilde{E}(p)$. Comme la transformée de Laplace d'un produit de convolution est un produit ordinaire et réciproquement, on a :

$$\text{III.1.0 - (11)} \quad U(t) = \int_{-\infty}^t w(t - \tau) B E(\tau) d\tau$$

Pour calculer $U(t)$, on voit qu'on est amené à chercher $w(t)$.

On a :

$$\text{III.1.0 - (11)} \quad w(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{p-\sigma+i\omega} e^{pt} \tilde{w}(p) dp = \frac{1}{2i\pi} \int_{p-\sigma+i\omega} e^{pt} (pI - A)^{-1} dp$$

justifions la formule III.1.0 - (11)

Soit L la droite d'équation $\text{Re } p = \sigma_0$. Le réel σ_0 est choisi de manière que tous les zéros de $\det(pI - A) = 0$ vérifient $\text{Re } p < \sigma_0$.

$(pI - A)^{-1}$ est une fonction holomorphe de p pour $\text{Re } p > \sigma_0$, $|p| < +\infty$.

L'intégrale

$\int_{-R}^R e^{(\sigma + i\omega)t} [(\sigma + i\omega)I - A]^{-1} d\omega$ est parfaitement définie.

$$(pI - A)^{-1} = p^{-1} \left(I - \frac{1}{p} A \right)^{-1}$$

$$\left(I - \frac{1}{p} A \right)^{-1} = I + \frac{1}{p} A + \dots + \left(-\frac{1}{p} \right)^n A^n + \dots$$

.../...

d'où :

$$\| (1 - \frac{1}{p} A)^{-1} \| \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|p|^n} \|A\|^n = (1 - \frac{\|A\|}{|p|})^{-1}$$

$$(p1 - A)^{-1} = \frac{1}{p} 1 + \frac{A}{p^2} (1 - \frac{1}{p} A)^{-1}$$

$$e^{pt} (p1 - A)^{-1} = \frac{1}{p} e^{pt} 1 + \frac{A}{p^2} e^{pt} (1 - \frac{1}{p} A)^{-1}$$

Comme $\| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\sigma + i\omega)^2} A e^{(\sigma + i\omega)t} (1 - \frac{1}{\sigma + i\omega} A)^{-1} d\omega \| < +\infty$

pour que l'intégrale définie par la formule III.1.0 - (11) existe, il suffit que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(\sigma+i\omega)t}}{(\sigma+i\omega)} d\omega \quad \text{existe}$$

On a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(\sigma+i\omega)t}}{(\sigma+i\omega)} d\omega &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\sigma-i\omega) e^{(\sigma+i\omega)t}}{\sigma^2 + \omega^2} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma e^{(\sigma+i\omega)t}}{\sigma^2 + \omega^2} d\omega - i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega e^{(\sigma+i\omega)t}}{\sigma^2 + \omega^2} d\omega \end{aligned}$$

On voit que la première expression de l'intégrale est parfaitement définie puisque :

$$\| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma e^{(\sigma+i\omega)t}}{\sigma^2 + \omega^2} d\omega \| \leq |\sigma| e^{\sigma t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\sigma^2 + \omega^2} < +\infty$$

.../...

Par conséquent, pour que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(\sigma+i\omega)t}}{(\sigma+i\omega)} d\omega \quad \text{existe,}$$

il suffit que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega e^{(\sigma+i\omega)t}}{\sigma^2 + \omega^2} d\omega \quad \text{existe.}$$

En fait, il suffira de démontrer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega e^{i\omega t}}{\sigma^2 + \omega^2} d\omega \quad \text{existe.}$$

Pour cela, considérons la fonction complexe suivante :

$$f(z) = \frac{ze^{-zt}}{\sigma^2 - z^2}.$$

Intégrons $f(z)$ sur un contour Γ formé d'une portion $[-R, R]$ de l'axe imaginaire et d'un demi-cercle de centre 0 et de rayon R dont C_1 est le contour. R est choisi suffisamment grand, pour que le point réel positif σ soit à l'intérieur du domaine.

D'après le théorème de Cauchy, on a :

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2i \Pi \operatorname{Res}(f(z), \sigma).$$

D'autre part, on a :

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + i \int_{+R}^{-R} f(i\omega) d\omega$$

où $z = x + i\omega$.

.../...

$$\int_{+R}^{-R} f(i\omega) d\omega = \int_R^{-R} \frac{i\omega e^{-i\omega t}}{\sigma^2 + \omega^2} d\omega .$$

D'où :

$$\begin{aligned} i \int_{+R}^{-R} f(i\omega) d\omega &= - \int_R^{-R} \frac{\omega e^{-i\omega t}}{\sigma^2 + \omega^2} d\omega . \\ &= - \int_{-R}^R \frac{\omega e^{i\omega t}}{\sigma^2 + \omega^2} d\omega \end{aligned}$$

En faisant tendre $R \rightarrow \infty$, on a, par application du lemme de Jordan :

$$\oint_{C_1} f(z) dz \rightarrow 0 .$$

En fait, le lemme de Jordan ne s'applique pas directement, car lorsque $R \rightarrow \infty$ on voit, en posant $z = x + iy$, que :

$$|z f(z)| \rightarrow e^{-xt} \text{ quand } R \rightarrow \infty$$

de sorte que $|z f(z)|$ ne tend pas vers 0 en tout point de C_1 .

Mais on peut d'abord transformer l'intégrale par une intégration par parties.

$$\oint_{C_1} f(z) dz = - \frac{1}{t} \left[\frac{ze^{-zt}}{(\sigma^2 - z^2)} \right]_{C_1} + \frac{1}{t} \oint_{C_1} \frac{(\sigma^2 + z^2) e^{-zt}}{(\sigma^2 - z^2)^2} dz$$

L'expression entre $[\cdot]_{C_1} \rightarrow 0$ quand $R \rightarrow \infty$.

D'autre part, le lemme de Jordan s'applique à la nouvelle intégrale.

En définitive $\oint_{C_1} f(z) dz \rightarrow 0$ quand $R \rightarrow \infty$.

.../...

Il en résulte donc que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega e^{i\omega t}}{\sigma^2 + \omega^2} d\omega = -2i\pi \operatorname{Res}(f(z), \sigma)$$

qui est parfaitement définie.

D'où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(\sigma+i\omega)t}}{(\sigma+i\omega)} d\omega \quad \text{est définie, et}$$

il s'en suit que la formule III.1.0 - (11) l'est aussi.

Soit Σ l'ensemble des zéros du polynôme caractéristique (que l'on notera P_k).

Si on prend une droite λ d'équation $\operatorname{Re} p = \text{constante}$, telle que Σ soit compris entre L ($\operatorname{Re} p = \sigma_0$) et λ . On entoure chaque p_k par un cercle Γ_k .

La formule III.1.0 - (11) devient par application du théorème de Cauchy

$$\text{III.1.0 - (12)} \quad w(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\lambda} e^{pt} (pI - A)^{-1} dp + \sum_{k \in \Sigma} \chi_k \exp(p_k t)$$

$$\text{On montre que } \frac{1}{2i\pi} \int_{\lambda} e^{pt} (pI - A)^{-1} dp \xrightarrow{\lambda \rightarrow -\infty + iR} 0$$

En effet on a,

$$(pI - A)^{-1} = p^{-1} \left(I - \frac{1}{p} A \right)^{-1}$$

.../...

$$\begin{aligned}
 \text{d'où } ||(pI - A)^{-1} X|| &\leq \frac{1}{|p|} ||(I - \frac{1}{p} A)^{-1} X|| \\
 &\leq \frac{1}{|p|} (1 + \frac{||A||}{|p|}) ||X|| .
 \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que :

$$\int_{\lambda} \frac{e^{pt}}{p} dp \xrightarrow{\lambda \rightarrow -\infty + i\mathbb{R}} 0 .$$

On a :

$$\begin{aligned}
 \int_{\lambda} \frac{e^{pt}}{p} dp &= i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\sigma - i\omega) e^{(\sigma+i\omega)t}}{\sigma^2 + \omega^2} d\omega \\
 &= i\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(\sigma+i\omega)t}}{\sigma^2 + \omega^2} d\omega + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega e^{(\sigma+i\omega)t}}{\sigma^2 + \omega^2} d\omega
 \end{aligned}$$

Intéressons nous d'abord au comportement de la première intégrale.

$$||\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(\sigma+i\omega)t}}{\sigma^2 + \omega^2} d\omega|| \leq |\sigma| e^{\sigma t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\sigma^2 + \omega^2} \xrightarrow{\sigma \rightarrow -\infty} 0$$

Intéressons nous ensuite au comportement de la seconde intégrale. En reprenant le même calcul développé précédemment utilisant le lemme de Jordan et le théorème de Cauchy, on montre que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega e^{i\omega t}}{\sigma^2 + \omega^2} d\omega = 2i\pi \operatorname{Res} \left(\frac{z e^{zt}}{\sigma^2 - z^2}, \sigma \right)$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega e^{(\sigma+i\omega)t}}{\sigma^2 + \omega^2} d\omega &= e^{\sigma t} 2i\pi \operatorname{Res} \left(\frac{z e^{zt}}{\sigma^2 - z^2}, \sigma \right) \\
 &= \frac{e^{2\sigma t}}{\sigma - 2} 2i\pi \xrightarrow{\sigma \rightarrow -\infty} 0
 \end{aligned}$$

.../...

D'où :

$$\int_{\lambda} \frac{e^{pt}}{p} dp \xrightarrow{\lambda \rightarrow -\infty + i\mathbb{R}} 0 .$$

On a donc :

$$\text{III.1.0 - (13)} \quad w(t) = \sum_{k \in \Sigma} \exp(p_k t) \chi_k, \quad \text{où}$$

$$\chi_k = \lim_{p \rightarrow p_k} (p - p_k) (pI - A)^{-1}$$

Tenant compte de III.1.0 - (13) et du fait que $E(t)$ est à support compact, la formule III.1.0 - (10) devient :

$$\text{. si } t > b \quad U(t) = \sum_{k \in \Sigma} \exp(p_k(t - b)) \int_0^b \exp(p_k(b - r)) \chi_k B E(r) dr$$

$$\text{. si } t < b \quad U(t) = \sum_{k \in \Sigma} \exp(p_k(t - b)) \int_0^t \exp(p_k(b - r)) \chi_k B E(r) dr$$

Soit en définitive :

$$\text{III.1.0 - (14)} \quad U(t) = \sum_{k \in \Sigma} \psi_k \exp(p_k(t - b))$$

$$\text{où} \quad \psi_k = \int_0^b \exp(p_k(b - r)) \chi_k B E(r) dr \quad \text{si } t > b$$

$$\psi_k = \int_0^t \exp(p_k(b - r)) \chi_k B E(r) dr \quad \text{si } t < b$$

Dans toute cette partie nous avons supposé que $E(t)$ était à support compact. Supposons maintenant que $E(t)$ n'est plus à support compact mais que $E(t)$ est de la forme :

.../...

$$\text{III.1.0 - (15)} \quad E(t) = \sum_{j \in J} E_j \sin(\omega_j t + \varphi_j) + \hat{E}_2(t)$$

avec $\|\hat{E}_2(t)\| e^{pt} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$

Comme on a convenu que toute fonction excitatrice $t \rightarrow E(t)$ était nulle pour $t < 0$, sa transformée de Laplace peut être écrite :

$$\tilde{E}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} E(t) dt$$

Soit tous calculs faits en tenant compte de III.1.0 - (15)

$$\text{III.1.0 - (16)} \quad \tilde{E}(p) = \sum_j \left(\frac{\tilde{E}_j}{(p - i\omega_j)} + \frac{\tilde{E}'_j}{(p + i\omega_j)} \right) + \tilde{\tilde{E}}_2(p)$$

ou encore $\tilde{E}(p) = \tilde{\tilde{E}}_1(p) + \tilde{\tilde{E}}_2(p)$

$$\text{avec } \tilde{\tilde{E}}_1(p) = \sum_j \left(\frac{\tilde{E}_j}{(p - i\omega_j)} + \frac{\tilde{E}'_j}{(p + i\omega_j)} \right)$$

$\tilde{\tilde{E}}_2(p)$ se comporte comme la transformation d'une fonction à support compact.

Le système que l'on veut résoudre devient alors par transformation de Laplace :

$$(pI - A) \tilde{U}(p) = B \tilde{E}(p)$$

où $\tilde{E}(p)$ est définie par la formule III.1.0 - (16)

Donc pourvu que $\det(pI - A) \neq 0$, on peut écrire que :

$$\text{III.1.0. - (17)} \quad \tilde{U}(p) = (pI - A)^{-1} B \tilde{E}(p)$$

Comme précédemment, faisons l'hypothèse que toutes les valeurs propres de A sont simples. $\tilde{\tilde{E}}_2(p)$ se comportant comme la transformée d'une fonction à support compact, elle n'a aucun point singulier à distance finie. Par conséquent les pôles de $\tilde{\tilde{E}}(p)$ sont les imaginaires purs $\pm i\omega_j$. On voit donc que $(pI - A)^{-1} B \tilde{\tilde{E}}(p)$ n'a que des pôles simples à distance finie.

Tenant compte du fait que $\tilde{E}(p) = \tilde{\tilde{E}}_1(p) + \tilde{\tilde{E}}_2(p)$, la formule III.1.0 - (17) peut s'écrire :

$$\tilde{U}(p) = (pI - A)^{-1} B \tilde{\tilde{E}}_1(p) + (pI - A)^{-1} B \tilde{\tilde{E}}_2(p)$$

Soit encore :

$$\text{III.1.0 - (18)} \quad \tilde{U}(p) = \tilde{U}_1(p) + \tilde{U}_2(p)$$

$$\text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{U}_1(p) = (pI - A)^{-1} B \tilde{\tilde{E}}_1(p) \\ \tilde{U}_2(p) = (pI - A)^{-1} B \tilde{\tilde{E}}_2(p) \end{array} \right.$$

Compte tenu de la linéarité de la transformation inverse de Laplace, on a :

$$\text{III.1.0 - (19)} \quad U(t) = U_1(t) + U_2(t)$$

où $U_1(t)$ et $U_2(t)$ sont respectivement les transformées de $\tilde{U}_1(p)$ et $\tilde{U}_2(p)$

La fonction $\tilde{\tilde{E}}_2(p)$ se comportant comme la transformée d'une fonction à support compact, le calcul de $U_2(t)$ se fait exactement comme celui qui nous a conduit à la formule III.1.0 - (14).

D'où

$\text{III.1.0 - (20)} \quad U_2(t) = \sum_{k \in \Sigma} \psi_k \exp(p_k(t - b))$
--

.../...

avec

. Σ qui désigne l'ensemble des zéros du polynôme caractéristique de A (que l'on note p_k).

$$\psi_k = \int_0^b \exp(p_k(b-r)) \chi_k B E_2(r) dr \quad \text{si } t > b$$

$$\psi_k = \int_0^t \exp(p_k(b-r)) \chi_k B E_2(r) dr \quad \text{si } t < b$$

$$\chi_k = \lim_{P \rightarrow p_k} (p - p_k) (pI - A)^{-1}$$

Intéressons nous maintenant au calcul de $U_1(t)$.

Soit Φ l'ensemble des pôles de $\bar{E}_1(p)$ (ce sont les $\pm i\omega_j$ que l'on notera q_j).

On prend une droite L d'équation $\text{Re } p = \sigma_0$, le réel σ_0 est choisi de manière que les p_k et q_j vérifient $\text{Re } p < \sigma_0$. On a :

$$\text{III.1.0 - (21)} \quad U_1(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_L e^{pt} (pI - A)^{-1} B \bar{E}_1(p) dp$$

Soit λ une droite d'équation $\text{Re } p = \text{constante}$, telle que $\Sigma \cup \Phi$ soit compris entre L et λ . On entoure chaque p_k (resp. q_j) par un cercle Γ_k (resp. Γ_j).

La formule III.1.0 - (21) devient, par application du théorème de Cauchy :

$$U_1(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\lambda} e^{pt} (pI - A)^{-1} B \bar{E}_1(p) dp + \sum_{p_k \in \Sigma} \theta_k e^{p_k t} + \sum_{q_j \in \Phi} Z_j e^{q_j t}$$

$$\text{où } \theta_k = \lim_{P \rightarrow p_k} (p - p_k) (pI - A)^{-1} B \bar{E}_1(p)$$

$$Z_j = \lim_{P \rightarrow q_j} (p - q_j) (pI - A)^{-1} B \bar{E}_1(p)$$

.../...

En suivant un raisonnement analogue à celui développé précédemment, c'est-à-dire en III.1.0 - (12), on montre que :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\lambda} e^{pt} (pI - A)^{-1} B \tilde{E}_1(p) dp \xrightarrow{\lambda \rightarrow -\infty + i\mathbb{R}} 0$$

Ce qui donne :

$$\text{III.1.0 - (22)} \quad U_1(t) = \sum_{p_k \in \Sigma} \theta_k \exp(p_k t) + \sum_{q_j \in \Phi} Z_j \exp(q_j t)$$

On a donc en définitive, tenant compte de III.1.0 - (19), III.1.0 - (20) et III.1.0 - (22) :

$$\text{III.1.0 - (23)} \quad U(t) = \sum_{p_k \in \Sigma} \theta_k \exp(p_k t) + \sum_{q_j \in \Phi} Z_j \exp(q_j t) + \sum_{p_k \in \Sigma} \psi_k \exp(p_k(t - b))$$

$$\text{où } \theta_k = \lim_{p \rightarrow p_k} (p - p_k) (pI - A)^{-1} B \tilde{E}_1(p)$$

$$Z_j = \lim_{p \rightarrow q_j} (p - q_j) (pI - A)^{-1} B \tilde{E}_1(p)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_k = \int_0^b \exp(p_k(b - \tau)) \chi_k B E_2(\tau) d\tau \quad \text{si } t > b \\ \psi_k = \int_0^t \exp(p_k(b - \tau)) \chi_k B E_2(\tau) d\tau \quad \text{si } t < b \end{array} \right.$$

$$\chi_k = \lim_{p \rightarrow p_k} (p - p_k) (pI - A)^{-1}$$

.../...

Signalons qu'on aboutirait à un résultat analogue à III.1.0 - (23), où cette fois ci les q_j seraient complexes (c'est-à-dire pas nécessairement imaginaires purs), si on avait supposé que $\tilde{E}_1(p)$ avait des pôles complexes non nécessairement imaginaires purs.

Dans tous les cas, on voit d'après III.1.0 - (14) et III.1.0 - (23) que l'étude de la stabilité du système, c'est-à-dire du comportement du système suite à une perturbation, revient à déterminer les p_k (zéros du polynôme caractéristique de A).

Ainsi :

- Si tous les p_k sont à partie réelle négative, alors le système est stable et même asymptotiquement stable.

- S'il existe un p_k ayant une partie réelle positive alors le système est instable.

- Si un p_k est imaginaire pur et les autres sont à partie réelle négative, on a un système oscillant. On ne peut pas, a priori, conclure sur la stabilité du système.

III.1.1 - PRESENTATION DU POLYNOME CARACTERISTIQUE ET ETUDE DE LA STABILITE DU SYSTEME LINEAIRE

Pour pouvoir étudier la stabilité du système, on est amené comme mentionné au § III.1.0 à calculer le polynôme caractéristique de la matrice A détaillée au § II.6.

La matrice A étant d'ordre 10, le système aura donc dix (10) valeurs propres complexes comptées éventuellement avec leur degré de multiplicité.

Avec les différentes valeurs des composantes de la matrice A retenues, dont le détail est donné en annexe 4, on obtient les dix valeurs propres de A suivantes :

- * - $4.769 \cdot 10^6$
- * - $7.36 \cdot 10^4$
- * - $1.03 \cdot 10^4$
- * - $7.4 \cdot 10^2$
- * - $24.5 + 678 i$
- * - $24.5 - 678 i$
- * - $2.99 + 84.3 i$
- * - $2.99 - 84.3 i$
- * - $0.184 + 5.88 i$
- * - $0.184 - 5.88 i$

Comme nous l'avons fait remarquer au § III.1.0, le système sera instable si une des valeurs propres ci-dessus présente une partie réelle positive. Par conséquent, les modes propres d'oscillation du système linéaire modélisant l'appareil, qui sont dangereux, c'est à dire qui sont susceptibles de le déstabiliser, correspondent aux quatre dernières valeurs propres de la liste ci-dessus.

Parmi ces quatre valeurs propres on distingue :

- deux valeurs propres complexes conjuguées ayant une fréquence de l'ordre du hertz, caractérisant le phénomène qu'on appellera par la suite pompage,

.../...

- deux valeurs propres complexes conjuguées ayant une fréquence de l'ordre de la dizaine de hertz, caractérisant le phénomène qu'on appellera, par la suite, vibration (pour le différencier du pompage).

Remarque : Dans toute la suite, sauf mention expresse du contraire, les valeurs propres caractérisant l'effet de pompage seront appelées valeurs propres de pompage et celles caractérisant l'effet de vibration valeurs propres de vibration.

Une étude paramétrique plus détaillée au § III.1.2, montre que :

- les valeurs propres de pompage * - $0.184 + 5.88 i$
* - $0.184 - 5.88 i$

dont la fréquence ici vaut $F_p \cong 0.9$ Hz, sont fortement influencées par le débit nominal et le volume aval,

- les valeurs propres de vibration * - $2.99 + 84.3 i$
* - $2.99 - 84.3 i$

dont la fréquence ici vaut $F_v \cong 13.4$ Hz, sont fortement influencées par les caractéristiques de la partie pilote du détendeur-régulateur.

III.1.2 - INFLUENCE DES DIFFERENTS PARAMETRES SUR LA STABILITE DU SYSTEME LINEAIRE

Nous nous proposons dans cette partie, de tester l'influence de certains paramètres du modèle sur la stabilité du système. Ce test consiste à suivre l'évolution des dix valeurs propres du système correspondant à une variation du paramètre considéré.

Il sera plus particulièrement intéressant de suivre les valeurs propres de pompage et de vibration, car celles-ci présentent une partie réelle voisine de zéro et sont donc susceptibles de déstabiliser le système.

III.1.2.1 - Effets de frottements visqueux

Nous avons, dans la description de l'appareil, défini l'équipage mobile du pilote et du détenteur principal, comme la partie des dits modules pouvant se déplacer en mouvement de translation rectiligne et uniforme. Ces équipages comprennent, entre autres éléments, le clapet dit pilote (respectivement dit principal) lorsqu'il s'agit de l'équipage mobile du pilote (resp. lorsqu'il s'agit de l'équipage mobile du détenteur principal).

La modélisation retenue ne prend pas en compte a priori, un amortissement visqueux du mouvement de l'équipage mobile du pilote. L'identification effectuée a posteriori (voir § III.1.4) nous a montré que l'on pouvait introduire un tel amortissement représenté par une force $-f\dot{x}$ (resp. $-F\dot{X}$) appliquée à l'équipage mobile du pilote (resp. du détenteur principal).

Cette force peut avoir des origines diverses. On peut penser à un frottement visqueux dû au lubrifiant qui se trouve dans le guide de la tige du clapet. On peut aussi penser à une autre origine. Le mouvement oscillatoire de l'équipage met le gaz, situé dans chacune des chambres, en mouvement. A ce mouvement est associée une énergie cinétique proportionnelle à $\mu_p \dot{x}^2$ (resp. $\mu_D \dot{X}^2$) où μ_p (resp. μ_D) est la masse ajoutée correspondant au gaz dans les chambres du pilote (resp. du détenteur principal). Mais cela ne donne pas un amortissement et la masse concernée est très faible en comparaison de la masse de l'équipage mobile concerné. On peut imaginer d'autres mécanismes donnant un amortissement visqueux. Le mouvement de l'équipage conduit inévitablement à des turbulences qui se traduisent par une dissipation d'énergie, et donc, un amortissement.

Malheureusement il est extrêmement difficile, voire impossible, de quantifier cet effet et même de donner un argument justifiant qu'il se traduit par une force d'amortissement proportionnelle à la vitesse. Parmi les nombreux autres mécanismes que l'on peut imaginer, il est possible de songer au clapet. Ce dernier est le siège d'un mouvement de gaz qui est fonction uniquement de l'ouverture du clapet c'est-à-dire x pour le clapet pilote et X pour le clapet principal. Ce mouvement du fluide dans la pièce qui sert de guide, peut être schématisé comme un écoulement dérivant d'un potentiel des vitesses φ_p pour le clapet pilote (resp. φ_D pour le détendeur principal).

La relation de Bernouilli indique que :

$$\text{III.1.2.1 - (1)} \quad P + \rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \|\nabla \varphi\|^2 \right) = P_{ch} ,$$

où P_{ch} indique la pression statique qui règne dans le volume à l'amont du clapet (on peut remettre des indices mais l'analyse est la même pour les deux clapets).

Le mouvement du gaz au voisinage de la paroi du clapet est commandé essentiellement par le débit de fuite à travers le clapet, lequel est proportionnel à $(X - X_0)$ (si on admet que pour $X = X_0$ le clapet est fermé). On doit alors écrire :

$$\text{III.1.2.1 - (2)} \quad \varphi = (X - X_0) L_{eff}^{-1} \phi ,$$

où L_{eff} est une longueur caractéristique destinée à faire en sorte que φ et ϕ aient la même dimension qui est celle d'une vitesse multipliée par une longueur. La géométrie de l'ensemble qui conduit l'écoulement étant fixe, on peut admettre que ϕ ne dépend que de la position et pas du temps. La relation III.1.2.1 - (1) s'écrit donc :

$$\text{III.1.2.1 - (3)} \quad P + \rho \left(\dot{X} L_{eff}^{-1} \phi + \frac{1}{2} (X - X_0)^2 L_{eff}^{-2} \|\nabla \phi\|^2 \right) = P_{ch} .$$

Or, dans l'établissement du modèle, on avait admis que $P = P_{ch}$. On voit donc que si on tient compte de l'effet en question cela revient à introduire un effort égal à :

$$\bar{F} = -\rho \left(\Sigma \dot{X} L_{eff}^{-1} \phi + \frac{1}{2} \Sigma (X - X_0)^2 L_{eff}^{-2} \|\nabla \phi\|^2 \right) .$$

.../...

On montre en annexe 3 que le premier terme de l'effort à bien le signe qu'il faut pour un amortissement et qu'en plus le second terme est négligeable devant le premier.

A défaut de pouvoir quantifier ces coefficients de frottement visqueux F et f , nous avons, dans le calcul donnant les dix valeurs propres du systèmes au § III.1.1, supposé que les effets dûs aux frottements visqueux étaient négligeables dans le mouvement de l'équipage mobile. C'est-à-dire que si l_c et t_c désignent les longueurs caractéristiques et temps caractéristiques du système, les grandeurs sans dimension suivantes :

$$\frac{Fl_c}{t_c} \quad \text{et} \quad \frac{fl_c}{t_c} ,$$

sont telles que :

$$\frac{Fl_c}{t_c} \ll \frac{Ml_c}{t_c^2} ,$$

$$\frac{fl_c}{t_c} \ll \frac{ml_c}{t_c^2} .$$

Cependant, si on choisit ces coefficients de sorte que les effets de frottements visqueux soient non négligeables dans le mouvement des équipages mobiles, on constate qu'ils ont une influence sur la stabilité du système.

En effet, si le fait d'augmenter le coefficient de frottement visqueux de l'équipage mobile du pilote ou de l'équipage mobile du détenteur principal, baisse la partie réelle de la valeur propre de vibration (c'est-à-dire atténue tout phénomène de vibration), il augmente par contre la partie réelle de la valeur propre de pompage.

.../...

On trouvera regroupée dans le tableau ci-dessous, une illustration de la série d'essais numériques, montrant l'influence de f sur la stabilité du système.

f	Valeurs propres de pompage	Valeurs propres de vibration
0	- 1.7 \pm 13.6 i	- 0.12 \pm 83.5
10	- 1.4 \pm 13.6 i	- 8 \pm 83 i
30	- 1.2 \pm 13.6 i	- 12 \pm 83 i

En conclusion, on dira que toute introduction de frottements visqueux atténue le phénomène de vibration, mais peut engendrer le phénomène de pompage.

III.1.2.2 - Raideur des ressorts pilote et détendeur principal

Le ressort du pilote (resp. du détendeur principal), est un élément de l'équipage mobile pilote (resp. du détendeur principal) dont la raideur est caractérisée dans le modèle par le paramètre k (resp. K).

Comme mentionné au § III.0.2.1, les régulateurs détendeurs peuvent être équipés de ressort dont les constantes de raideur peuvent prendre les valeurs différentes.

Ainsi, si on augmente la valeur de la raideur du ressort de tarage du pilote et la raideur du ressort du détendeur principal on constate que la partie réelle des valeurs propres de pompage (qui sont d'une façon générale les valeurs propres dangereuses) décroît. C'est donc dire que toute augmentation de la raideur du ressort favorise la stabilité de l'ensemble du système. Il permet surtout d'éviter le phénomène de pompage.

Il est à signaler que si tout changement de la valeur du ressort pilote modifie la partie réelle de la valeur propre de pompage, elle modifie aussi la valeur propre de vibration, donc en particulier la valeur de la fréquence de vibration du système.

Prenons à titre d'exemple, deux ressorts de tarage pilote communément utilisés sur ces appareils, pour illustrer notre propos.

.../...

Pour notre système initial, nous avons utilisé (voir annexe 4) un ressort pilote dont la valeur de la constante de raideur est $k = 1,86 \cdot 10^3 \text{ N/m}$.

On avait alors comme valeurs propres de pompage et de vibration :

$$* P_1 = - 2.99 \pm 84.3 i \text{ (valeur propre de vibration),}$$

$$* P_2 = - 0.184 \pm 5.88 i \text{ (valeur propre de pompage).}$$

Si on augmente la valeur de la raideur du ressort pilote, c'est-à-dire en fait si on utilise un ressort dont la raideur est plus grande soit $k = 4.2 \cdot 10^3 \text{ N/m}$, on a alors comme valeurs propres de pompage et de vibration :

$$* P_1 = - 2.99 \pm 127 i \text{ (valeur propre de vibration),}$$

$$* P_2 = - 0.19 \pm 4.5 i \text{ (valeur propre de pompage).}$$

On voit donc que le fait d'augmenter la raideur du ressort pilote, favorise la stabilité de l'ensemble du système et change la valeur de la fréquence de vibration. Ainsi on passe de :

$$F_V = 13,4 \text{ Hz (pour } k = 1,86 \cdot 10^3 \text{ N/m) à}$$

$$F_V = 20 \text{ Hz (pour } k = 4,2 \cdot 10^3 \text{ N/m).}$$

Dans la description de l'appareil (voir § 2.1), nous avons signalé que la correction de la pression aval suite à une variation de celle-ci, était effectuée par le clapet principal lui même commandé par le pilote. Donc, le régulateur-détendeur sera d'autant plus apte à corriger la pression aval, que le pilote sera sensible à sa variation. Or, toute augmentation de la raideur du ressort du pilote, dégrade cette sensibilité. D'où la nécessité d'utiliser un ressort de tarage qui ne soit pas trop raide.

En conclusion, on dira que l'augmentation de raideur des ressorts est un facteur de stabilité. En revanche, une valeur trop grande de la raideur du ressort pilote, détériore la sensibilité du pilote, c'est-à-dire l'aptitude qu'à celui-ci à réagir aux variations de pression aval, ce qui peut avoir comme conséquence une dégradation de la plage de régulation. D'où la nécessité de savoir trouver un compromis entre stabilité et efficacité du mécanisme de régulation, dans le choix des ressorts équipant les régulateurs-détendeurs.

.../...

III.1.2.3 - Section de la membrane pilote et de la membrane du servomoteur principal

Le fait de diminuer la section de la membrane du pilote ou du servomoteur principal, diminue la partie réelle de la valeur propre de pompage et augmente la partie réelle de la valeur propre de vibration.

Comme d'une façon générale, la partie réelle de la valeur propre de pompage est toujours grande devant celle de la valeur propre de vibration (c'est-à-dire qu'en pratique le pompage est plus fréquent sur l'appareil que le phénomène de vibration), toute diminution de la section de la membrane pilote ou du servomoteur principal sera facteur de stabilité du système jusqu'à une section limite où les deux valeurs propres ont la même partie réelle. Si on diminue en dessous de cette section limite, l'on peut provoquer une mise en vibration du système.

Exemple :

Pour notre système initial, la section de la membrane du pilote est : $\sigma = 8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$.

Avec une telle section, les valeurs propres de pompage et de vibration sont :

$$* p_1 = - 2.9 \pm 84.3 i \text{ (valeur propre de vibration),}$$

$$* p_2 = - 0.185 \pm 4.96 i \text{ (valeur propre de pompage).}$$

Si, tout autre paramètre étant par ailleurs fixé, on diminue la section de la membrane du pilote soit :

$$\sigma = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 ,$$

les valeurs propres de pompage et de vibration deviennent :

$$* P_1 = - 1.2 \pm 84.4 i \text{ (valeur propre de vibration),}$$

$$* P_2 = - 0.19 \pm 4 i \text{ (valeur propre de pompage).}$$

.../...

On constate donc que tout autre paramètre étant par ailleurs fixé, si on diminue la section de la membrane pilote, en la faisant passer de :

$$\sigma = 8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ à } \sigma = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

le coefficient d'amortissement du système passe de 0,23 à 0,29 cela revient donc à dire que toute diminution de la section de la membrane a un effet stabilisateur.

En revanche, si on continue à diminuer la section de cette membrane, en la faisant passer à $\sigma = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$, les valeurs propres de pompage et de vibration deviennent :

$$p_1 = - 0.3 \pm 84.4 i \quad (\text{valeur propre de vibration}),$$

$$p_2 = - 0.35 \pm 3.9 i \quad (\text{valeur propre de pompage}).$$

On constate alors que les valeurs propres de vibration sont devenues les plus dangereuses.

On peut donc dire en conclusion, que toute diminution de section de la membrane atténue le phénomène de pompage mais peut être facteur de mise en vibration.

III.1.2.4 - Perte de charge des prises d'impulsions

Rappelons qu'on appelle prise d'influence pilote (resp. servomoteur principal), un élément de tuyauterie de très faible volume, reliant le volume aval à la chambre supérieure du pilote (resp. du servomoteur principal). Ces prises d'influence sont telles qu'en régime permanent les débits qui y transitent sont nuls. Ce qui fait que, comme nous l'avons vu au § III.5.1, les relations traduisant la variation de débit sont fondamentalement non linéaires. Mais pour pouvoir effectuer une étude linéaire, et à titre de modèle, nous avons remplacé l'expression du débit dans la prise d'influence pilote par :

$$\text{III.1.2.4 - (1)} \quad \Delta q = \frac{1}{R} (\Delta P_a - \Delta P_h) ,$$

et l'expression du débit dans la prise d'influence du servomoteur principal par :

$$\text{III.1.2.4 - (2)} \quad \Delta q^* = \frac{1}{R^*} (\Delta P_a - \Delta P_h^*) .$$

.../...

L'expression $\frac{1}{R}$ (resp. $\frac{1}{R^*}$) définit la perte de charge de la prise d'influence pilote (resp. servomoteur principal).

Si le fait d'augmenter la perte de charge, baisse la partie réelle de la valeur propre de pompage (c'est-à-dire atténue tout phénomène de pompage), il augmente en revanche la partie réelle de la valeur propre de vibration (c'est-à-dire favorise le phénomène de vibration). Ce phénomène est surtout sensible à la prise d'influence pilote. Par conséquent, toute augmentation de la perte de charge aura un effet stabilisateur sur l'ensemble du système, jusqu'à ce que les valeurs propres de vibration et de pompage aient la même partie réelle. Si l'on continue à augmenter la perte de charge, on favorise la mise en vibration de l'ensemble du système.

Prenons pour illustrer notre propos, un système dont la perte de charge de la prise d'influence pilote et servomoteur principal sont respectivement :

$$\begin{aligned} R &= 8 \cdot 10^4, \\ R^* &= 10^4, \end{aligned}$$

on suppose que les autres paramètres sont fixés par ailleurs.

Dans ce cas les valeurs propres de pompage et de vibration sont :

$$\begin{aligned} P_1 &= -7 \pm 84 i \text{ (valeur propre de vibration),} \\ P_2 &= -0.16 \pm 5 i \text{ (valeur propre de pompage).} \end{aligned}$$

Si R^* étant fixé, on fait varier R de $R = 8 \cdot 10^4$ à $R = 5 \cdot 10^4$ les valeurs propres de pompage et de vibration deviennent :

$$\begin{aligned} P_1 &= -5 \pm 84 i, \\ P_2 &= -0.18 \pm 5 i. \end{aligned}$$

On constate donc que le fait d'avoir augmenté la perte de charge a favorisé la stabilité de l'ensemble du système. Le coefficient d'amortissement passe alors de 0,2 à 0,23 (c'est-à-dire qu'on a un système plus amorti).

.../...

En revanche si on continue à faire croître la perte de charge de la prise d'influence pilote en faisant passer R de $R = 5 \cdot 10^4$ à $R = 10^3$, les valeurs propres de pompage et de vibration deviennent :

$$P_1 = -0.1 \pm 84 i \text{ (valeur propre de vibration),}$$

$$P_2 = -0.2 \pm 5 i \text{ (valeur propre de pompage).}$$

On remarque donc que le fait d'avoir à nouveau augmenté la perte de charge, a augmenté la partie réelle de la valeur propre de vibration (devenue la valeur propre dangereuse).

La figure III.1.2.4.1, montre l'influence de R sur la stabilité du système.

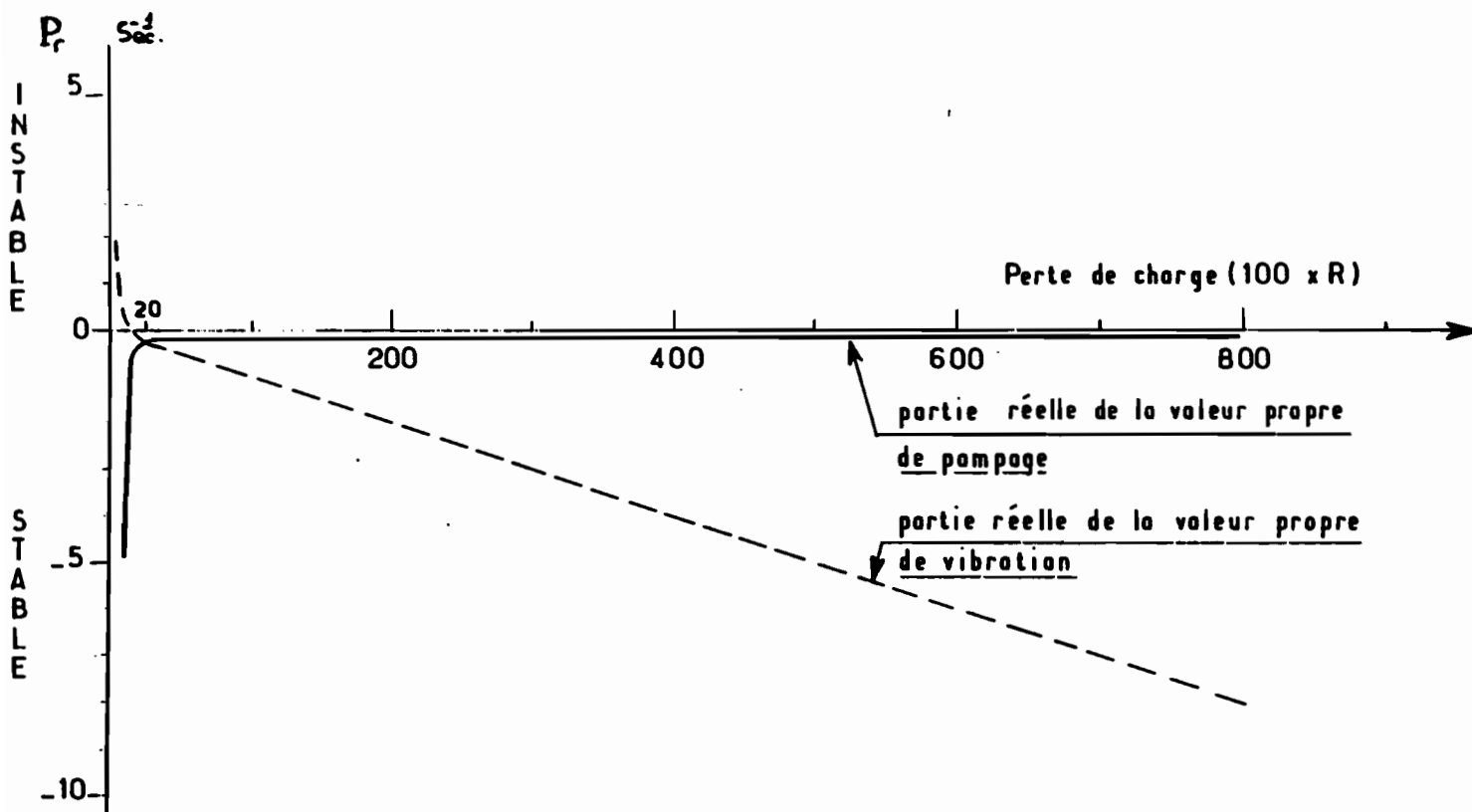


figure III 1.2.4.1. Influence de la perte de charge de la prise d'influence pilote

III.1.2.5 - Vanne d'amortissement Va2

La vanne d'amortissement, est un organe réglable du régulateur reliant le volume V_d à la chambre inférieure du servomoteur principal. C'est par cette vanne que transite le débit qui entre ou qui sort de la chambre inférieure du servomoteur principal.

Dans le modèle linéaire, nous avons caractérisé cette vanne par le paramètre R_2 . Ce paramètre influe peu sur la valeur propre de vibration, mais a une grande influence sur la valeur propre de pompage.

En effet, si on diminue l'ouverture de la vanne d'amortissement V_{a2} , la partie réelle de valeur propre de pompage diminue et on a une légère modification de la partie imaginaire de cette même valeur propre.

On peut donc dire que toute réduction de l'ouverture de la vanne d'amortissement stabilise le système et diminue légèrement la valeur de la fréquence de pompage.

Nous avons regroupé dans le tableau ci-dessous, quelques résultats d'essais numériques relatifs à l'influence de R_2 sur la stabilité du système pour les valeurs suivantes des paramètres.

$$v_a = 25 \text{ litres}, Q_1 = 100 \text{ m}^3/\text{h(N)}, R = 1.10^7, R^* = 2.96 \cdot 10^5,$$

les autres paramètres ayant les valeurs données en annexe 4.

R_2	Valeurs propres de pompage	Fréquence de pompage
$2.5 \cdot 10^7$	- $0.2 \pm 22.7 i$	3,61 Hz
$4.5 \cdot 10^7$	- $1.07 \pm 19.5 i$	3,1 Hz
$6.5 \cdot 10^7$	- $1.64 \pm 17.3 i$	2,88 Hz

Ces résultats obtenus par recherche numérique des valeurs propres du modèle linéaire sont confirmés par la simulation numérique effectuée au § III.1.5.

.../...

On constate donc que le fait d'avoir réduit l'ouverture de la vanne V_{a2} a eu pour effet de favoriser la stabilité du système et a diminué la fréquence de pompage.

Notons cependant que si toute fermeture de la vanne V_{a2} a un effet stabilisateur sur le système, il détériore le temps de réponse de l'appareil dans la mesure où il rend plus difficile la communication entre le pilote et la chambre inférieure du servomoteur principal.

III.1.2.6 - Vanne de fuite V_{a3}

La vanne de fuite, quelquefois appelée vanne de rejet, est un organe réglable du régulateur-détendeur, par lequel transite le gaz sortant du volume V_d vers le volume aval. Cette vanne permet, avec la membrane d'impulsion pilote, de moduler la pression motrice grâce à une variation de position du clapet pilote.

Dans le modèle, l'expression du débit passant par V_{a3} est :

$$q_3 = k_3 \sqrt{P_a (P_d - P_a)},$$

où

P_d est la pression régnant dans le volume V_d ,

P_a est la pression régnant dans le volume aval.

La vanne étant réglable, la constante k_3 dépend du nombre de tours d'ouverture. Ainsi, si n_t désigne le nombre de tours d'ouverture, on peut obtenir une approximation suffisante de k_3 en fonction de n_t par le polynôme suivant :

$$k_3 = k_{30} + k_{31}(n_t) + k_{32}(n_t)^2 + k_{33}(n_t)^3.$$

Une série d'essais ad'hoc donnant k_3 pour diverses valeurs de n_t , nous a permis d'obtenir les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} k_{30} &= 3.16 \cdot 10^{-9}, \\ k_{31} &= 7.66 \cdot 10^{-9}, \\ k_{32} &= - 2.13 \cdot 10^{-9}, \\ k_{33} &= 2.25 \cdot 10^{-10}. \end{aligned}$$

.../...

Il est à signaler, qu'en régime permanent, les débits q_3 et Q_p sont égaux. C'est-à-dire qu'on a :

$$q_3^0 = Q_p^0 .$$

Si on étudie l'influence de V_{a3} sur la stabilité du système, on remarque que toute augmentation de la valeur de n_t , ce qui correspond à une plus grande ouverture de la vanne de fuite V_{a3} , fait baisser la valeur de la partie réelle de la valeur propre de pompage. En revanche, une telle augmentation ne modifie pas la valeur propre de vibration.

On trouvera regroupée dans le tableau ci-dessous, une illustration de la série d'essais numériques effectués.

n_t (nombre de tours d'ouverture de la vanne V_{a3})	Valeurs propres de pompage
0	- 0.16 ± i 6.2
1/2	- 0.178 ± i 5.6
1	- 0.182 ± i 5.3
2	- 0.185 ± i 4.9
3	- 0.187 ± i 4.8
4	- 0.19 ± i 4.7

On voit donc que toute ouverture de la vanne de fuite V_{a3} a un effet d'atténuation sur tout phénomène de pompage.

Cet effet stabilisateur de la vanne de fuite s'explique par le fait que toute ouverture de celle-ci, se traduit par une augmentation de q_3^0 donc de Q_p^0 . Le clapet pilote a donc tendance à travailler en dehors de la zone de petites ouvertures, ce qui a comme conséquence une atténuation du phénomène de pompage.

.../...

III.1.2.7 - Débit nominal

On définit le débit nominal, comme étant la valeur en régime permanent, du débit qui transite par le clapet principal du régulateur-détendeur. Ce débit nominal est représenté dans le modèle par le paramètre Q_1^0 . Une étude de sensibilité, nous permet de remarquer que ce paramètre a une grande influence sur la stabilité.

En effet, Q_1^0 peut théoriquement varier du débit nul au débit maximal correspondant à la pleine ouverture du clapet du détendeur principal qui est de 1000 m³/h(N) dans le cas du régulateur FRANCEL BP. Pour de faibles valeurs du débit nominal, c'est-à-dire dans la zone de petites ouvertures du clapet principal, la partie réelle de la valeur propre de pompage est très voisine de zéro. Donc en zone de petites ouvertures, le régulateur-détendeur est fréquemment en pompage. En revanche, si on augmente le débit nominal, la partie réelle de la valeur propre de pompage diminue. Ce qui signifie que toute augmentation du débit nominal peut être facteur de stabilité. Elle permet plus exactement d'éviter tout risque de pompage.

Nous avons, pour un volume aval de 15 m³ et tout autre paramètre étant par ailleurs fixé, regroupé dans le tableau ci-dessous quelques résultats d'essais numériques relatifs à l'influence du débit nominal sur la valeur propre de pompage.

Q_1 en m ³ /h(N)	Valeurs propres de pompage
90	- $8 \cdot 10^{-2} \pm 4.9$
240	- 0.14 ± 4.9
315	- 0.16 ± 4.9
765	- 0.35 ± 4.9

III.1.2.8 - Influence de la forme du clapet principal

Rappelons que nous appelons équipage mobile du détendeur principal, la partie dudit module, soumise à une loi horaire $X(t)$. Un des éléments constitutifs de cet équipage est le clapet principal, qui permet, par sa position, de corriger la valeur de la pression aval

..../...

Nous avons fait remarquer, dans nos hypothèses, que le clapet principal était à ouverture linéaire, c'est-à-dire que la loi donnant le débit en fonction de l'ouverture du clapet était linéaire. Cette hypothèse a d'ailleurs été confirmée au § III.0.2.2.

Nous avons ainsi, déterminé le coefficient de cette loi linéaire soit :

$$\alpha \simeq \frac{63 \text{ kg/s}}{\text{m}} .$$

Si on étudie l'influence de ce coefficient sur la stabilité du système, on remarque qu'à toute diminution de la valeur de α correspond une diminution de la partie réelle et de la partie imaginaire de la valeur propre de pompage.

Ce qui signifie que toute diminution de α stabilise tout phénomène de pompage et réduit la valeur de la fréquence de pompage.

Interprétation :

En pratique, diminuer la valeur du coefficient α revient soit à diminuer la valeur nominale de la pression d'entrée, soit à diminuer la section de passage au niveau du clapet principal. Comme en général la pression amont P_e est fixée, on ne peut diminuer α qu'en réduisant la section de passage au niveau du clapet principal, ce qui revient implicitement à réduire le diamètre de ce dernier. En conséquence, pour une même variation de débit, on a une course beaucoup plus importante du clapet, ce qui lui permet de travailler de plus en plus en dehors de la zone de petites ouvertures (qui est une zone de pompage). Le clapet travaillant ainsi en dehors de la zone de pompage conduit à un système beaucoup plus stable.

Signalons, qu'une façon pratique d'avoir de petites valeurs de α en zone de petites ouvertures, donc de diminuer le risque de pompage dans cette zone, est d'équiper le régulateur-détendeur d'un clapet à ouverture parabolique, c'est-à-dire d'un clapet dont la loi d'ouverture est représentée par une parabole comme sur la figure III.1.2.8b.

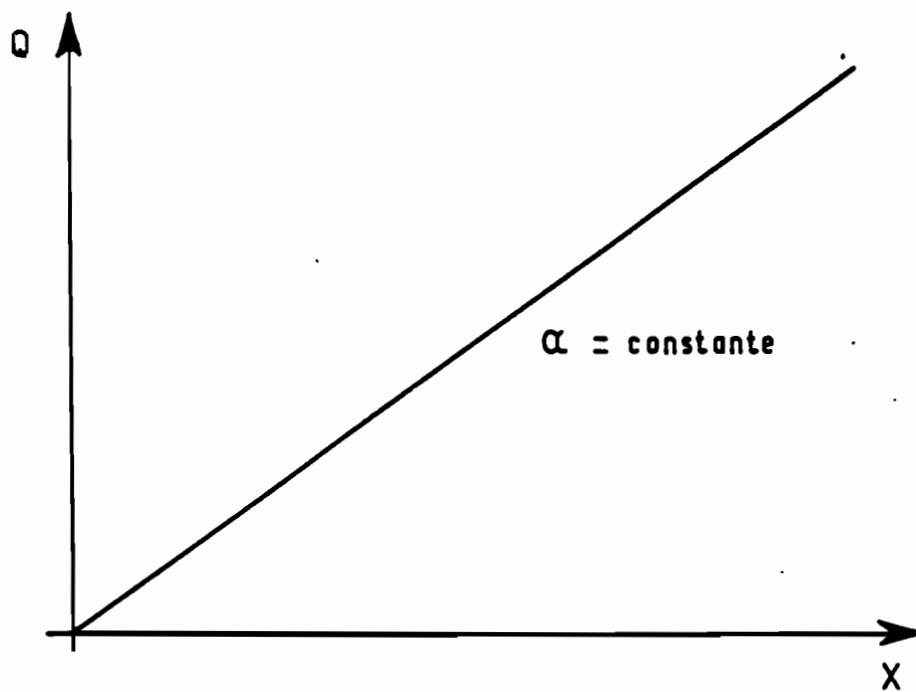
LOI D'OUVERTURE D'UN CLAPET LINEAIRE

Fig. III 128 . a

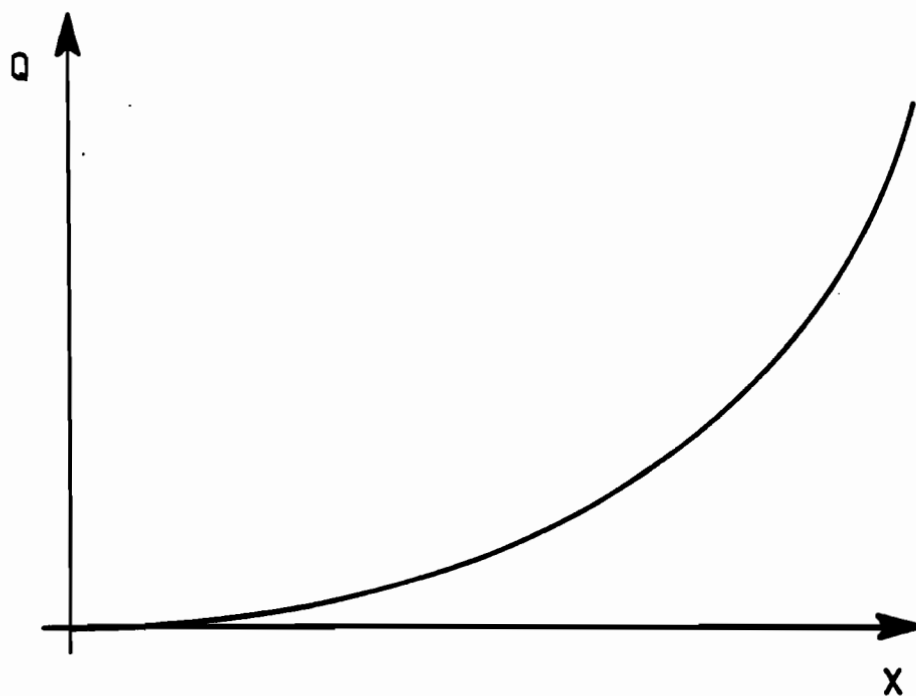
LOI D'OUVERTURE D'UN CLAPET PARABOLIQUE

Fig. III 128 . b

III.1.2.9 - Influence du volume aval

Le volume aval joue un rôle important dans la stabilité du système.

En effet, d'une façon générale, le fait de diminuer le volume à l'aval du régulateur-détendeur, a pour effet d'augmenter la partie imaginaire de la valeur propre de pompage et de diminuer la partie réelle de cette valeur propre. Cela signifie, en clair, que toute diminution de volume aval stabilise tout phénomène de pompage et augmente la valeur de la fréquence de pompage.

A titre d'exemple on remarque que si on prend un débit nominal Q_1^0 de $110 \text{ m}^3/\text{h(N)}$, les autres paramètres ayant les valeurs données en annexe 4, si on fait varier le volume aval V_a de 15 m^3 à 10 m^3 , les valeurs propres de pompage passent de :

$$p_1 = - 0.1 \pm 4.9 i ,$$

à :

$$p_1 = - 0.15 \pm 6 i .$$

On voit donc qu'on a un système plus amorti et une fréquence de pompage qui passe de :

$$F_p \cong 0,78 \text{ Hz} \text{ à } F_p \cong 0,9 \text{ Hz} .$$

Cependant, le modèle fait apparaître que si toute diminution du volume aval a pour effet de diminuer la partie réelle de la valeur propre de pompage, elle augmente en revanche la partie réelle de la valeur propre de vibration.

Comme dans la configuration habituelle d'utilisation le phénomène de pompage est beaucoup plus fréquent que le phénomène de vibration, on voit donc qu'on pourra stabiliser le système en réduisant le volume aval.

.../...

Cependant, et comme le montre la figure III.1.2.9.1, on constate qu'une réduction du volume en dessous d'une valeur V_L peut être facteur de mise en vibration. Cette valeur V_L est fonction des conditions d'utilisation et de réglage de l'appareil. En particulier, une série d'essais numériques, nous a permis de remarquer que ce volume V_L est d'autant plus vite atteint que le débit nominal est important.

On peut donc, en conclusion à cette partie, dire que d'une façon générale, toute réduction du volume aval stabilise le phénomène de pompage et augmente la fréquence de celui-ci. L'utilisation d'un régulateur sur un petit volume, à grand débit peut être facteur de mise en vibration.

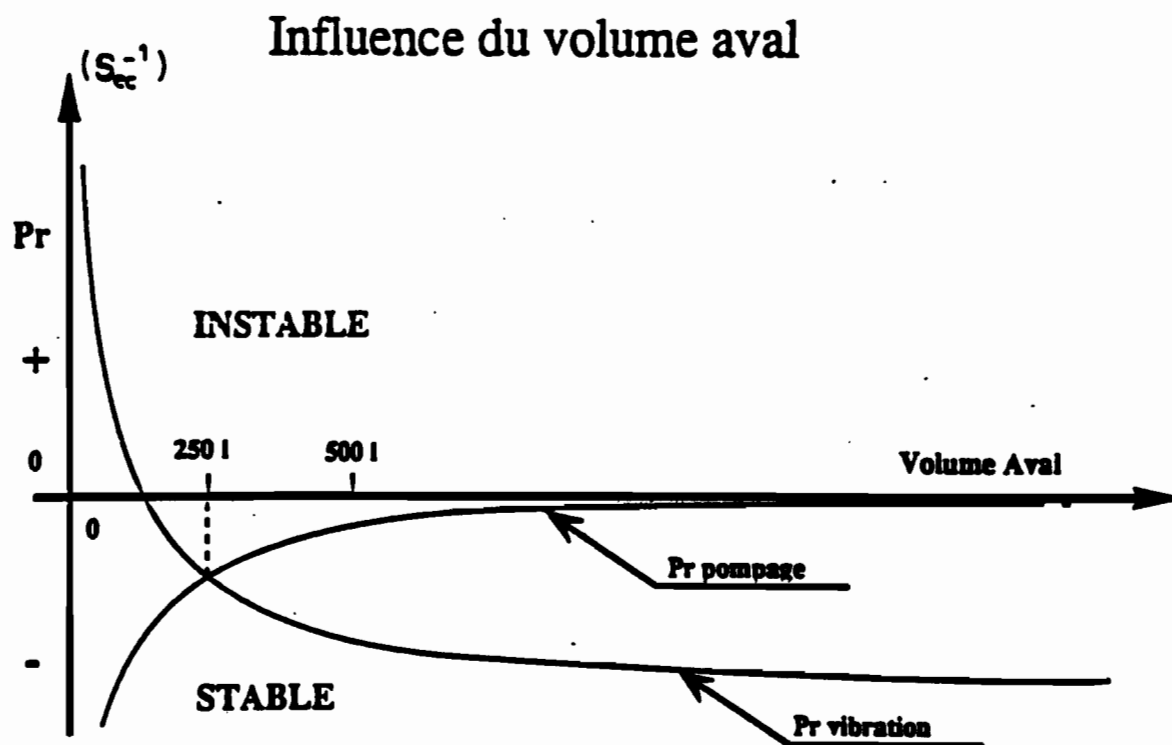


figure III.1.2.9.1 - Evolution des parties réelles de pompage et de vibration

III.1.3 - ESSAIS EN DYNAMIQUE

III.1.3.1 - Introduction

Ces essais en dynamique, effectués au Service Métrologie et Matériels de Réseaux du Gaz de France sur un régulateur piloté, avaient deux objectifs principaux. Le premier de ces objectifs était d'obtenir des informations sur le comportement dynamique de l'appareil et donc sur les inconnues fondamentales du système et qui nous permettraient a posteriori, d'effectuer une estimation de certains paramètres assez mal connus dans le modèle. Le second objectif de ces essais était de permettre de recenser différentes causes pouvant engendrer certaines instabilités. L'ensemble de cette campagne d'essais devait nous permettre d'infirmier ou de confirmer certaines constatations faites, à partir du modèle, sur la stabilité du système.

III.1.3.2 - Présentation du banc d'essais

Le régulateur FRANCEL BP, retenu pour les essais en dynamique, a été placé sur un réseau basse pression c'est-à-dire un réseau dont la pression amont est de 4 bar et la pression aval de 20 mbar (ces grandeurs sont données en valeur relative c'est-à-dire par rapport à la pression atmosphérique).

La plage de débit théorique du régulateur est de 1000 m³/h(N). Partout, sauf mention expresse du contraire, m³/h(N) désignera l'unité de débit corrigé.

La formule de débit corrigé est donnée par la relation suivante :

Débit corrigé (en m ³ /h(N))	= Débit brut x (en m ³ /h)	$\frac{\text{Pression absolue (Pascal)}}{\text{Pression atmosphérique (Pascal)}} \times \frac{273,15}{\text{Température absolue (Kelvin)}}$
--	--	---

A l'extrémité aval du régulateur a été placée une électrovanne permettant de solliciter l'appareil afin de pouvoir suivre son comportement.

.../...

On trouvera sur la figure III.1.3.2.1, un schéma du banc. Afin d'obtenir des informations sur les inconnues fondamentales du système lors de son fonctionnement dynamique, celui-ci a été pourvu :

- de capteurs piézo-électriques au niveau de chaque chambre, permettant d'avoir les informations en pression,

- d'un potentiomètre au niveau du clapet principal, permettant d'accéder aux informations sur son déplacement,

- d'un capteur de proximité donnant les informations en déplacement de l'équipage mobile du pilote. Il est à remarquer qu'un capteur de proximité a semblé utile au niveau de cet organe, car tout autre capteur nécessitant une liaison mécanique risquait de modifier le comportement, donc la dynamique de l'équipage mobile.

Un potentiomètre placé sur l'électrovanne en sortie de banc, donne des informations sur la fonction d'excitation de l'ensemble du système.

Toutes ces informations sont recueillies puis stockées grâce à une chaîne d'acquisition directement reliée au banc d'essai.

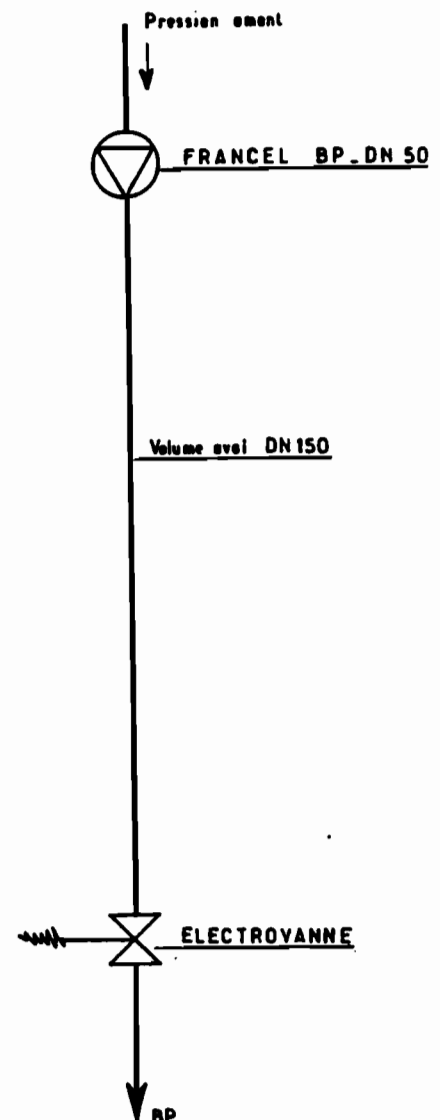


Fig. III .1321 - SCHEMA DU BANC DE MONTAGE

III.1.3.3 - Analyse de quelques résultats d'essais

Dans cette partie, les essais ont consisté, pour un réglage fixé, à solliciter dynamiquement l'appareil en créant grâce à l'électrovanne une variation de débit du gaz transitant par le volume aval.

D'une façon générale, les fonctions d'excitations sont du même type que celle représentée sur la figure III.1.3.3.1. Cette fonction d'excitation est un échelon en vitesse dont l'amplitude est de 2,2 mm. Puisque 1 mm d'ouverture de l'électrovanne correspond à une variation de débit de $30 \text{ m}^3/\text{h(N)}$, la fonction d'excitation représentée sur la figure III.1.3.3.1 correspond à une variation de débit de $66 \text{ m}^3/\text{h(N)}$. Le temps de montée de cette fonction est de $6 \cdot 10^{-2}$ seconde, il correspond au temps d'ouverture de l'électrovanne.

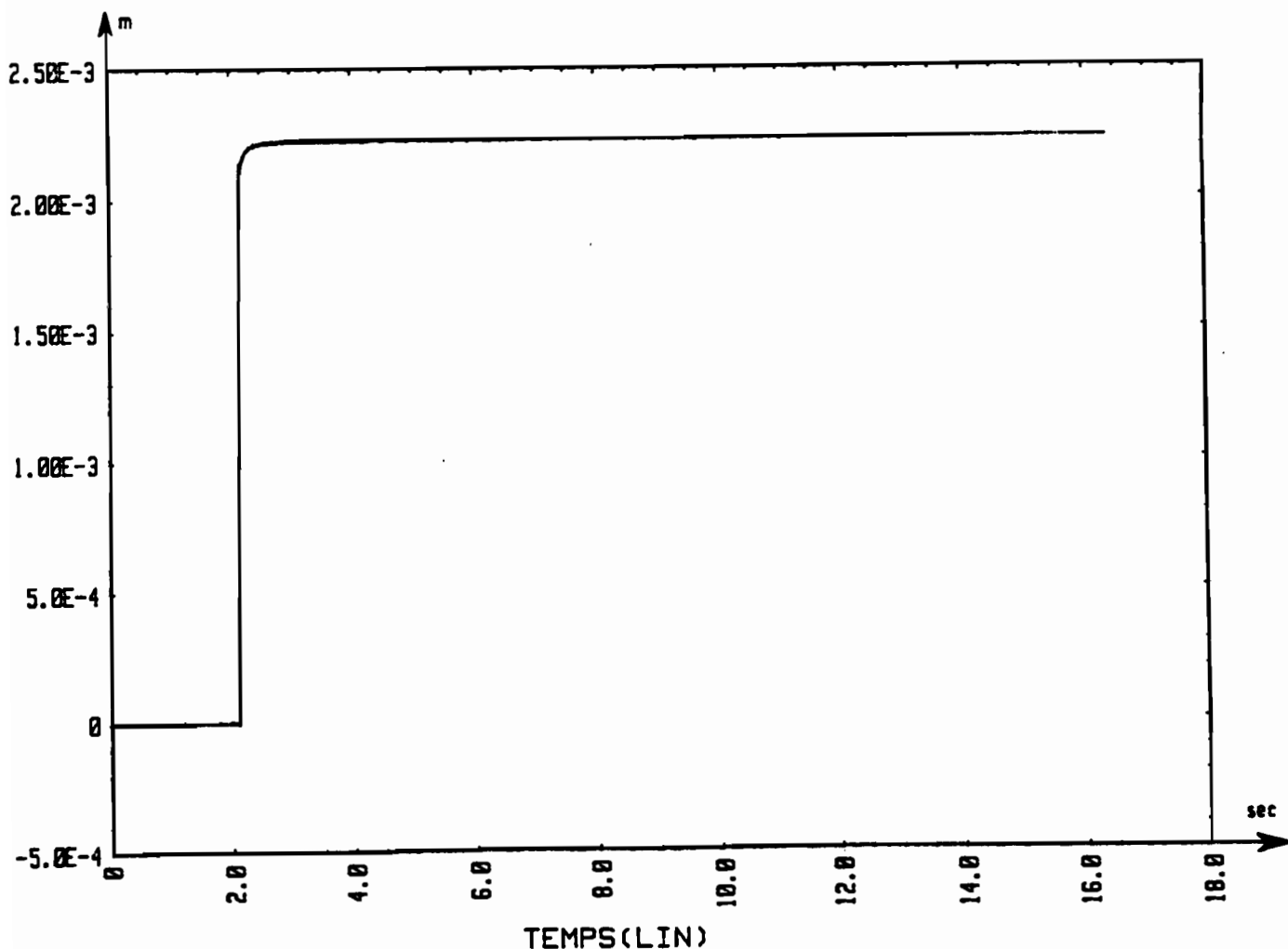


figure III 1331 - Exemple de fonction d'excitation

a - Première condition d'essais

- * débit nominal $Q_1 \approx 100 \text{ m}^3/\text{h(N)}$;
- * l'amplitude de la fonction d'excitation est de 2 mm ;
- * la vanne d'amortissement V_{a2} est ouverte à 1/4 tour ;
- * la vanne de fuite V_{a3} est ouverte à 1 tour ;
- * le temps d'ouverture de l'électrovanne est de $6 \cdot 10^{-2}$ seconde

On observe pendant environ 16 secondes, le comportement dynamique de l'appareil. La figure III.1.3.3.2 représente l'évolution de la pression à l'aval du régulateur.

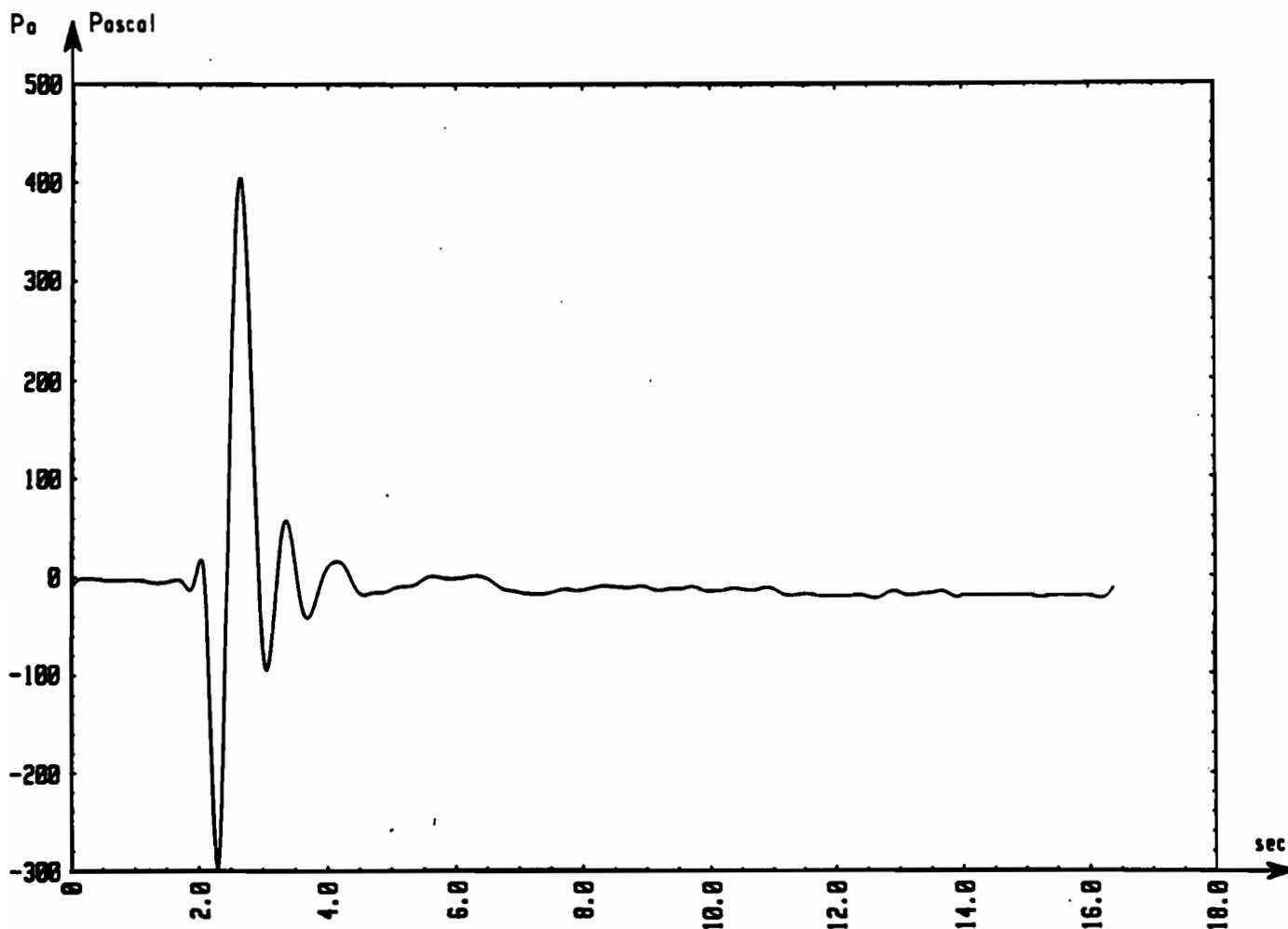


figure III.1.3.3.2 - Evolution de la pression aval

b - Deuxième condition d'essais

- * débit nominal $Q_1^{\circ} \approx 70 \text{ m}^3/\text{h(N)}$;
- * l'amplitude d'ouverture de l'électrovanne est de 2 mm ;
- * le temps d'ouverture de l'électrovanne est de $6 \cdot 10^{-2}$ seconde ;
- * la vanne d'amortissement V_{a2} est ouverte à 1/4 tour ;
- * la vanne de fuite V_{a3} est ouverte à 2 tours.

On observe également pendant 8 secondes, le comportement dynamique de l'appareil. La figure III.1.3.3.3 représente l'évolution de la pression à l'aval du régulateur-détendeur.

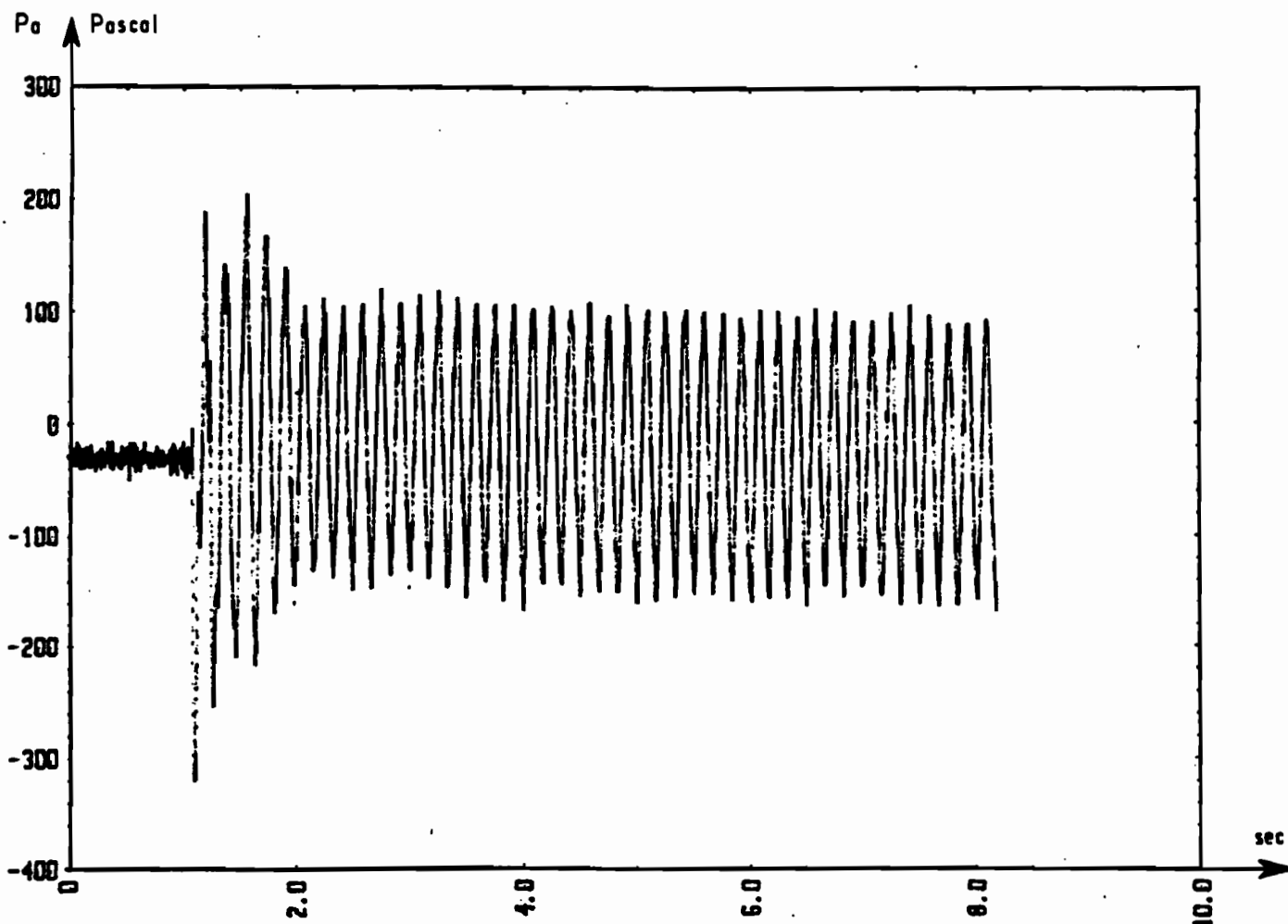


figure III.1.3.3.3. Evolution de la pression aval

Notons que les différents signaux représentés dans ce paragraphe, ont été échantillonnés à une fréquence de 1000 Hz (ce qui correspond à 1000 acquisitions par seconde). D'après le théorème de Shannon, la fréquence d'échantillonnage doit être supérieure à au moins deux fois la fréquence f_c , où l'intervalle $[0, f_c]$ représente la bande de fréquences que l'on observe. En pratique, pour être sûr de la cohérence des signaux enregistrés dans la bande de fréquences que l'on observe, on choisit une fréquence f_c telle que la fréquence d'échantillonnage soit trois fois (ou même plus) supérieure à celle-ci. Par conséquent, nous ne nous intéresserons qu'à la bande de fréquences comprise entre 0 et 100 Hz.

Si on effectue une analyse spectrale du signal représenté sur la figure III.1.3.3 en ne nous intéressant qu'à la bande de fréquences 0 - 100 Hz, on note la présence de deux fréquences propres du système.

* Une fréquence de l'ordre de 5 Hz caractérisant l'effet de pompage et dont le niveau de puissance est le plus élevé ;

* une fréquence de l'ordre de 19 Hz caractérisant l'effet de vibration.

Cette valeur de la fréquence de vibration, s'explique par le fait que nous avons équipé, pour les essais, le module pilote du régulateur-détendeur d'un ressort dont la raideur est de $4.2 \cdot 10^3$ N/m.

Les essais en dynamique, effectués auparavant sur un autre réseau, avec ce même appareil, dont le pilote a été équipé d'un ressort ayant un coefficient de raideur de $1.86 \cdot 10^3$ N/m (voir la référence [7]), a mis en évidence une fréquence de vibration de 13,5 Hz.

Ces résultats confirment bien l'étude théorique du § III.1.2.2.

.../...

III.1.3.4 - Influence de la position du servomoteur

Cet essai consistait à étudier l'influence de la position du servomoteur principal sur la stabilité de l'appareil.

Pour cela, dans les mêmes conditions d'essais, le régulateur-détendeur est placé sur le réseau dans un premier temps avec le servomoteur dans la partie supérieure de l'appareil (voir figure III.1.3.4.1), puis dans un second temps avec le servomoteur dans la partie inférieure de l'appareil (voir figure III.1.3.4.2).

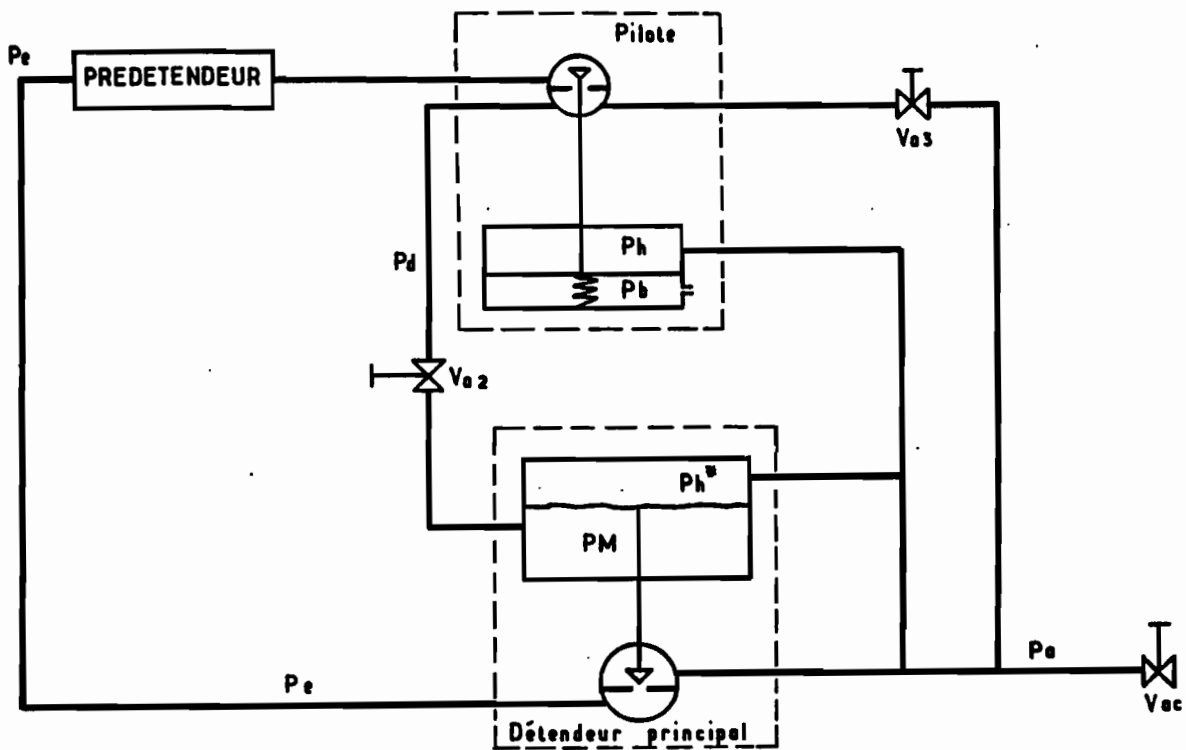


figure III.1.3.4.1. Détendeur monté à l'endroit

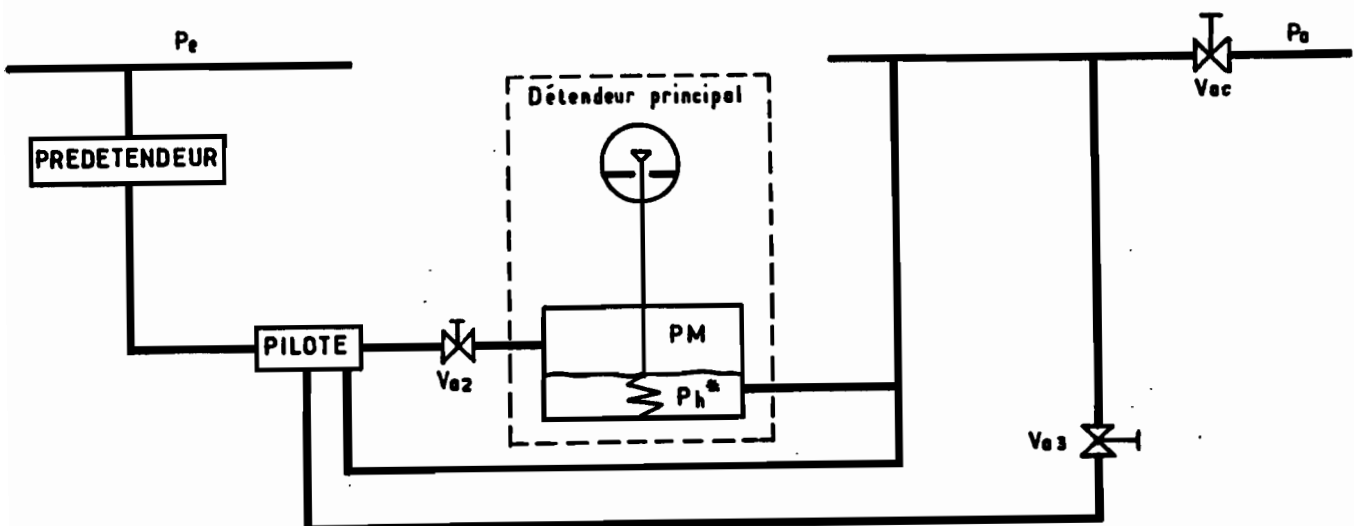


figure III.1.3.4.2. Détendeur principal inversé

On constate que dans la première position, le régulateur-détendeur est plus stable. Cela s'explique par le fait que, lorsque le servomoteur est placé dans la seconde position, le poids de l'équipage mobile s'oppose à la force créée par le ressort principal. On a par conséquent, une diminution de la raideur du ressort de l'équipage mobile. C'est-à-dire que tout se passe comme si l'on disposait d'un régulateur ayant un ressort moins raide ce qui, on le sait (voir § III.1.2.2), diminue la stabilité de l'appareil.

III.1.3.5 - Influence du débit nominal

Cet essai avait pour but, pour un réglage donné du régulateur-détendeur, de faire varier le débit nominal afin d'étudier l'influence de celui-ci sur la stabilité du système.

La configuration de l'appareil est la suivante :

* la différence de pression dans le servomoteur est d'environ 30 mbar avec une variation pouvant, dans certains cas, atteindre 1,5 mbar ;

* la vanne d'amortissement V_{a2} est ouverte à 2 tours ;

* la vanne de fuite V_{a3} est ouverte à 1,5 tour ;

* le volume aval V_a est fixé à 160 litres.

Dans le tableau qui suit, nous avons regroupé les différents résultats et observations effectués.

X course du clapet principal (en mm)	Ql (débit) en m ³ /h(N)	Pa pression aval (en mbar)	Observations
0,22 0,25	3,32	20 ± 0,5	Pompage et décalage de la consigne. On se trouve donc en zone instable. Le système est calmé et on reprend les essais avec le même réglage
0,3 0,34	34,27	20,5 ± 1	Même phénomène que précédemment. On est donc toujours en zone instable
0,5 0,51	95,8	20 ± 0,8	Même phénomène. C'est à dire pompage et décalage de la consigne. Zone instable. Le système est calmé et on reprend les essais.
1,03 1,04	266,4	20 ± 0,4	On se trouve toujours en zone instable car on observe le même phénomène que précédemment.
1,72 1,73	485,8	20 ± 0,1	On observe le même phénomène mais le décalage est moindre. On se rapproche donc du domaine de stabilité
2,34 2,35	640,6	20	Le système initialement en pompage, se calme seul sans décalage de consigne, mais au bout d'un temps très long. On se trouve dans la frontière de stabilité.
3,54 3,57	873	20	On est franchement en zone stable car le temps de stabilisation est très court. Mais on remarque une grande amplitude au niveau de la variation de la pression aval.
4,2 4,25	970	20	On est en zone stable. Le système est encore plus stable et on a une augmentation de l'amplitude de la pression aval.

Cette série d'observations, nous permet de confirmer l'étude théorique du § III.1.2.7, à savoir que toute augmentation du débit nominal, a un effet stabilisateur sur le système. Cette augmentation atténuée plus exactement le phénomène de pompage.

III.1.3.6 - Essai de mise en vibration

La configuration de l'appareil est la suivante

- * volume aval $V_a \simeq 160$ litres ;
- * débit nominal $Q_1^\circ \simeq 238 \text{ m}^3/\text{h(N)}$;
- * la vanne d'amortissement V_{a2} est ouverte à 1 tour ;
- * la vanne de fuite V_{a3} est ouverte à 2 tours ;
- * l'évent pilote ne comporte pas de restriction.

Dans un premier temps on sollicite le système en créant une perturbation par l'électrovanne placée en sortie de banc (c'est le cas classique). Le système se met uniquement en pompage. Cet effet de pompage est atténué et par conséquent l'appareil est stabilisé en plaçant une restriction au niveau de l'évent pilote. De la même façon, on obtient le même phénomène si on lamine (en plaçant une restriction) au niveau de la prise d'influence pilote.

Dans un second temps, et en gardant la même configuration, le système est sollicité par l'introduction brusque d'une variation de pression au niveau de l'évent pilote. Le système se met alors en vibration entretenue, à la fréquence $F_v \simeq 19$ Hz. La figure III.1.3.6a nous montre la variation de la pression aval lors de la mise en vibration.

Cette série d'essais nous montre le rôle prépondérant que joue l'ensemble pilote lors de la mise en vibration du régulateur-détendeur. Elle nous permet également de confirmer le fait que toute introduction de perte de charge a un effet stabilisateur.

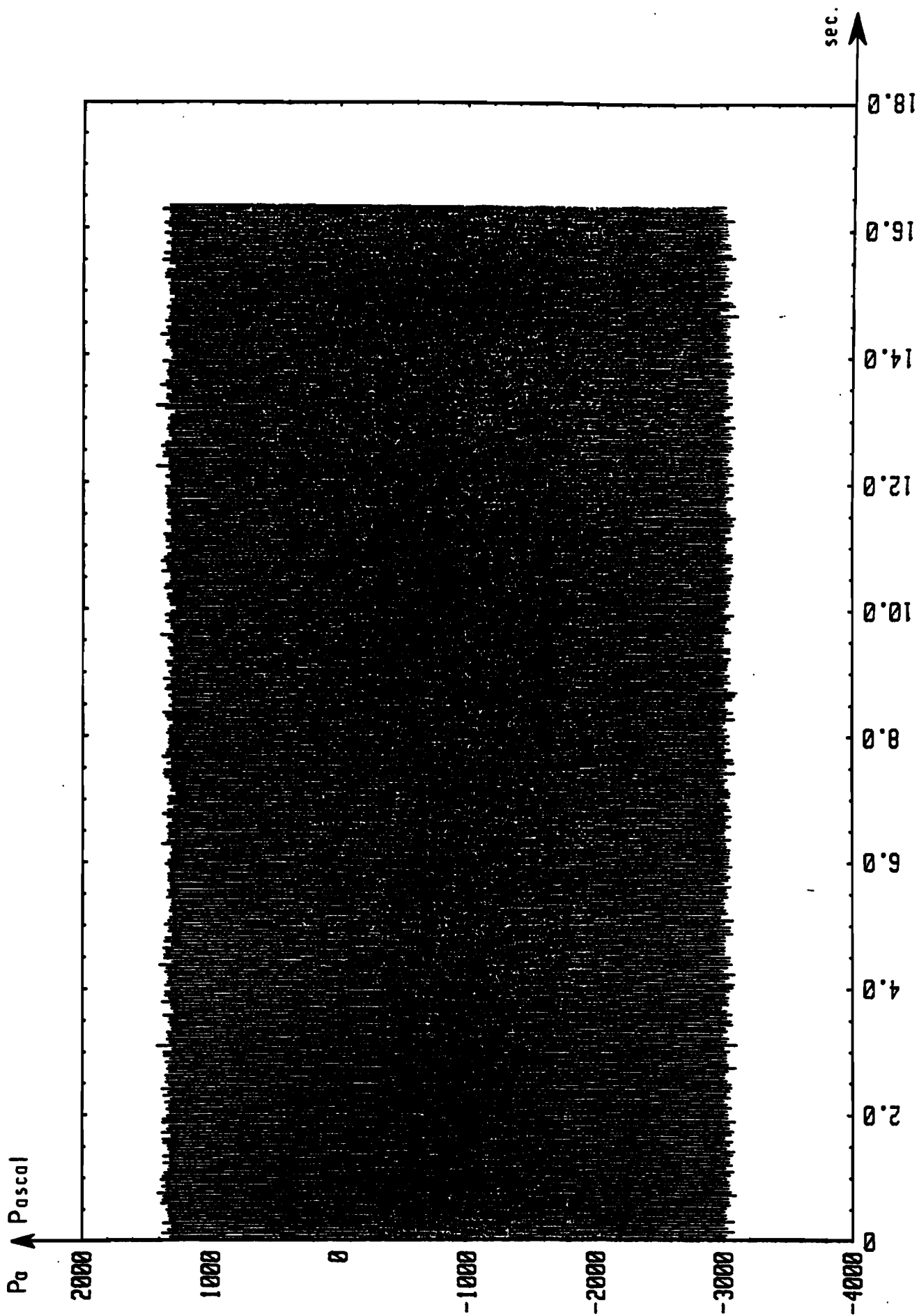


Figure III 1.3.6.0. Evolution de la pression aval lors de la mise en vibration du régulateur

III.1.3.7 - Influence du volume aval

Nous avons vu, à partir de l'étude paramétrique effectuée au § III.1.2.9, que le volume aval jouait un rôle assez important dans la stabilité du système. Nous avons en particulier, montré que toute diminution du volume aval augmentait la fréquence de pompage et l'amplitude de la variation de la pression aval et améliorerait la stabilité du système. Le but de ces essais est de pouvoir confirmer ces constatations.

1 - Montage et description de l'essai

Deux capacités, d'environ 600 litres chacune, sont superposées et montées à l'aval du régulateur-détendeur (voir figure III.1.3.7a). Ces deux capacités pouvant être isolées grâce à une vanne dite vanne papillon.

Le volume aval effectif du régulateur-détendeur, c'est-à-dire le volume par où transite le gaz à la sortie de l'appareil est le volume supérieur noté volume V1a sur la figure. Le volume inférieur V2a est initialement plein d'eau. L'essai consiste à d'abord diminuer le volume en gaz de V1a, en y transférant par l'intermédiaire de la vanne une certaine quantité d'eau provenant de V2a. Ensuite le volume V1a est isolé. On observe alors, après sollicitation, le comportement du régulateur-détendeur.

2 - Expression des résultats

a - Première série d'essais

- . la vanne d'amortissement V_{a2} est ouverte à 1/4 tour ;
- . la vanne de fuite V_{a3} est ouverte à 2 tours ;
- . la pression de prédétente Π est fixée à 200 mbar ;
- . le débit nominal est fixé à $Q_1 = 227 \text{ m}^3/\text{h(N)}$.

.../...

Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

volume aval	Fréquence de pompage	Observation sur la stabilité
690 litres	1,33 Hz	le système est instable pompage entretenu
550 litres	1,43 Hz	pompage entretenu
445 litres	1,55 Hz	pompage entretenu
345 litres	1,7 Hz	pompage entretenu
235 litres	1,85 Hz	pompage entretenu
160 litres	1,95 Hz	pompage entretenu
135 litres	2 Hz	le système est toujours instables mais le pompage à tendance à s'atténuer
115 litres	2,1 Hz	le système se stabilise mais au bout d'un temps très long
75 litres	2,15 Hz	système stable, temps de stabilisation très court.

On remarque donc, d'après le tableau ci-dessus, que toute diminution du volume aval, atténue le phénomène de pompage et augmente la fréquence de pompage. Ce qui confirme l'étude théorique du § III.1.9.

b - Deuxième série d'essais

- . la vanne d'amortissement V_{a2} est ouverte à 1/4 tour ;
- . la vanne de fuite V_{a3} est ouverte à 2 tours ;
- . la pression de prédétente II est fixée à 200 mbar.

On cherche, pour différentes valeurs du débit nominal, le volume aval à partir duquel le régulateur-détendeur FRANCEL BP est stable. Ce volume correspond au volume aval supérieur de stabilité.

Q1	Va (volume aval)
227 m ³ /h(N)	75 litres
334 m ³ /h(N)	100 litres
374 m ³ /h(N)	175 litres

.../...

On remarque que le volume de stabilisation varie en fonction du débit nominal et que ce volume est d'autant plus grand que le débit est important.

c - Troisième série d'essais

* On fixe le débit nominal Q_1 à $215 \text{ m}^3/\text{h(N)}$;

* La vanne de fuite V_{a3} est ouverte à 2 tours ;

* La pression de prédétente II est fixée à 200 bar.

Dans un premier temps on cherche, la vanne d'amortissement V_{a2} étant ouverte à $1/4$ tour, quel est le volume aval limite supérieur de stabilité correspondant, c'est-à-dire le volume à partir duquel le régulateur détendeur devient stable. On constate que le système se stabilise pour un volume $V_a \approx 50$ litres.

Ensuite, pour un tel volume ($V_a \approx 50$ litres), on fait varier l'ouverture de la vanne d'amortissement. Les résultats obtenus sont regroupés dans le tableau suivant :

$V_{a2} \approx 1/4$ tour	système stable
$V_{a2} \approx 1/2$ tour	léger pompage. Mais stabilisation au bout d'un temps très long
$V_{a2} \approx 1$ tour	léger pompage entretenu
$V_{a2} \approx 2$ tour	pompage

On remarque donc que le volume aval de stabilité est aussi fonction des conditions de réglage de l'appareil. En particulier ici, on constate que toute réduction de l'ouverture de la vanne d'amortissement a un effet stabilisateur ce qui confirme l'étude fait au § III.1.2.5.

.../...

III.1.4 - IDENTIFICATION DU SYSTEME LINEAIRE

III.1.4.1 - But de l'identification

Après avoir construit par voie déductive, les deux modèles, respectivement non linéaire, et linéaire représentant l'appareil, une étape décisive dans notre recherche a été la validation des modèles. A cet effet, nous avons réalisé avec l'aide de MM. J.Ph. CORNIL, A. DEBAILLEUL, une campagne de mesures sur un FRANCEL BP (voir § III.1.3). Au cours de cette campagne de mesures nous avons déterminé, à l'aide de capteurs, l'évolution temporelle de certains des éléments de la matrice colonne U, en réponse à une évolution temporelle déterminée de la matrice colonne E. Les mesures ont été enregistrées et ceci pour divers essais correspondant à diverses valeurs des paramètres de réglage de l'appareil. A partir de ces données, la validation de l'un ou l'autre des modèles comporte une double démarche : identification puis validation proprement dite. L'identification est une démarche de mise au point définitive du modèle. Qu'il s'agisse du modèle linéaire ou du modèle non linéaire, ceux-ci contiennent des constantes numériques, qui sont les valeurs prises par certaines grandeurs pour un appareil déterminé. Certaines de ces grandeurs sont accessibles à une mesure directe, d'autres le sont avec une marge d'incertitude ou ne sont pas accessibles du tout. L'identification consiste à déterminer les constantes en question, en essayant de réaliser au mieux l'adéquation entre la fonction $t \rightarrow U(t)_{\text{observée}}$, observée lors de la campagne d'essais et l'équation différentielle traduisant le modèle. Nous verrons en III.1.4.2 comment réaliser cette identification. La validation proprement dite consiste à soumettre le modèle identifié à une simulation numérique de manière à obtenir une fonction $t \rightarrow U(t)_{\text{simul}}$ et à comparer les deux fonctions :

$$t \rightarrow U(t)_{\text{simul}} \quad \text{et} \quad t \rightarrow U(t)_{\text{observée}}$$

Dans tout ce qui suit, on appellera processus, tout ce qui est relatif au système réel (en l'occurrence l'appareil) en opposition au modèle mathématique.

III.1.4.2 - Méthode d'identification paramétrique

Notre propos, dans cette partie, est de mettre en place la méthode d'identification paramétrique que nous allons utiliser pour mieux estimer certains paramètres du modèle.

.../...

Le système linéaire s'écrit sous la forme matricielle suivante

$$\text{III.1.4.2 - (1)} \quad \frac{dU}{dt} = AU + BE$$

où

. U représente le vecteur d'état du système, c'est-à-dire la matrice colonne dont les composantes sont les inconnues décrivant l'état instantané du système.

. E représente le vecteur d'entrée du système, c'est-à-dire la matrice colonne dont les composantes sont des fonctions connues du temps qui caractérisent l'excitation du système.

Les paramètres que nous voulons identifier, sont des éléments de la matrice A et de la matrice B.

Au départ, on suppose que le relevé du jeu d'entrée-sortie (E, U) a été effectué expérimentalement sur le processus.

Par conséquent, si notre modèle mathématique défini par l'équation III.1.4.2 - (1) décrit le comportement du processus, on devrait pouvoir déterminer les éléments des matrices A et B, à partir des relevés expérimentaux.

Remarque :

Dans tout ce qui suit, dans cette partie, nous soulignerons avec deux barres les matrices, et nous soulignerons d'une barre les vecteurs.

Définissons la fonctionnelle de A et B suivante :

$$I(A, B) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) (\dot{U}(t) - \underline{A} \cdot U(t) - \underline{B} \cdot E(t))^T (\dot{U}(t) - \underline{A} \cdot U(t) - \underline{B} \cdot E(t)) dt$$

où nous supposons la fonction $g(t)$ positive et suffisamment régulière pour que l'intégrale soit définie.

.../...

Nous supposons en outre que la fonction $g(t)$ est nulle en dehors de l'intervalle de temps d'observation du processus expérimental. On a :

III.1.4.2 - (2)

$$\begin{aligned}
 I(A, B) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \dot{U}^T(t) \cdot \dot{U}(t) dt - \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \dot{U}^T(t) \cdot \underline{A} \cdot U(t) dt \\
 &- \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \dot{U}^T(t) \cdot \underline{B} \cdot E(t) dt - \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) U^T \cdot \underline{A} \cdot \dot{U} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) U^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{A} \cdot U dt \\
 &+ \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) U^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{B} \cdot E dt - \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) E^T \cdot \underline{B} \cdot \dot{U} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) E^T \cdot \underline{B} \cdot \underline{A} \cdot U dt \\
 &+ \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) E^T \cdot \underline{B} \cdot \underline{B} \cdot E dt
 \end{aligned}$$

Soit $[0, T]$ l'intervalle de temps pendant lequel est observé le processus expérimental.

La fonctionnelle $I(A, B)$ définie par la formule III.1.4.2 - (2) devient :

III.1.4.2 - (3)

$$\begin{aligned}
 I(A, B) &= \int_0^T g(t) \dot{U}^T \cdot \dot{U} dt - \int_0^T g(t) \dot{U}^T \cdot \underline{A} \cdot U dt \\
 &- \int_0^T g(t) \dot{U}^T \cdot \underline{B} \cdot E dt - \int_0^T g(t) U^T \cdot \underline{A} \cdot \dot{U} dt + \int_0^T g(t) U^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{A} \cdot U dt \\
 &+ \int_0^T g(t) U^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{B} \cdot E dt - \int_0^T g(t) E^T \cdot \underline{B} \cdot \dot{U} dt + \int_0^T g(t) E^T \cdot \underline{B} \cdot \underline{A} \cdot U dt \\
 &+ \int_0^T g(t) E^T \cdot \underline{B} \cdot \underline{B} \cdot E dt
 \end{aligned}$$

.../...

Identifier les paramètres du système, revient à chercher les composantes de la matrice A et de la matrice B qui minimisent la fonctionnelle I (A, B) définie en III.1.3.2 (3).

Pour minimiser I on doit écrire que :

$$\text{III.1.4.2 (4)} \quad \frac{\partial I}{\partial \underline{A}} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial I}{\partial \underline{B}} = 0$$

Soient A_{pq} et B_{ij} les paramètres que nous voulons identifier.

Pour le calcul des dérivées, nous adopterons la convention de l'indice muet.

$$\frac{\partial I}{\partial A_{pq}} = -2 \int_0^T g(t) \dot{U}_p(t) U_q(t) dt + 2 \left(\int_0^T g(t) U_q(t) U_k(t) dt \right) A_{pk}$$

$$+ 2 \left(\int_0^T g(t) U_p(t) E_k(t) dt \right) B_{qk}$$

$$\frac{\partial I}{\partial B_{pq}} = -2 \int_0^T g(t) \dot{U}_p(t) E_q(t) dt + 2 \left(\int_0^T g(t) U_k(t) E_p(t) dt \right) A_{qk}$$

$$+ 2 \left(\int_0^T g(t) E_q(t) E_k(t) dt \right) B_{pk}$$

.../...

Posons

$$\text{III.1.4.2 (5)} \quad \lambda_{pq} = \int_0^T g(t) \dot{U}_p(t) U_q(t) dt$$

$$\mu_{pq} = \int_0^T g(t) \dot{U}_p(t) E_q(t) dt$$

$$\alpha_{qk} = \int_0^T g(t) U_q(t) U_k(t) dt$$

$$\beta_{pk} = \int_0^T g(t) U_p(t) E_k(t) dt$$

$$\gamma_{qk} = \int_0^T g(t) E_q(t) E_k(t) dt$$

Avec les notations III.1.4.2 (5), le système III.1.4.2 (4) peut s'écrire :

$$\text{III.1.4.2 (6)} \quad \begin{cases} \alpha_{qk} A_{pk} + \beta_{pk} B_{qk} = \lambda_{pq} \\ \beta_{pk} A_{qk} + \gamma_{qk} B_{pk} = \mu_{pq} \end{cases}$$

Comme les valeurs α , β , γ , λ et μ sont entièrement connues grâce aux relevés expérimentaux, la recherche des paramètres qui minimisent la fonctionnelle I consiste à résoudre le système d'équations linéaires III.1.4.2 (6).

En toute rigueur, les paramètres A_{pq} et B_{pq} déterminés à partir du système linéaire, optimisent la fonctionnelle $I(A, B)$. Pour nous assurer qu'ils minimisent effectivement $I(A, B)$, il nous suffit de montrer que cette fonctionnelle est convexe.

.../...

Du fait de la positivité de la fonction $g(t)$ dans l'intervalle d'observation, on montre que $I(A, B)$ est convexe.

En effet :

$$I(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2, \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2) = \int_0^T g(t) (\lambda_1 F_1^T + \lambda_2 F_2^T)(\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2) dt$$

avec $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$

$$\text{et } F_1 = \dot{U} - A_1 U - B_1 E \quad F_2 = \dot{U} - A_2 U - B_2 E$$

On a,

$$I(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2, \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2) = \lambda_1 I(A_1, B_1) + \lambda_2 I(A_2, B_2) - \int_0^T g(t) \{ (\lambda_1 F_1^T + \lambda_2 F_2^T)(\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2) - \lambda_1 F_1^T F_1 - \lambda_2 F_2^T F_2 \} dt$$

L'expression entre accolades sous le signe intégrale donne par développement :

$$\begin{aligned} (.) &= \lambda_1^2 F_1^T F_1 + \lambda_1 \lambda_2 (F_1^T F_2 + F_2^T F_1) + \lambda_2^2 F_2^T F_2 - \lambda_1 (\lambda_1 + \lambda_2) F_1^T F_1 - \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2) F_2^T F_2 \\ &= \lambda_1 \lambda_2 (F_1^T F_2 + F_2^T F_1 - F_1^T F_1 - F_2^T F_2) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 (F_1^T (F_2 - F_1) + F_2^T (F_1 - F_2)) \\ &= \lambda_1 (1 - \lambda_1) (F_1^T - F_2^T) (F_2 - F_1) < 0 \end{aligned}$$

Comme $g(t)$ est positive, on a $(g(t) (.)) < 0$

Par conséquent :

$$\int_0^T g(t) \{ (\lambda_1 F_1^T + \lambda_2 F_2^T)(\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2) - \lambda_1 F_1^T F_1 - \lambda_2 F_2^T F_2 \} dt < 0$$

.../...

Ce qui revient à dire qu'on a :

$$I(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2, \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2) < \lambda_1 I(A_1, B_1) + \lambda_2 I(A_2, B_2)$$

D'où $I(A, B)$ est strictement convexe. Par conséquent, les paramètres A_{pq} et B_{pq} solutions de III.1.4.2 (6) minimisent $I(A, B)$ et donnent donc la meilleure estimation paramétrique conduisant le modèle à un comportement comparable à celui du processus réel.

III.1.4.3 - Identification

La méthode que nous venons de développer au § III.1.4.2 et qui nous permet de mieux estimer les paramètres du modèle à partir des résultats expérimentaux, est d'autant plus performante numériquement que le nombre de paramètres est plus petit.

Nous avons pour cela, adapté la méthode de façon à permettre l'identification équation par équation. Ainsi le nombre de paramètres à identifier est faible et par conséquent ceux-ci sont mieux estimés.

III.1.4.3.1 - Equation de la dynamique pour le mouvement de l'équipage mobile et identification de f

On part de l'équation de la dynamique pour le mouvement de l'équipage mobile pilote soit :

$$\text{III.1.4.3.1 - (1) } m \Delta \ddot{x} + f \Delta \dot{x} + k \Delta x - \sigma(\Delta P_h - \Delta P_b) = 0$$

.../...

Les paramètres m (représentant la masse équivalente de l'équipage mobile pilote), k (représentant la raideur du ressort pilote) et σ (représentant la section de la membrane du pilote) ayant été mesurés, ils sont par conséquent bien connus. On cherche donc, pour un essai donné, à estimer la valeur du coefficient de frottement visqueux f . Pour cela, nous allons suivre un raisonnement analogue à celui développé au § III.1.4.2, en prenant ici comme fonction de pondération $g(t) = 1$.

Posons : $F_1(t) = m\Delta\ddot{x} + k\Delta x - \sigma(\Delta P_h - \Delta P_b)$

$$F_2(t) = \Delta\dot{x}$$

$T = 8$ secondes représentent le temps d'observation du processus expérimental

On a :

$$I(f) = \int_0^T (F_1(t) + fF_2(t))^T (F_1(t) + fF_2(t)) dt$$

$$= \int_0^T |F_1(t)|^2 dt + f^2 \int_0^T |F_2(t)|^2 dt + 2f \int_0^T F_1(t)F_2(t) dt$$

Par conséquent $\frac{\partial I}{\partial f} = 2f \int_0^T |F_2(t)|^2 dt + 2 \int_0^T F_1(t)F_2(t) dt$

D'où le paramètre f qui minimise la fonctionnelle I , c'est-à-dire qui est tel que :

$\frac{\partial I}{\partial f} = 0$ est :

$$f = - \frac{\int_0^T F_1(t)F_2(t) dt}{\int_0^T |F_2(t)|^2 dt}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } m &= 2,6 \cdot 10^{-1} \text{ kg} \\ k &= 4,2 \cdot 10^3 \text{ N/m} \\ \sigma &= 8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \end{aligned}$$

On obtient la valeur suivante de f : $f = 48 \text{ N/m/s}$

On remarquera que la valeur de f obtenue par identification a bien le signe d'un amortissement.

La figure III.1.4.3.1.1 représente :

* en trait continu, la variation du mouvement de l'équipage mobile pilote, obtenue par simulation numérique effectuée à partir des paramètres après l'identification,

* en pointillé, la variation du mouvement de l'équipage mobile pilote, obtenue expérimentalement.

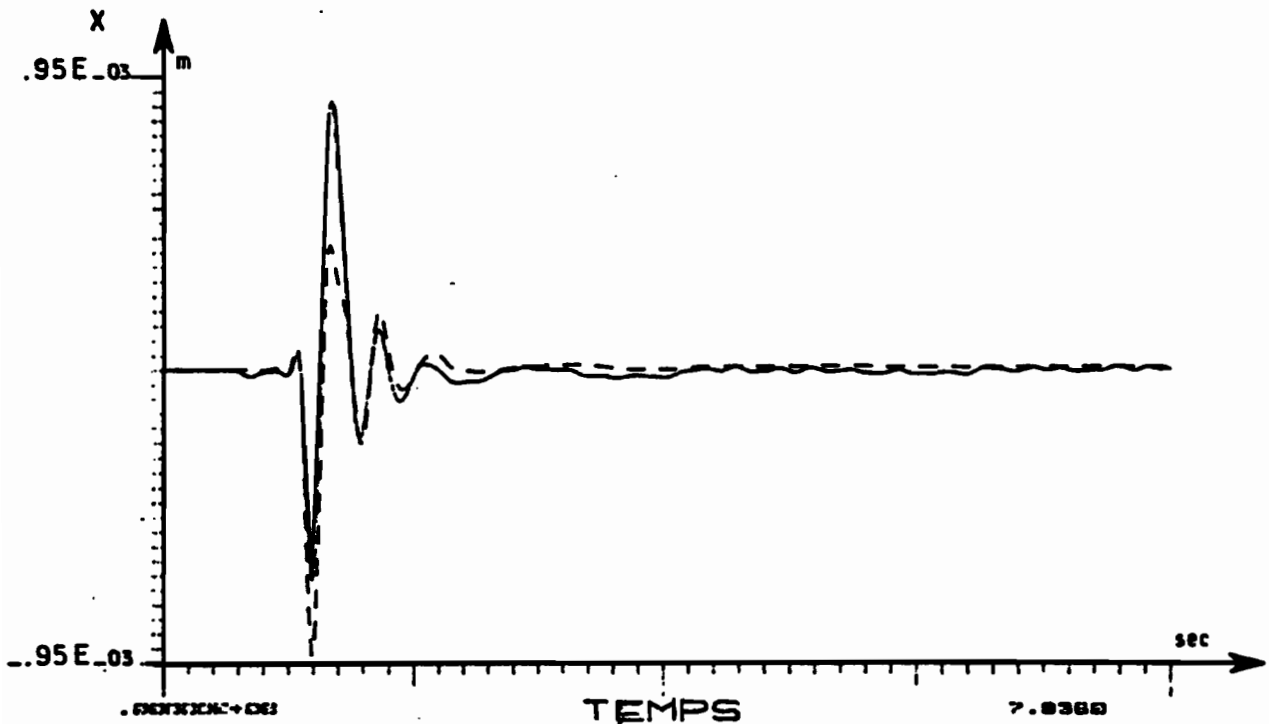


figure III.1.4.3.1.1 - Comparaison entre le déplacement de l'équipage mobile du pilote
 x théorique (—) et x expérimental (---) après identification

III.1.4.3.2 - Identification des autres paramètres du système linéaire

En suivant un raisonnement analogue à celui développé au § III.1.4.3.1, on identifie équation par équation, sur le même essai que précédemment, les autres paramètres du modèle.

Cette série d'identifications nous permet d'obtenir les valeurs suivantes :

. Le coefficient d'amortissement visqueux de l'équipage mobile du détendeur principal F vaut :

$$F \approx 3,5 \cdot 10^2 \text{ N/m/s}$$

. Le coefficient de perte de charge de la prise d'influence pilote vaut :

$$R \approx 2.2 \cdot 10^7 \text{ S.I}$$

. Le coefficient de perte de charge de la prise d'influence principale vaut :

$$R^* \approx 3.9 \cdot 10^6 \text{ S.I}$$

. Le coefficient caractérisant la perte de charge au niveau de la vanne d'amortissement V_{a2} vaut :

$$R2 \approx 3.5 \cdot 10^7 \text{ S.I}$$

La figure III.1.4.3.2.1 représente une comparaison entre la variation de la pression dans la chambre supérieure du pilote p_h obtenue expérimentalement (en ----) et celle (en ___) obtenue par simulation numérique après identification.

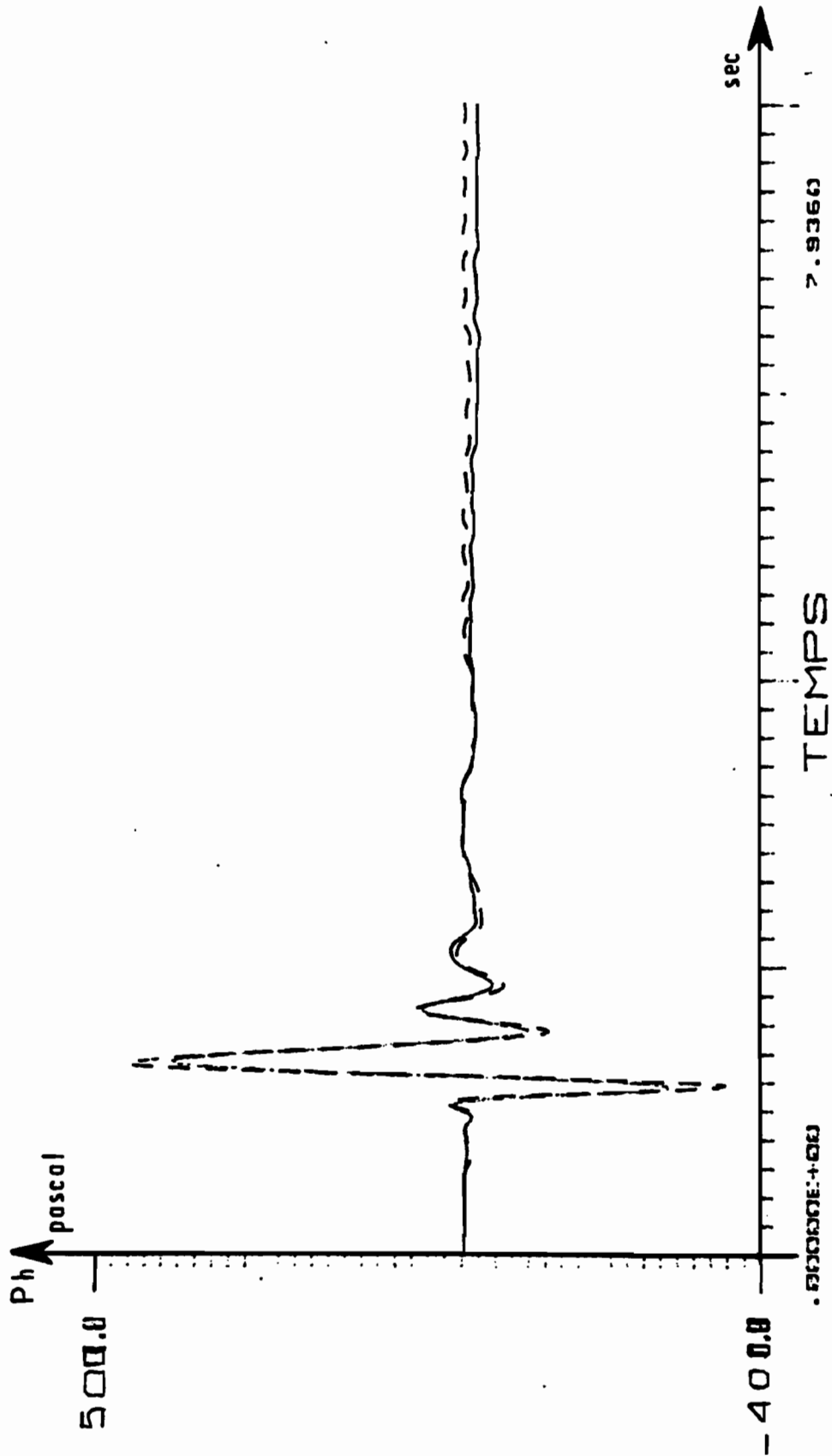


Figure III.1.4.3.2.1 - Comparaison entre Ph expérimental (---) et Ph théorique (—) après identification

III.1.4.3.3 - Identification du système linéaire à partir d'un autre essai

Nous reprenons la même série d'identification, en partant cette fois-ci d'un essai différent de celui qui nous a servi à l'identification aux paragraphes III.1.4.3.1 et III.1.4.3.2. Cet essai est différent du précédent, dans la mesure où nous avons des conditions différentes de réglage de l'appareil et un débit nominal différent.

Les paramètres initiaux (masse, raideur, etc...) qui ont été mesurés et donc bien connus, sont les mêmes qu'à la première identification. On cherche alors, à estimer les paramètres mal connus.

On arrive aux valeurs suivantes des paramètres (en unités S.I) :

$$\begin{array}{ll} f \approx 55 & F \approx 5 \cdot 10^2 \\ R \approx 1.47 \cdot 10^7 & R^* \approx 1.21 \cdot 10^6 \\ R_2 \approx 1.7 \cdot 10^7 & R_4 \approx 5.5 \cdot 10^3 \end{array}$$

On observera sur les figures III.1.4.3.3.1 - III.1.4.3.3.2, une comparaison entre les résultats expérimentaux, et les résultats obtenus par simulation numérique après identification.

On remarque donc que d'un essai à un autre, si certains paramètres sont restés inchangés, d'autres en revanche ont subi une variation. Ce sont surtout, les paramètres caractérisant les pertes de charge à savoir R , R^* , R_2 et R_4 qui subissent les fortes variations.

Ceci montre que ces grandeurs ont des valeurs qui varient d'un essai à un autre, c'est-à-dire suivant les conditions de réglage de l'appareil et le débit nominal. Cette incertitude au niveau de l'estimation de ces paramètres s'explique par le fait que ceux-ci ont été obtenus par une méthode d'approximation dite de la sécante et dont les valeurs dépendent du choix d'un point sur la courbe de fonctionnement donc du réglage de l'appareil et du débit nominal.

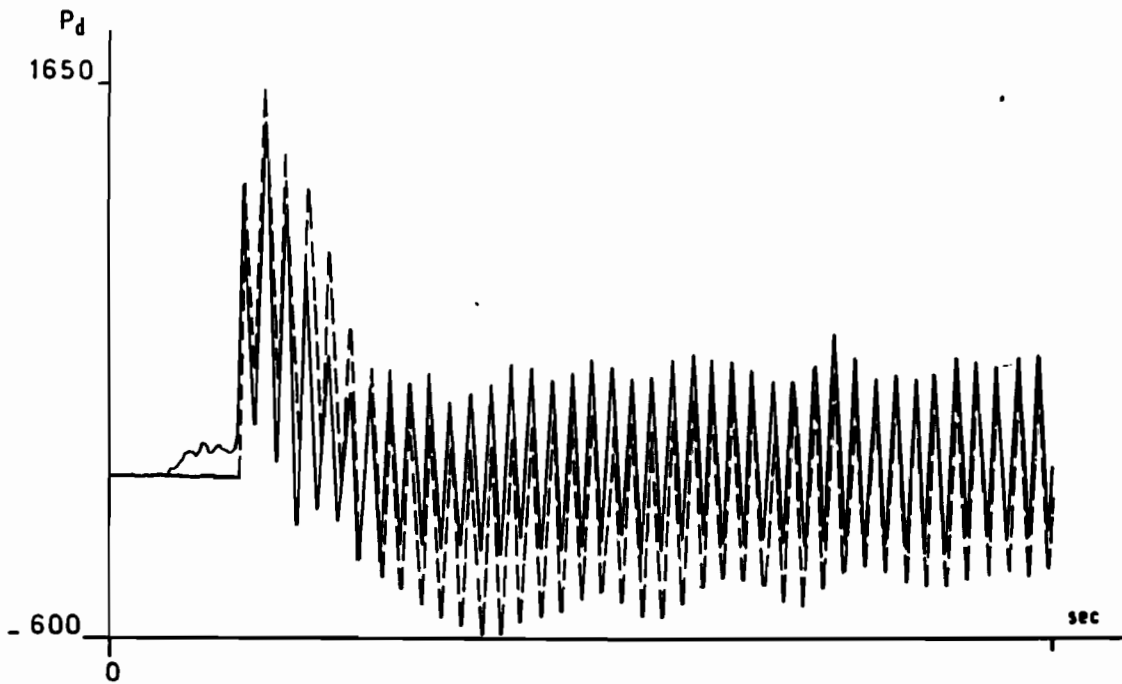


figure III.1.4.3.3.1 - Comparaison entre la pression P_d expérimentale (---) et P_d théorique (—)

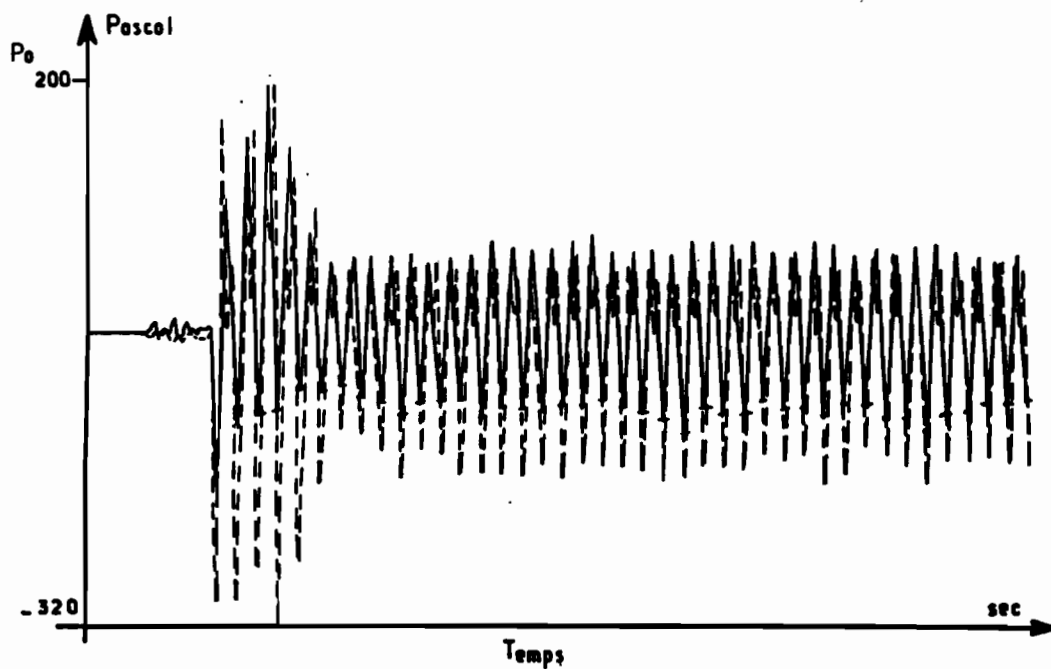


figure III 1.4.3.3.2 - Comparaison entre la pression aval théorique (—) et la pression aval expérimentale (---) après identification

III.1.5 - SIMULATION DU SYSTEME LINEAIRE

III.1.5.1 - Introduction

Le modèle linéaire ayant été mis en place, et les paramètres mieux estimés grâce à l'identification, une autre étape de cette étude est de soumettre ce modèle à la simulation numérique. L'un des objectifs de cette étape, est la possibilité qu'elle nous offre, d'avoir rapidement des informations sur le comportement dynamique du système, sans nécessairement avoir à effectuer une campagne d'essais, quelquefois longue à mettre en oeuvre.

La simulation numérique a été effectuée avec le logiciel ALLAN, réalisé par le DAS (Département Automatique et Système du Gaz de France) en collaboration avec la CISI.

Les résultats obtenus à l'issue des différentes simulations sont en parfaite concordance avec l'étude théorique. Nous allons, ici, présenter quelques uns de ces résultats.

III.1.5.2 - Résultats d'un test de simulation numérique

On considère un système dont les paramètres ont les valeurs données en annexe 4, c'est-à-dire en particulier un volume aval de 15 m^3 et un débit nominal de $8.5 \cdot 10^{-2} \text{ kg/s}$. Un tel système est excité par une fonction échelon en vitesse de 3 mm d'amplitude comme représentée sur la figure III.1.5.2.1. On observe alors son comportement pendant 8 secondes.

On a un système oscillant à une fréquence F_p de $0,7 \text{ Hz}$ et légèrement amorti.

Les figures III.1.5.2.2 - III.1.5.2.3 - III.1.5.2.4 - III.1.5.2.5 représentent l'évolution respectivement de la variation de la pression aval, de la variation de position du clapet pilote, de la pression motrice P_d et de la variation de position du clapet principal.

.../...

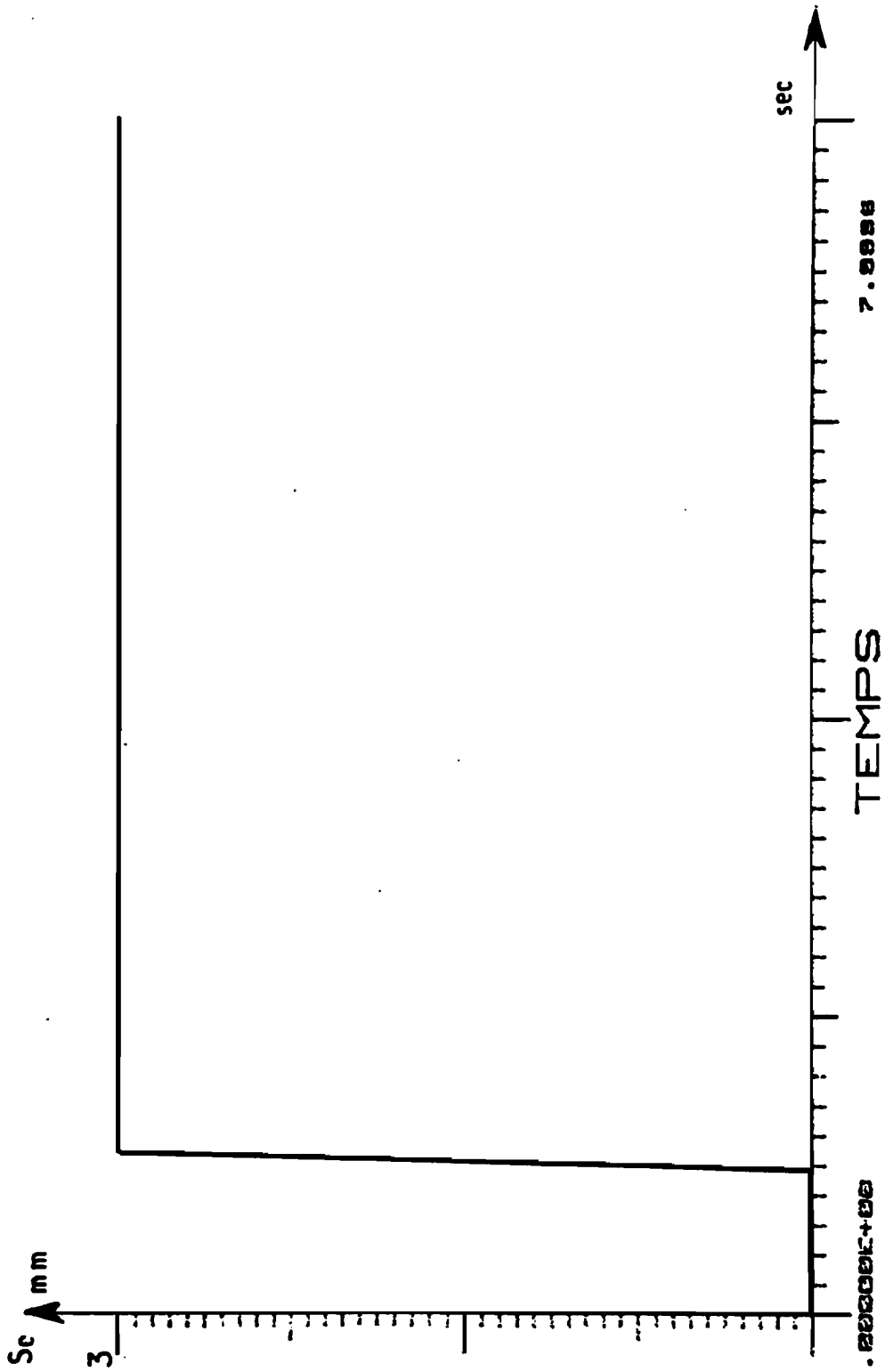


figure III 1.5.2.1 - fonction échelon en vitesse

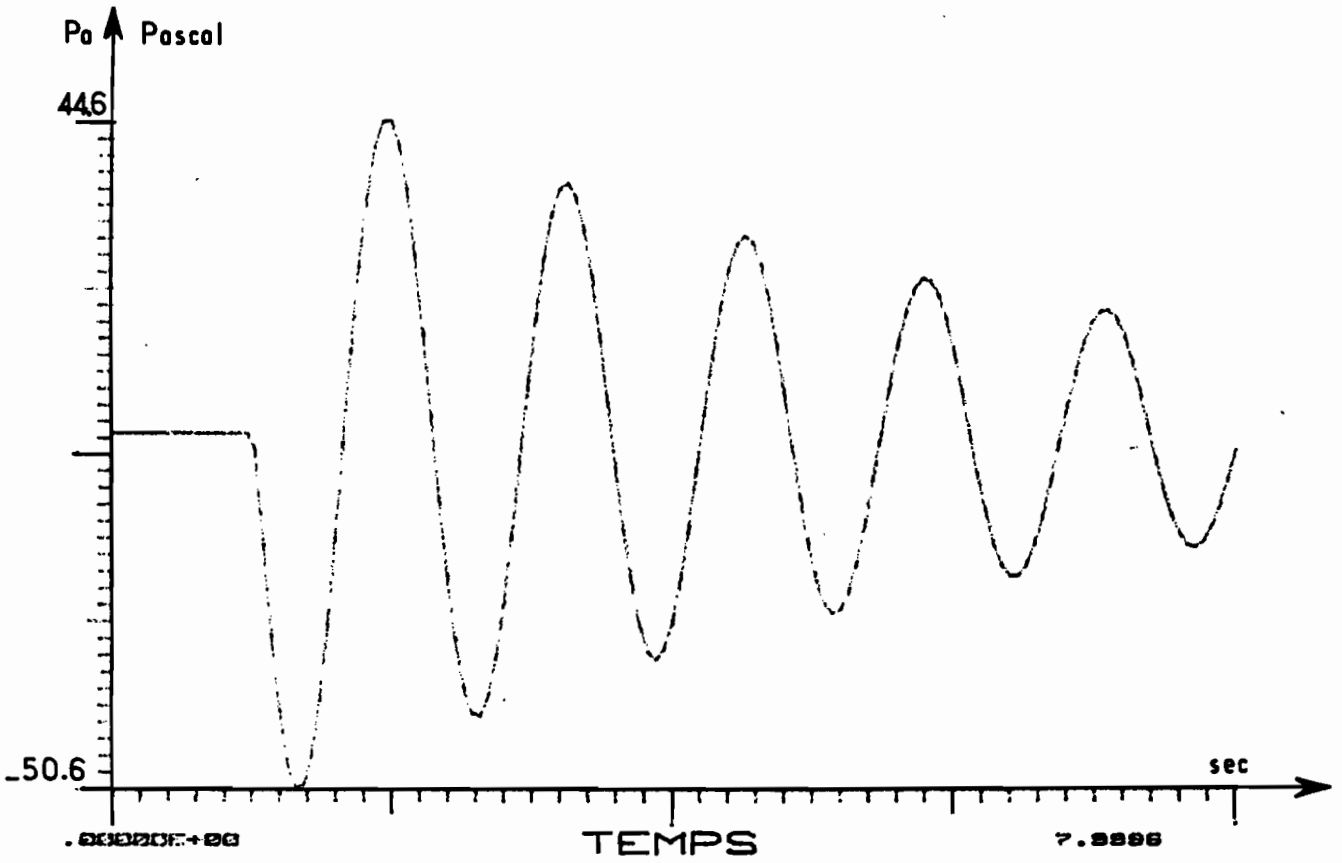


figure III 1.5.2.2 - Evolution de la pression oval

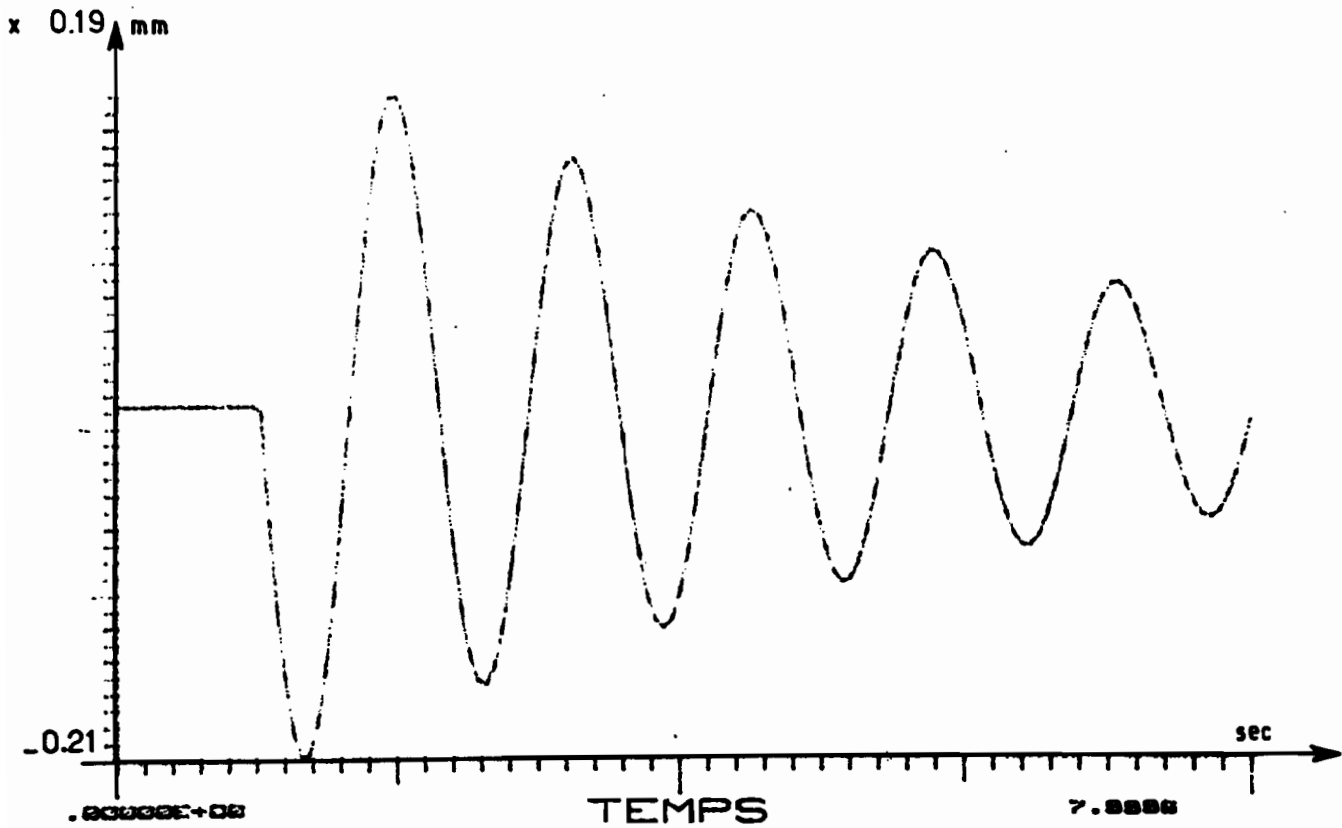


figure III 1.5.2.3 - Evolution de la position du clopet pilote

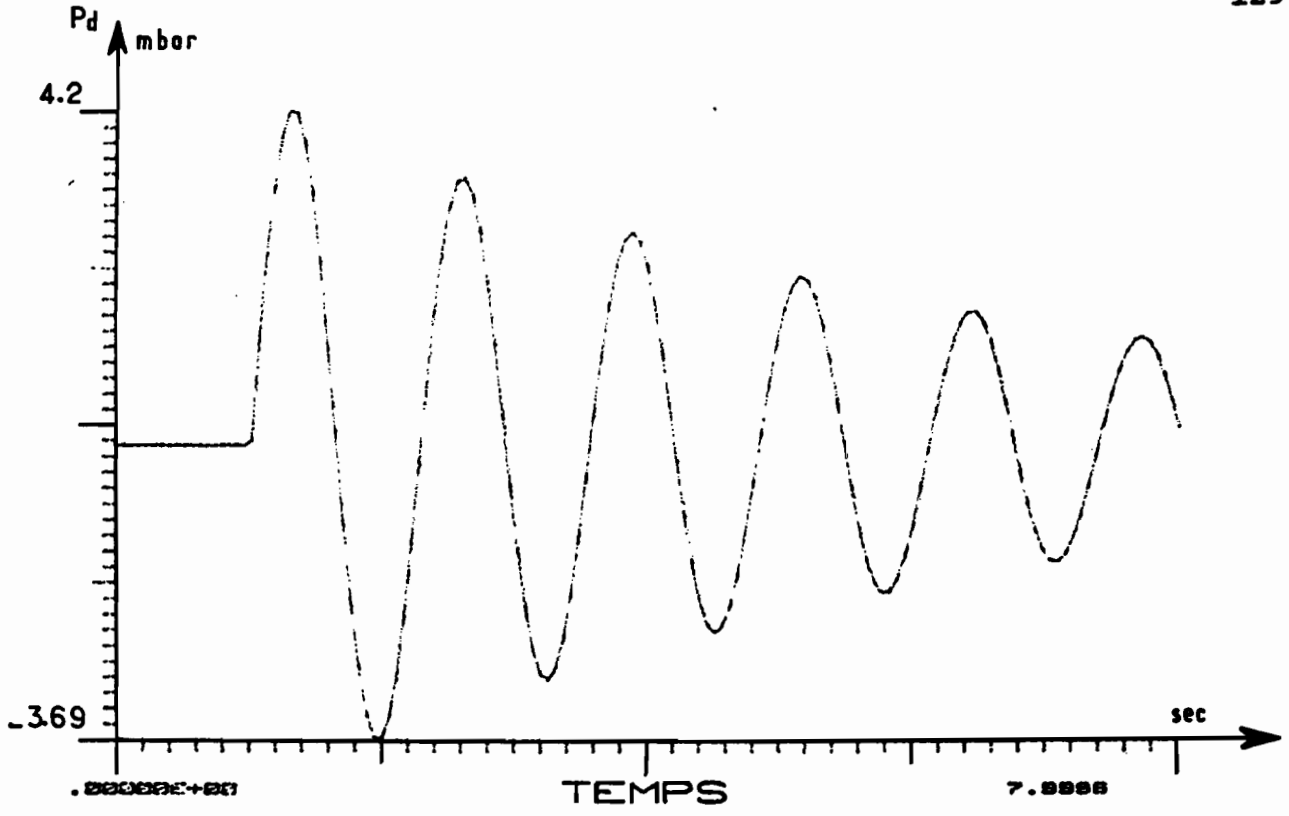


figure III 1.5.2.4 - Evolution de la pression P_d

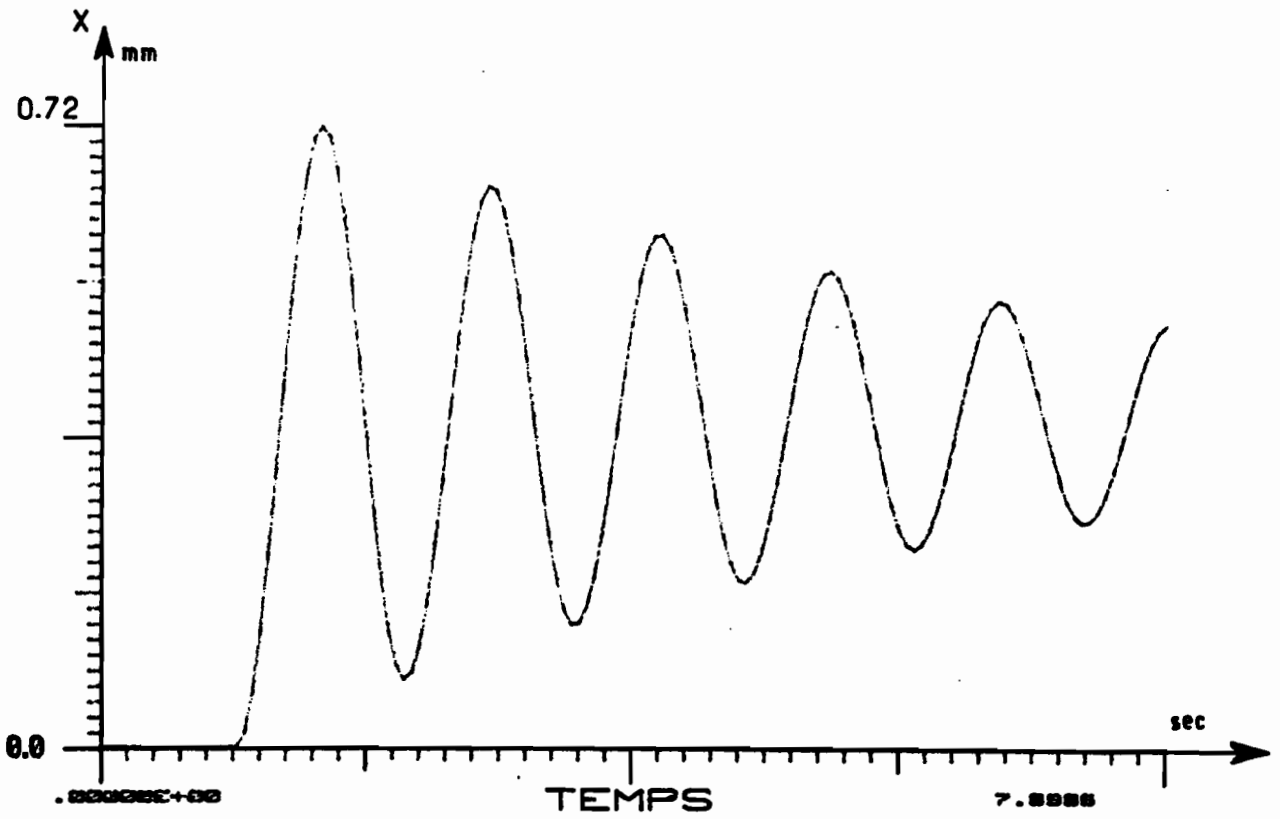


figure III 1.5.2.5 - Evolution de la position du clapet principal

On notera, entre autres, la faible amplitude de la variation de la pression aval.

Remarques : Dans toute la suite, sauf mention expresse du contraire, la fonction d'excitation sera celle représentée sur la figure III.1.5.2.1, et le temps d'observation sera de 8 secondes.

III.1.5.3 - Influence du volume aval

On considère dans un premier temps, un système ayant un volume aval de 115 litres et un débit nominal de $225 \text{ m}^3/\text{h(N)}$. La figure III.1.5.3.1 représente l'évolution de la pression aval. La fréquence de pompage F_p est de 2,07 Hz, ce qui concorde avec celle obtenue expérimentalement (voir au § III.1.3). On notera, à titre de comparaison, la différence d'amplitude entre la pression aval de la figure III.1.5.3.1 et celle de la figure III.1.5.2.2.

Dans un second temps, tous les autres paramètres étant fixés, on fait varier le volume aval de 115 litres à 75 litres. On remarquera sur la figure III.1.5.3.2, que le fait d'avoir diminué le volume aval, a rendu le système beaucoup plus stable. En revanche, on a une augmentation de la variation de la pression aval et de la fréquence de pompage qui est passée de 2,07 Hz à 2,15 Hz.

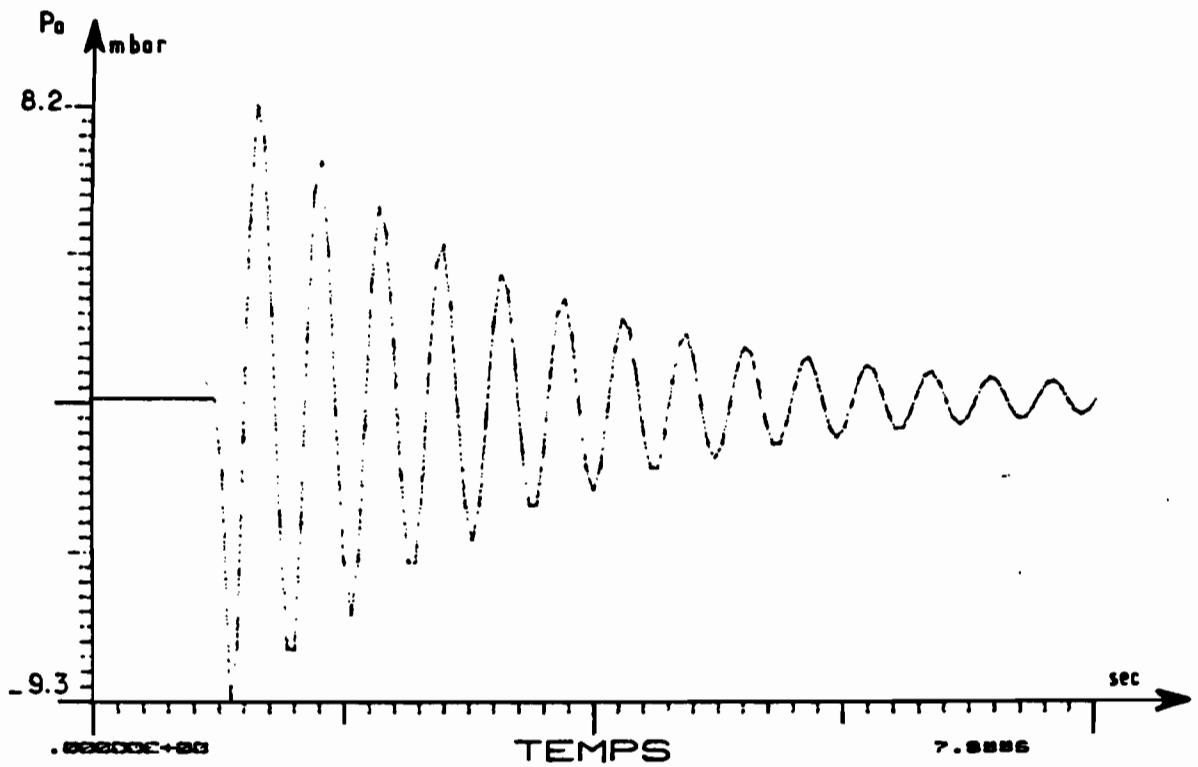


figure III 1.5.3.1 - Evolution de la pression aval
pour $V_0 = 115$ litres

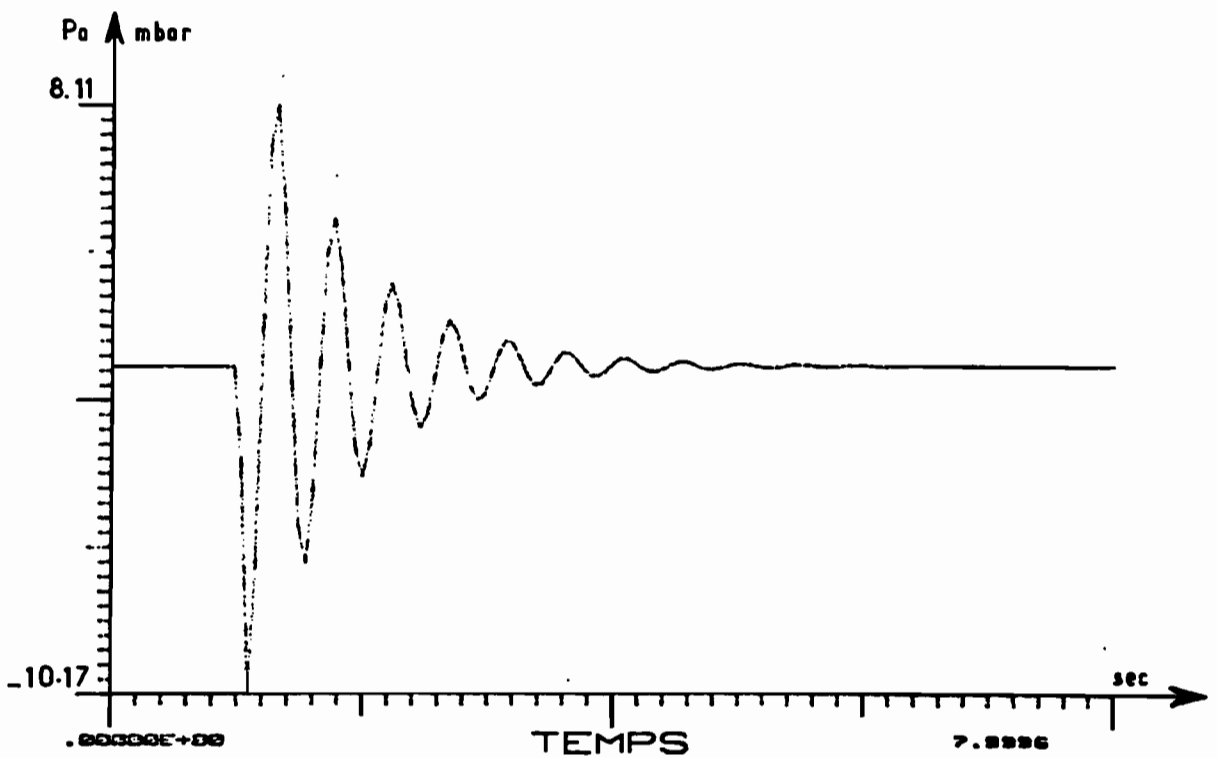


figure III 1.5.3.2 - Evolution de la pression aval
pour $V_0 = 75$ litres

III.1.5.4 - Influence du débit nominal

Pour un volume V_a de 70 litres, on fait varier la valeur du débit nominal.

La figure III.1.5.4.1 représente l'évolution de la pression aval pour un débit nominal Q_1^0 de $150 \text{ m}^3/\text{h(N)}$ tandis que la figure III.1.5.4.2 est relative à l'évolution de la pression aval pour un débit nominal Q_1^0 de $200 \text{ m}^3/\text{h(N)}$.

On constate, que le fait d'avoir augmenté le débit nominal, a rendu le système plus stable. Ce qui confirme l'étude théorique (vérifiée expérimentalement), à savoir que toute augmentation du débit nominal a un effet stabilisateur sur le système.

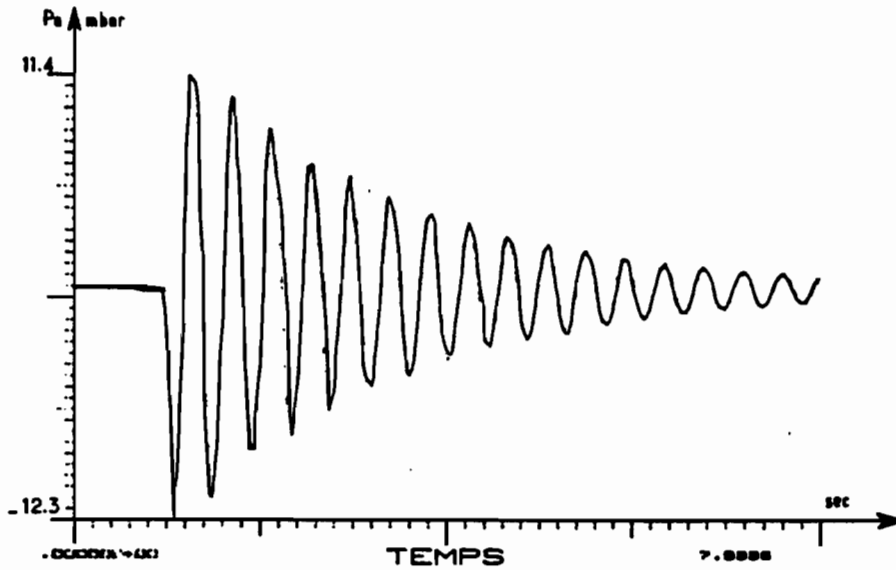


figure III 1.5.4.1 - Evolution de la pression aval
pour $Q_1 = 150 \text{ m}^3(\text{h}) \cdot \text{h}^{-1}$

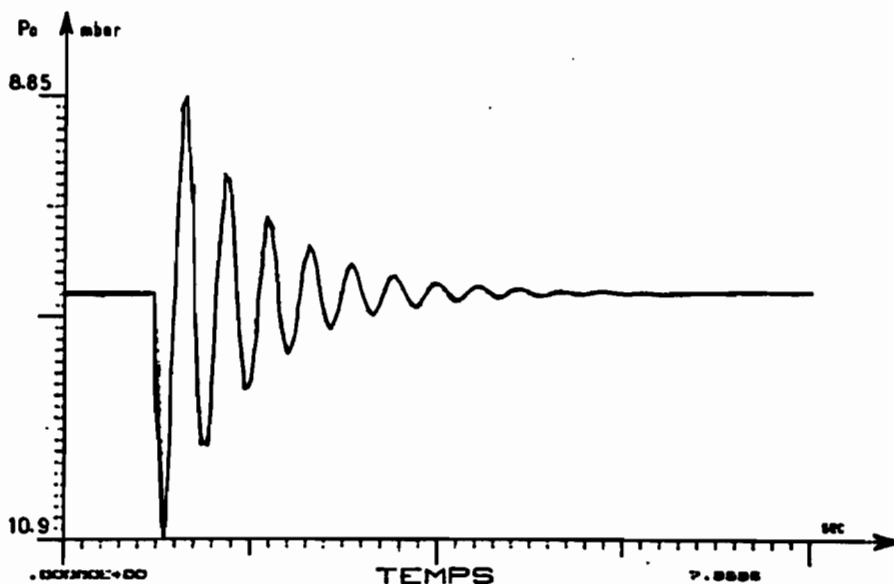


figure III 1.5.4.2 - Evolution de la pression aval
pour $Q_1 = 200 \text{ m}^3(\text{h}) \cdot \text{h}^{-1}$

III.1.5.5 - Influence de la forme du clapet

On considère un régulateur-détendeur par lequel transite un débit nominal Q_1^0 de $250 \text{ m}^3/\text{h(N)}$ et ayant un volume aval de 100 litres.

On munit, dans un premier temps, le régulateur d'un clapet dont le coefficient de la loi d'ouverture α est de 63 kg/s/m (c'est le cas du régulateur que nous avons utilisé). Ce qui correspond à une variation de débit d'environ $280 \text{ m}^3/\text{h(N)}$ par millimètre d'ouverture. La figure III.1.5.5.1 représente l'évolution de la pression aval dans ce cas.

On munit, dans un second temps, le régulateur d'un clapet dont le coefficient de la loi d'ouverture est sensiblement plus petit, soit $\alpha = 43 \text{ kg/s/m}$, ce qui correspond à environ $190 \text{ m}^3/\text{h(N)}$ par millimètre d'ouverture. On remarque, sur la figure III.1.5.5.2, que dans ces conditions, le système est beaucoup plus amorti.

Rappelons qu'une façon pratique d'avoir de petites valeurs de α en zone de petites ouvertures, c'est-à-dire pour de petites valeurs de X (qui est une zone de pompage), est de munir le régulateur d'un clapet à ouverture parabolique.

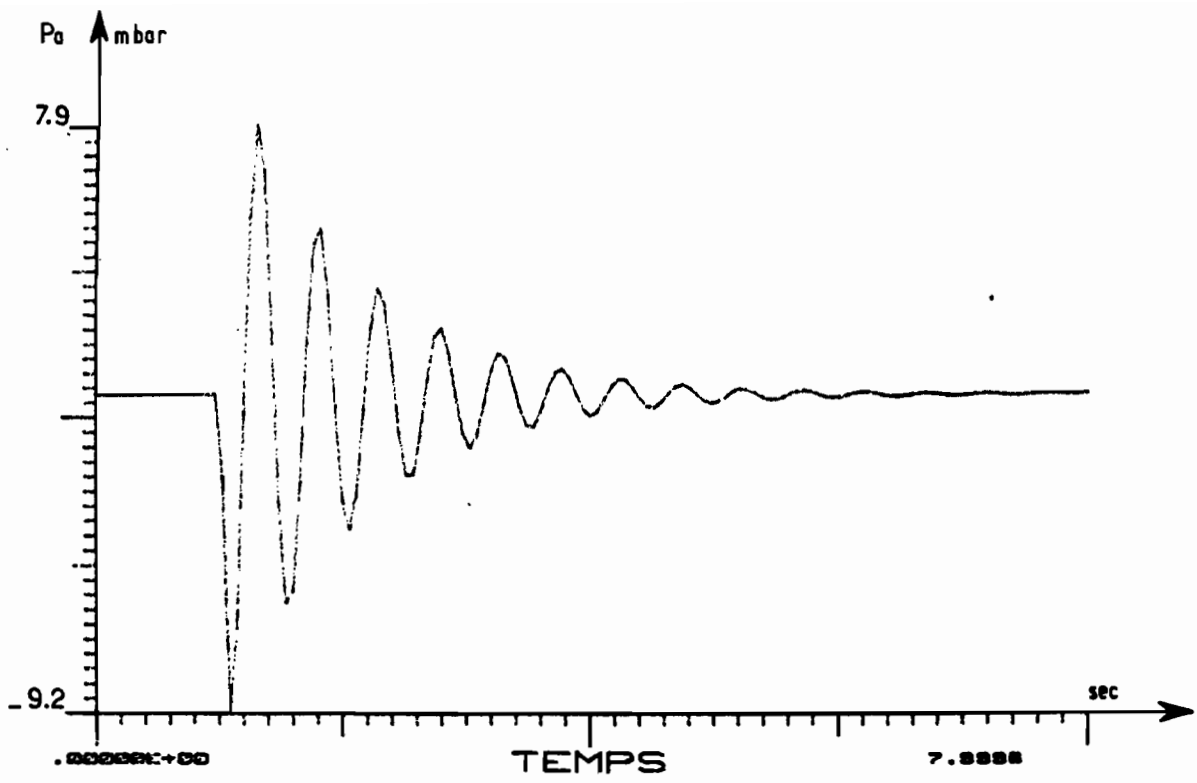


figure III 1.5.5.1 - Evolution de la pression aval pour $\alpha = 63 \text{ kg. s}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$

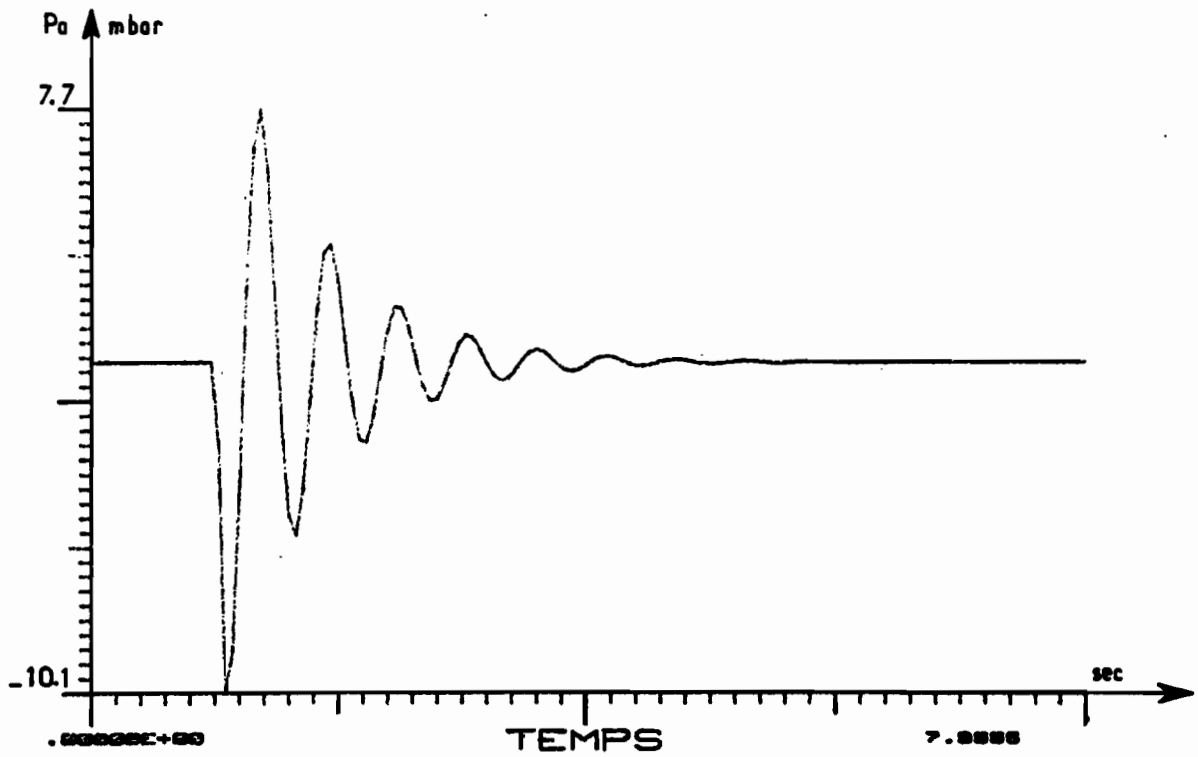


figure III 1.5.5.2 - Evolution de la pression aval pour $\alpha = 43 \text{ kg. s}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$

III.1.5.6 - Influence de la vanne d'amortissement V_{a2}

Dans le modèle, la vanne d'amortissement a été caractérisée par le paramètre R_2 . Plus exactement, augmenter la valeur de R_2 , revient à réduire l'ouverture de la vanne V_{a2} .

Si on fixe tous les autres paramètres et qu'on ne fait varier que R_2 , on remarque que le fait de passer de $R_2 = 2.5 \cdot 10^7$ (voir figure III.1.5.6.1) à $R_2 = 4.5 \cdot 10^7$ (voir figure III.1.5.6.2) rend le système beaucoup plus stable.

Comme on peut le remarquer sur ces deux figures, la fréquence de pompage est passée de 3,6 Hz à 3,1 Hz en augmentant la valeur de R_2 .

On voit donc que toute réduction de l'ouverture de la vanne d'amortissement V_{a2} atténue le phénomène de pompage et fait baisser la valeur de la fréquence de pompage.

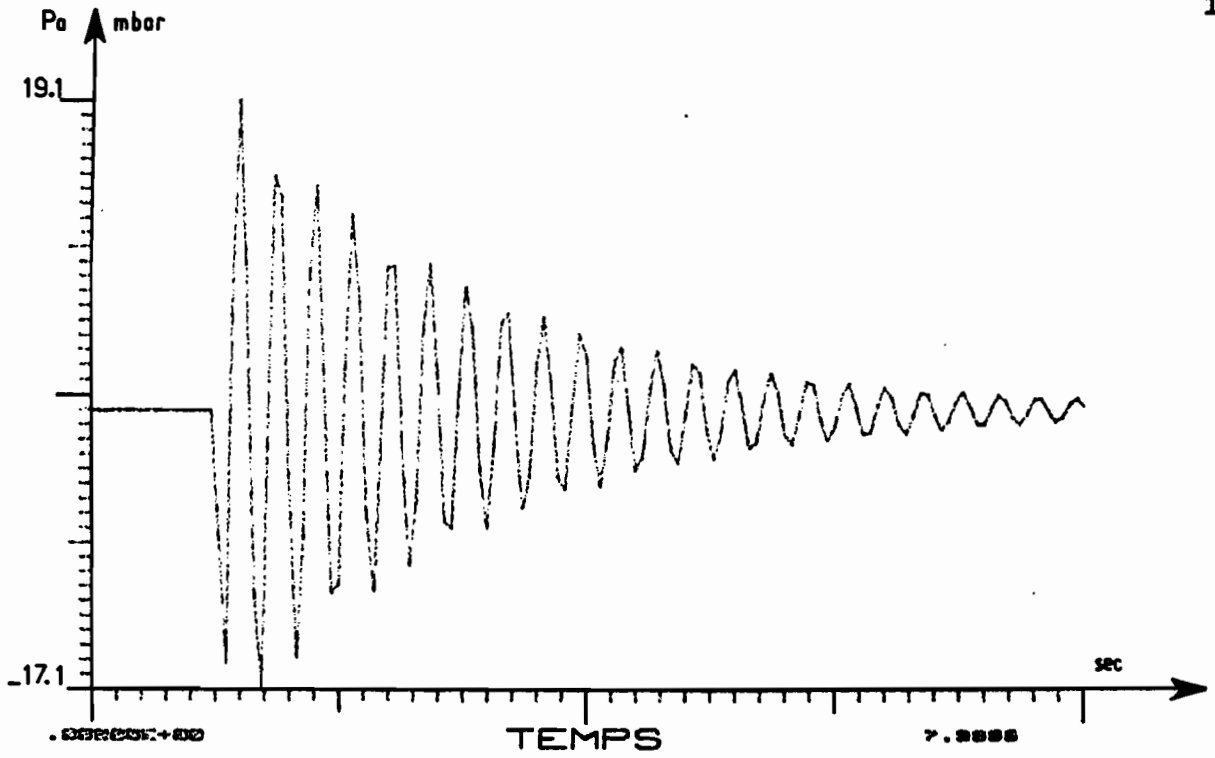


figure III.1.5.6.1 - Evolution de la pression aval
pour $R_2 = 2.5 \cdot 10^7$

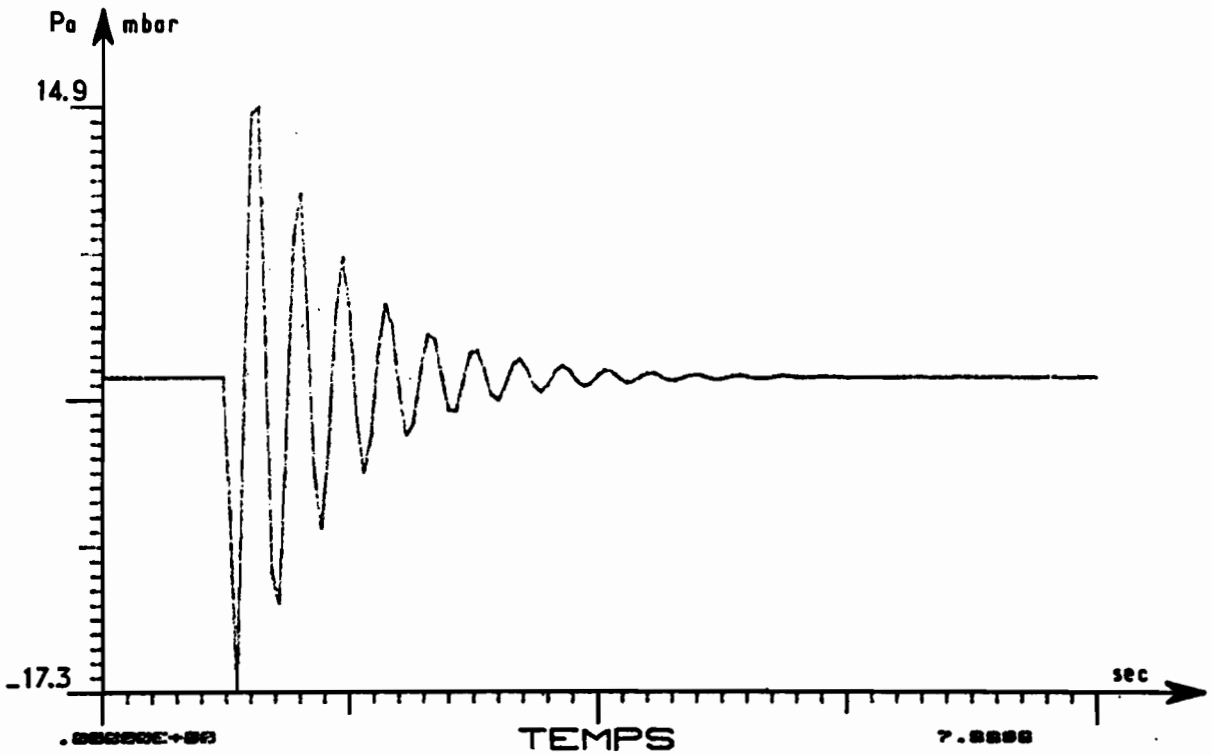


figure III.1.5.6.2 - Evolution de la pression aval
pour $R_2 = 4.5 \cdot 10^7$

III.1.6 - REDUCTION DU SYSTEME. ETUDE DU DOMAINE DE L'ESPACE DES PARAMETRES POUR LEQUEL LE SYSTEME LINEAIRE EST STABLE

III.1.6.0 - Présentation du système linéaire adimensionnalisé

Pour pouvoir effectuer une analyse phénoménologique du système linéaire que nous étudions, introduisons les grandeurs caractéristiques de perturbation suivantes :

l_c désignera la longueur caractéristique,

p_c désignera la pression caractéristique,

t_c désignera le temps caractéristique.

Avec ces grandeurs caractéristiques, le système linéaire présenté au § II.6 devient :

$$\frac{ml_c}{t_c^2} \Delta \dot{x} + \frac{fl_c}{t_c} \Delta \ddot{x} + kl_c \Delta \bar{x} - \sigma p_c (\Delta \bar{P}_h - \Delta \bar{P}_b) = 0$$

$$\frac{Ml_c}{t_c^2} \Delta \dot{X} + \frac{Fl_c}{t_c} \Delta \ddot{X} + kl_c \Delta \bar{X} - \Sigma p_c (\Delta \bar{P}_M - \Delta \bar{P}_h^*) = 0$$

$$\frac{R C_h^0}{t_c} \Delta \dot{\bar{P}}_h = \Delta \bar{P}_a - \Delta \bar{P}_h - \frac{R \rho_h^0 l_c}{t_c p_c} \Delta \ddot{x}$$

$$\frac{R_4 C_b^0}{t_c} \Delta \dot{\bar{P}}_b = -\Delta \bar{P}_b + \frac{R_4 \rho_b^0 l_c}{t_c p_c} \Delta \ddot{x}$$

$$\frac{R^* C_h^{0*}}{t_c} \Delta \dot{\bar{P}}_h^* = \Delta \bar{P}_a - \Delta \bar{P}_h^* + \frac{R^* \rho_h^{0*} \Sigma l_c}{t_c p_c} \Delta \ddot{X}$$

.../...

$$\frac{R_2 C_M^0}{t_c} \Delta \dot{P}_M - \Delta \bar{P}_d - \Delta \bar{P}_M - \frac{R_2 \rho_M^0 \Sigma l_c}{t_c P_c} \Delta \dot{x}$$

$$\frac{R_7 C_d^0}{t_c} \Delta \dot{P}_d - \frac{\delta l_c R_7}{P_c} \Delta \dot{x} - \Delta \bar{P}_d + \frac{R_7}{R_2} \Delta \bar{P}_M - \frac{R_7 q_3^0 (P_d^0 - 2P_a^0)}{2P_a^0 (P_d^0 - P_a^0)} \Delta \bar{P}_a$$

$$\frac{C_a^0}{t_c} \Delta \dot{P}_a - \frac{\alpha l_c}{P_c} \Delta \dot{x} + \frac{1}{R} \Delta \bar{P}_h + \frac{1}{R^*} \Delta \bar{P}_h^* + \frac{q_3^0}{2(P_d^0 - P_a^0)} \Delta \bar{P}_d$$

$$- \frac{1}{R_8} \Delta \bar{P}_a - \frac{\lambda^0 \bar{S}_c}{P_c} \Delta \bar{S}_c + \frac{Q_1^0 \bar{P}_c}{P_e^0 P_c} \Delta \bar{P}_e$$

Faisons une étude de la troisième équation du système. Pour cela, définissons les valeurs des grandeurs caractéristiques de perturbation.

Soit : $l_c = 10^{-3}$ mètre $p_c = 10^2$ pascals $t_c = 1$ seconde

Le nombre sans dimension $\frac{RC_h^0}{t_c}$ vaut alors

$$\frac{RC_h^0}{t_c} \approx \frac{4,2 \cdot 10^{-10} \times 2,2 \cdot 10^7}{1} \approx 9,2 \cdot 10^{-3}$$

On voit donc que $\frac{RC_h^0}{t_c} \ll 1$

Tandis que $\frac{R \rho_h^0 \sigma l_c}{t_c P_c} \approx 1,4$

.../...

Dans la 3ème équation du système, on peut donc négliger l'effet de compressibilité devant l'effet de volume.

De même, dans la quatrième équation définissant la variation de l'état du gaz dans la chambre inférieure du pilote, on a :

$$\frac{R_4 C_b^0}{\tau_c} \approx 6,8 \cdot 10^{-6} ,$$

$$\frac{R_4 C_b^0}{\tau_c} \ll 1 .$$

Alors que :

$$\frac{R_4 \rho_b^0 \sigma l_c}{\tau_c P_c} \approx 3,52 \cdot 10^{-4}$$

Dans l'équation traduisant la variation de l'état du gaz dans la chambre supérieure du servomoteur principal, on a :

$$\frac{R^* C_h^*}{\tau_c} \approx 1,12 \cdot 10^{-2}$$

$$\frac{R^* C_h^{0*}}{\tau_c} \ll 1$$

$$\text{et } \frac{R^* \rho_h^{*0} \Sigma l_c}{\tau_c P_c} \approx 1,06$$

.../...

Dans l'équation traduisant la variation de l'état du gaz dans la chambre inférieure du servomoteur principal on a :

$$\frac{R_2 C_M^0}{\tau_c} = 1,5 \cdot 10^{-1}$$

et

$$\frac{R_2 \rho_M^0 \Sigma l_c}{\tau_c P_c} \approx 16,4$$

De même si on s'intéresse à l'équation traduisant la variation de l'état du gaz dans le volume V_d (avant-dernière équation du système ci-dessus), on voit que :

$$\frac{R_7 C_d^0}{\tau_c} \ll 1 \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} C_d^0 &\approx 1,2 \cdot 10^{-10} \\ R_7 &\approx 2,3 \cdot 10^7 \end{aligned}$$

On constate donc que dans les équations 3 - 4 - 5 - 6 - 7, c'est-à-dire les équations traduisant la variation de l'état du gaz respectivement dans la chambre supérieure pilote, dans la chambre inférieure pilote, dans la chambre supérieure du détendeur principal, dans la chambre inférieure du détendeur principal et dans le volume V_d , les effets de compressibilité sont négligeables devant les effets de volume.

Par conséquent dans certaines des équations adimensionnalisées du modèle, les termes caractérisant l'effet de compressibilité sont affectés de petits paramètres en coefficients.

C'est-à-dire que sous forme condensée, le système pourra s'écrire :

$$\begin{cases} \epsilon V' = AV + BW \\ \dot{W} = CV + AW \end{cases}$$

avec $\epsilon \ll 1$.

.../...

On voit donc, qu'en première approximation, nous allons pouvoir réduire le système initial à un système d'ordre cinq (5). Mais auparavant, nous allons justifier la réduction du système.

III.1.6.1 - Justification mathématique de la réduction

Nous voyons que le système linéaire adimensionnalisé peut s'écrire sous la forme :

$$\text{III.1.6.1 - (1)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \epsilon \dot{V} = AV + BW \\ \dot{W} = CV + DW \end{array} \right.$$

où :

- . A, B, C et D sont des matrices 5 x 5
- . ϵ petit paramètre $\epsilon \ll 1$
- . V et W sont des matrices colonnes d'ordre 5.

Nous nous proposons d'étudier le système III.1.6.1 - (1) par la technique des échelles multiples.

Pour cela introduisons deux échelles de temps à savoir t_0 et t_1 qui sont telles que :

$$t_0 = t \quad t_1 = \epsilon t$$

On notera par la suite :

$$D_0 = \frac{\partial}{\partial t_0} \quad D_1 = \frac{\partial}{\partial t_1}$$

V et W peuvent se développer en fonction de ϵ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} V &= V_0 + \epsilon V_1 + \dots \\ W &= W_0 + \epsilon W_1 + \dots \end{aligned}$$

.../...

Avec les notations introduites, le systèmes II.1.6.1 - (1) devient :

$$\text{III.1.6.1 - (2)} \quad \begin{cases} \epsilon (D_0 + \epsilon D_1)(V_0 + \epsilon V_1 + \dots) - A(V_0 + \epsilon V_1 + \dots) + B(W_0 + \epsilon W_1 + \dots) \\ (D_0 + \epsilon D_1)(W_0 + \epsilon W_1 + \dots) - C(V_0 + \epsilon V_1 + \dots) + D(W_0 + \epsilon W_1 + \dots) \end{cases}$$

En égalisant le système III.1.6.1 - (2) suivant les puissances de ϵ on obtient :

A l'ordre zéro

$$\text{III.1.6.1 - (3)} \quad \begin{cases} 0 - AV_0 + BW_0 \\ D_0W_0 - CV_0 + DW_0 \end{cases}$$

A l'ordre un

$$\text{III.1.6.1 - (4)} \quad \begin{cases} D_0V_0 - AV_1 + BW_1 \\ D_0W_1 + D_1W_0 - CV_1 + DW_1 \end{cases}$$

Etudions dans un premier temps, le système à l'ordre zéro, c'est-à-dire le système III.1.6.1 - (3).

$$\text{On a} \quad AV_0 + BW_0 = 0 \implies V_0 = -A^{-1}BW_0$$

$$\text{D'où} \quad D_0W_0 = -CA^{-1}B W_0 + DW_0$$

Soit :

$$\text{III.1.6.1 - (5)} \quad D_0W_0 = (D - CA^{-1}B) W_0$$

.../...

On voit que la résolution de III.1.6.1 - (5), revient à chercher les valeurs et vecteurs propres de $(D - CA^{-1}B)$. Si les p_k désignent les zéros du polynôme caractéristique de $(D - CA^{-1}B)$, la solution de III.1.6.1 - (5) sera :

$$W_0 = \sum_k [\bar{w}_k(t_1)] e^{p_k t_0}$$

D'où :

$$\text{III.1.6.1 - (6)} \quad \begin{cases} W_0 = \sum_k [\bar{w}_k(t_1)] e^{p_k t_0} \\ V_0 = - \sum_k A^{-1} B \bar{w}_k(t_1) e^{p_k t_0} \end{cases}$$

D'après III.1.6.1 - (6), on a :

$$\text{III.1.6.1 - (7)} \quad \begin{cases} D_0 V_0 = - \sum_k p_k A^{-1} B \bar{w}_k(t_1) e^{p_k t_0} \\ D_1 W_0 = \sum_k D_1 \bar{w}_k(t_1) e^{p_k t_0} \end{cases}$$

Etudions maintenant le système à l'ordre un. En tenant compte des solutions III.1.6.1 - (6) et de III.1.6.1 - (7) le système III.1.6.1 - (4) devient :

$$\begin{cases} - \sum_k p_k A^{-1} B \bar{w}_k(t_1) e^{p_k t_0} = AV_1 + BW_1 \\ D_0 W_1 = - \sum_k D_1 \bar{w}_k(t_1) e^{p_k t_0} + CV_1 + DW_1 \end{cases}$$

Soit :

$$\text{III.1.6.1 - (8)} \quad \begin{cases} V_1 = - A^{-1} B W_1 - \sum_k p_k A^{-2} B \bar{w}_k(t_1) e^{p_k t_0} \\ D_0 W_1 = (D - CA^{-1}B)W_1 - \sum_k (p_k CA^{-2} B \bar{w}_k(t_1) + D_1 \bar{w}_k(t_1)) e^{p_k t_0} \end{cases}$$

.../...

La condition d'élimination des termes séculaires s'écrit :

$$\text{III.1.6.1 - (9)} \quad \forall k \quad p_k CA^{-2} B \tilde{W}_k(t_1) + D_1 \tilde{W}_k(t_1) = 0$$

Si on désigne par λ_k les valeurs propres de $p_k CA^{-2} B$, la solution de III.1.6.1 - (9) sera :

$$\text{III.1.6.1 - (10)} \quad \tilde{W}_k(t) = \sum_k [M_k] e^{\lambda_k t}$$

Il est clair que les λ_k sont fonctions des p_k et que la matrice M_k est indépendante de t_1 .

Dans ces conditions W_1 est déterminé, partant de III.1.6.1 - (8), par l'équation :

$$D_0 W_1 = (D - CA^{-1} B) W_1$$

En définitive, la solution du système à l'ordre zéro, en tenant compte de III.1.6.1 - (6) et III.1.6.1 - (10) sera :

$$\begin{cases} W_0 = \sum_k [M_k] e^{(\lambda_k t_1 + p_k t_0)} \\ V_0 = - \sum_k A^{-1} B [M_k] e^{(\lambda_k t_1 + p_k t_0)} \end{cases}$$

Soit encore :

$$\text{III.1.6.1 - (11)} \quad \begin{cases} W_0 = \sum_k [M_k] e^{(p_k + \lambda_k (p_i)) t} \\ V_0 = - \sum_k A^{-1} B [M_k] e^{(p_k + \lambda_k (p_i)) t} \end{cases}$$

On voit donc que l'étude du système III.1.6.1 - (1) en première approximation revient à chercher les valeurs propres de $(D - CA^{-1}B)$.

.../...

III.1.6.2 - Etude du système réduit

Nous avons montré au § III.1.6.1, que l'étude en première approximation du système linéaire, revenait à étudier la matrice $(D - CA^{-1}B)$.

En tenant compte du fait que les nombres sans dimension suivants sont tels que :

$$\frac{R_4 C_b^0}{\tau_c} \ll 1 \qquad \frac{RC_h^0}{\tau_c} \ll 1$$

$$\frac{R^* C_h^{0*}}{\tau_c} \ll 1 \qquad \frac{R_2 C_M^0}{\tau_c} \ll 1$$

$$\frac{R_7 C_d^0}{\tau_c} \ll 1$$

le système linéaire initial se réduit alors à :

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{m l_c}{\tau_c^2} \ddot{\Delta X} + \frac{1_c}{\tau_c} [f + \sigma^2 (R \rho_h^0 + R_4 \rho_b^0)] \dot{\Delta X} + k l_c \overline{\Delta X} - \sigma P_c \overline{\Delta P_a} = 0 \\ & \frac{M l_c}{\tau_c^2} \ddot{\Delta X} + \frac{1_c}{\tau_c} [F + \Sigma^2 (R_2 \rho_M^0 + R^* \rho_h^{0*} + R_9 \rho_M^0)] \dot{\Delta X} + k l_c \overline{\Delta X} \\ & \quad + \Sigma R_9 \delta l_c \overline{\Delta X} + \Sigma P_c \left(1 + \frac{R_9}{R_3}\right) \overline{\Delta P_a} = 0 \\ & \frac{C_a^0 P_c}{\tau_c} \dot{\Delta P_a} = - \frac{R_9}{R_5} \delta l_c \overline{\Delta X} - \frac{\rho_h^0 \sigma l_c}{\tau_c} \dot{\Delta X} + \alpha l_c \overline{\Delta X} + \frac{\rho_h^0 \Sigma l_c}{\tau_c} \left(1 - \frac{R_9}{R_5}\right) \dot{\Delta X} \\ & \quad - P_c \left(\frac{Q_c^0}{2\eta^0} - \frac{1}{R_3} + \frac{R_9}{R_3 R_5}\right) \overline{\Delta P_a} - \lambda \frac{Q_c^0}{S_c} \overline{\Delta S_c} + \frac{Q_1^0 \tilde{P}_c}{P_e^0} \overline{\Delta P_e} \end{aligned} \right.$$

.../...

où :

$$\frac{1}{R_9} = \frac{1}{R_7} - \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_3} = \frac{q_3^0 (P_d^0 - 2P_a^0)}{2P_a^0 (P_d^0 - P_a^0)}$$

$$\frac{1}{R_5} = \frac{q_3^0}{2(P_d^0 - P_a^0)}$$

Si on garde les mêmes valeurs pour une étude de stabilité, on constate que le système initial dont les valeurs propres sont :

- * - $4.76 \cdot 10^6$
- * - $7.36 \cdot 10^4$
- * - $1.03 \cdot 10^4$
- * - $1.04 \cdot 10^3$
- * - $24.5 + 677 i$
- * - $24.5 - 677 i$
- * - $2.97 + 84.3 i$
- * - $2.97 - 84.3 i$
- * - $0.18 + 4.9 i$
- * - $0.18 - 4.9 i$

donne après réduction les valeurs propres suivantes :

- * - $2.4 \cdot 10^5$
- * - $2.96 + 84.3 i$
- * - $2.96 - 84.3 i$
- * - $0.15 + 4.9 i$
- * - $0.15 - 4.9 i$

.../...

On remarque que l'étude du point de vue de la stabilité du système initial peut être ramenée à celle du système réduit, puisque celui-ci fait apparaître les valeurs propres dangereuses (voir § III.1.1) à savoir celles caractérisant le phénomène de pompage et le phénomène de vibration.

L'un des intérêts de cette réduction, est la possibilité qu'elle nous offre de pouvoir plus facilement faire une étude de l'espace des paramètres pour lequel le système est stable. Nous verrons au § III.1.6.3 en quoi consiste cette étude, mais auparavant effectuons quelques remarques sur le système réduit.

Si on s'intéresse à l'équation décrivant le mouvement de l'équipage mobile pilote (c'est-à-dire la lère équation du système réduit), on constate que le terme caractérisant l'amortissement visqueux est une combinaison des paramètres f , R et R_4 . Soit a_v ce terme. On a plus exactement :

$$a_v = \frac{l_c}{t_c} [f + \sigma^2 (R\rho_h^0 + R_4\rho_b^0)]$$

L'étude de l'influence de l'amortissement visqueux de l'équipage mobile pilote a montré que si toute augmentation de ce coefficient avait pour effet de baisser la partie réelle de la valeur propre de vibration, elle augmentait en revanche la partie réelle de la valeur propre de pompage.

a_v a donc un comportement comme représenté sur la figure III.1.6.2.1.

Comme d'une façon générale, la partie réelle de la valeur propre de pompage est plus grande que la partie réelle de la valeur propre de vibration (c'est-à-dire que le phénomène de pompage est le plus fréquent), on se situe souvent dans le domaine $a_v \geq a_{vL}$.

.../...

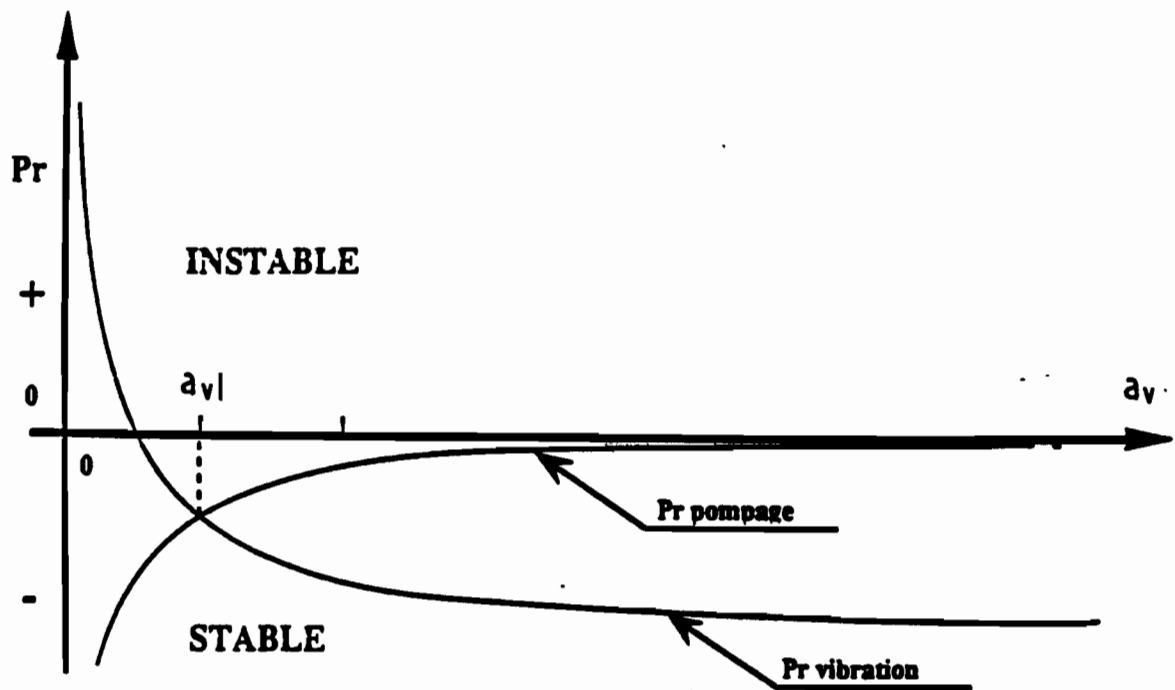


figure III 1.6.2.1 : Influence de a_v sur la stabilité du système

Par conséquent, tout phénomène de pompage peut être atténué par une légère diminution de la valeur de a_v .

De tous les coefficients caractérisant a_v (c'est-à-dire f , R , R_4), les plus faciles d'accès d'une façon pratique sont les coefficients R_4 et R (où $1/R_4$ est la perte de charge de l'évent pilote et $1/R$ la perte de charge de la prise d'influence pilote).

On voit donc qu'une façon pratique d'atténuer le phénomène de pompage revient soit à augmenter la perte de charge de l'évent pilote (en ajoutant une restriction au niveau de l'évent), soit à augmenter la perte de charge de la prise d'influence (en laminant grâce à une vanne ad'hoc qu'on placerait sur cette prise).

Comme le montre la figure III.1.6.2.1, dans le domaine $a_v \leq a_{v1}$ la partie réelle de la valeur propre de vibration est plus grande que celle de la valeur propre de pompage. On s'attend donc à ce que le régime transitoire soit caractérisé par le mode d'oscillation associé à la valeur propre de vibration.

.../...

Mais, comme le montre le résultat de simulation numérique (voir § III.1.5), le régime transitoire est plutôt caractérisé par le mode d'oscillation associé au pompage. Par conséquent, plus on augmente la perte de charge (évent pilote ou prise d'influence pilote) plus le système est stable. On retrouve le même phénomène, en faisant évoluer le volume aval. C'est celui-ci d'ailleurs qui va nous servir d'exemple pour l'explication du phénomène qu'on observe.

Nous savons que d'une façon générale, le fait de diminuer le volume aval diminue la partie réelle de la valeur propre de pompage (donc atténue tout phénomène de pompage), et augmente la fréquence associée à cette valeur propre. En revanche, il augmente en même temps la partie réelle de la valeur propre de vibration. Considérons à présent un volume correspondant aux valeurs propres suivantes du système :

$$\text{III.1.6.2 - (0)} \quad \begin{aligned} p_1 &= -0.5 \pm 84i && \text{(valeurs propres de vibration),} \\ p_2 &= -2.6 \pm 29.6i && \text{(valeurs propres de pompage);} \end{aligned}$$

On remarquera que la partie réelle de la valeur propre de vibration est plus grande que celle de la valeur propre de pompage.

On sait que sous forme condensée notre système réduit s'écrit :

$$\text{III.1.6.2 - (1)} \quad \frac{dU}{dt} = AU + E ,$$

où A est une matrice carrée 5 x 5 et U une matrice colonne d'ordre 5.

Il existe une matrice bloc diagonale D telle que :

$$\text{III.1.6.2 - (2)} \quad P^{-1} A P = D$$

D contient deux matrices carrées chacune correspondant à un couple de valeurs propres complexes conjuguées caractérisant le pompage et la vibration.

.../...

Tenant compte de la relation III.1.6.2 - (2), le système III.1.6.2 - (1) devient :

$$\text{III.1.6.2 - (3)} \quad \dot{y} = Dy + P^{-1} E ,$$

où on a posé $y = P^{-1} U$

Par transformation de Laplace, le système III.1.6.2 - (3) donne :

$$\text{III.1.6.2 - (4)} \quad \hat{y} = (pI - D)^{-1} p^{-1} \hat{E}$$

Définissons les applications de projection suivantes :

\mathcal{P} , \mathcal{N} et \mathcal{J}

\mathcal{P} est la projection sur les composantes de pompage de \hat{y} ,

\mathcal{N} est la projection sur les composantes vibration de \hat{y} ,

\mathcal{J} est la projection sur la composante associée à la valeur propre réelle de \hat{y} .

On a :

$$\mathcal{P} \hat{y} = \mathcal{P} [(pI - D)^{-1} p^{-1} \hat{E}]$$

$$\mathcal{J} \hat{y} = \mathcal{J} [(pI - D)^{-1} p^{-1} \hat{E}]$$

$$\mathcal{N} \hat{y} = \mathcal{N} [(pI - D)^{-1} p^{-1} \hat{E}]$$

$$\mathcal{P}(pI - D)^{-1} \mathcal{N} - \mathcal{P}(pI - D)^{-1} \mathcal{J} - \mathcal{N}(pI - D)^{-1} \mathcal{P} = 0$$

$$\mathcal{N}(pI - D)^{-1} \mathcal{J} - \mathcal{J}(pI - D)^{-1} \mathcal{P} - \mathcal{J}(pI - D)^{-1} \mathcal{N} = 0$$

.../...

D'où :

$$\text{III.1.6.2 - (5)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathcal{P}}_y = (pI_p - D_p)^{-1} \mathcal{P} (P^{-1} \hat{E}) \\ \hat{\mathcal{N}}_y = (pI_V - D_V)^{-1} \mathcal{N} (P^{-1} \hat{E}) \\ \hat{\mathcal{T}}_y = (p - \lambda)^{-1} \mathcal{T} (P^{-1} \hat{E}) \end{array} \right.$$

Avec

* $I_p = I_V$ matrice unité d'ordre 2,

* D_V matrice carrée d'ordre 2 correspondant au couple de valeurs propres conjuguées de vibration,

* D_p matrice carrée d'ordre 2 correspondant au couple de valeurs propres conjugués de pompage,

* λ valeur propre réelle de A.

Le vecteur colonne de la fonction d'excitation $E(t)$ a toutes ses composantes nulles sauf la dernière. Si on suppose que celle-ci est une fonction échelon d'amplitude a , la transformation $E(p)$ sera :

$$\hat{E}(p) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ a \\ p \end{bmatrix} = \frac{a}{p} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Soit :

$$E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{III.1.6.2 - (6)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathcal{P}}_y = \frac{a}{p} (pI_p - D_p)^{-1} \mathcal{P} (P^{-1} E) \\ \hat{\mathcal{N}}_y = \frac{a}{p} (pI_V - D_V)^{-1} \mathcal{N} (P^{-1} E) \end{array} \right.$$

.../...

Soient \hat{y}_{p1} et \hat{y}_{p2} les composantes de pompage de \hat{y} , c'est-à-dire :

$$\mathcal{P}_{\hat{y}} = \begin{pmatrix} \hat{y}_{p1} \\ \hat{y}_{p2} \end{pmatrix}$$

et

$$\mathcal{P}_{(P^{-1} E)} = \begin{pmatrix} B_{p1} \\ B_{p2} \end{pmatrix}$$

La première égalité de III.1.6.2 - (6) donne :

III.1.6.2 - (7)

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{p1} \\ \hat{y}_{p2} \end{pmatrix} = \frac{a}{p^3 - (D_{p11} + D_{p22})p^2 + (D_{p11}D_{p22} - D_{p12}D_{p21})p} \times \\ \begin{pmatrix} B_{p1}(p - D_{p22}) + D_{p12} B_{p2} \\ B_{p1} D_{p21} + B_{p2}(p - D_{p11}) \end{pmatrix}$$

De même si on désigne par \hat{y}_{v1} et \hat{y}_{v2} les composantes de vibration de \hat{y} , c'est-à-dire :

$$\mathcal{N}_{\hat{y}} = \begin{pmatrix} \hat{y}_{v1} \\ \hat{y}_{v2} \end{pmatrix}$$

$$\text{et si on a : } \mathcal{N}_{(P^{-1} E)} = \begin{pmatrix} B_{v1} \\ B_{v2} \end{pmatrix}$$

La deuxième égalité de III.1.6.2 - (6) donne :

III.1.6.2 - (8)

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{v1} \\ \hat{y}_{v2} \end{pmatrix} = \frac{a}{p^3 - (D_{v11} + D_{v22})p^2 + (D_{v11}D_{v22} - D_{v12}D_{v21})p} \times \\ \begin{pmatrix} B_{v1}(p - D_{v22}) + D_{v12} B_{v2} \\ B_{v1} D_{v22} + B_{v2}(p - D_{v11}) \end{pmatrix}$$

.../...

En remplaçant dans III.1.6.2 - (7) p par sa valeur effective (c'est-à-dire la valeur propre de pompage), on calcul l'énergie de pompage. Soit :

$$E_p = \sum_{i=1}^2 \hat{y}_{Pi} \bar{y}_{Pi} \quad \text{où } \bar{y}_{Pi} \text{ est le conjugué de } \hat{y}_{Pi}$$

De même, en remplaçant dans III.1.6.2 - (8) p par la valeur propre de vibration, on calcule l'énergie de vibration.

$$E_v = \sum_{i=1}^2 \hat{y}_{Vi} \bar{y}_{Vi}$$

Avec les valeurs propres de pompage et de vibration définies en III.1.6.2 - (0), on a :

$$E_p \simeq 1.86 \cdot 10^{-7}$$

$$E_v \simeq 1.87 \cdot 10^{-8}$$

(signalons que les B_{V1} , B_{V2} , B_{p1} et B_{p2} sont obtenus à partir de la matrice P^{-1} , qui est elle-même calculée à partir d'un programme).

On remarque donc que $E_v \ll E_p$

Malgré que la partie de la valeur propre de vibration soit plus grande que celle de la valeur propre de pompage, on constate que l'énergie associée au mode de vibration est négligeable devant celle associée au mode de pompage. Tant et si bien que le régime transitoire du système est essentiellement caractérisé par le mode d'oscillation associé au pompage. Par conséquent, on aura un système encore plus stable.

Cependant, si étant toujours dans cette zone, c'est-à-dire où la partie réelle de la valeur propre de pompage est plus petite que celle de la valeur propre de vibration, on arrive par un artifice quelconque à apporter plus d'énergie au mode d'oscillation associé à la vibration, on aura un système vibrant.

.../...

Ceci explique l'essai effectué au § III.1.3.6. Dans un premier temps, on excite le système par l'électrovanne. En ajoutant une perte de charge au niveau de l'évent pilote, on calme le phénomène de pompage. Dans un second temps, on excite uniquement et directement le pilote (qui on le sait est caractéristique du phénomène de vibration) par l'intermédiaire de l'évent. Même si une telle entrée n'est pas prise en compte dans le modèle, le fait important dans cette excitation, est l'apport dans ces conditions d'une énergie supplémentaire associée au mode de vibration. On constate alors que dans ces conditions le système se met en vibration.

Revenons à la fonction d'excitation, et supposons que celle-ci n'est plus une fonction échelon en vitesse mais une fonction de Dirac $\delta(t)$.

La transformée $\hat{E}(p)$ de la fonction d'excitation sera égale à E , c'est-à-dire :

$$\hat{E}(p) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Reprenant les mêmes calculs que précédemment, on arrive aux valeurs suivantes pour l'énergie de vibration et l'énergie de pompage.

$$E_p \simeq 1,6 \cdot 10^{-4} \qquad E_v \simeq 1,18 \cdot 10^{-4}$$

On remarque donc que dans ces conditions, les deux énergies ont le même ordre de grandeurs; Si on se trouve dans une zone où la partie réelle de la valeur propre de vibration est plus grande que celle de la valeur propre de pompage (par exemple à petit volume dans certaines condition de réglage), le régime transitoire sera caractérisé par la vibration. Signalons qu'on aurait le même phénomène, si l'excitation était également une dérivée de la fonction de Dirac.

Dans la pratique, les opérations normales de raccordement en charge nécessitant un ballonnement peuvent créer une variation de débit de l'ordre de 1000 % dans un temps très bref. De telles excitations peuvent être assimilées à des fonctions de Dirac et peuvent, en cas de présence d'un régulateur-détendeur, mettre celui-ci en vibration.

.../...

Citons pour terminer, quelques exemples pratiques d'apport d'énergie au mode de vibration et donc susceptibles de mettre le système en vibration :

- une très brutale variation de débit, à proximité d'un régulateur-détendeur,

- sur les réseaux de distribution, les opérations normales de raccordement en charge nécessitant un "ballonnement",

- un gain très important au niveau du pilote, c'est-à-dire une très grande valeur nominale de prédétente à pression aval constante, est source d'énergie de vibration. En effet, à une grande valeur de prédétente, correspond, en cas d'instabilité du prédétendeur, une forte fluctuation de la pression de prédétente. Celle ci étant directement en contact avec le pilote, apporte donc de l'énergie au mode de vibration,

- sur les postes de détente, les régulateurs-détendeurs basse pression sont placés dans des armoires (donc des volumes assez petits). On peut, par manipulation de ceux-ci, créer une forte variation de pression au niveau de l'évent pilote. C'est un cas pratique de l'essai du § III.1.3.6.

III.1.6.3 - Etude du domaine de l'espace des paramètres pour lequel le modèle est stable

Dans cette partie, nous allons utiliser une approche numérique pour étudier le domaine de l'espace des paramètres pour lequel le modèle est stable. Cette approche consiste, tout autre paramètre fixé, en un maillage systématique de l'espace des paramètres auquel on s'intéresse. Le domaine stable de cet espace, étant la zone où toutes les valeurs propres sont à partie réelle négative.

.../...

Pour cette étude, les valeurs des paramètres, obtenues après identification, sont les mêmes que celles données en annexe 4 sauf :

$$\begin{aligned}
 f &\simeq 30 & F &\simeq 5 \cdot 10^2 & k &\simeq 4.2 \cdot 10^3 \\
 R &\simeq 1.1 \cdot 10^7 & R^* &\simeq 2.9 \cdot 10^6 & R_2 &\simeq 6.5 \cdot 10^7 \\
 R_4 &\simeq 1.7 \cdot 10^3
 \end{aligned}$$

Afin de pouvoir comparer les résultats théoriques aux résultats expérimentaux (développés au § III.1.3.6), et parceque ces paramètres sont assez significatifs, nous avons retenu comme espace d'étude, le plan formé par le débit nominal Q_1^0 et le volume aval V_a .

Avant de nous intéresser à la figure III.1.6.3.1, nous allons à titre de comparaison avec les résultats expérimentaux, donner quelques résultats d'essais numériques.

* Ainsi pour $Q_1^0 = 225 \text{ m}^3/\text{h(N)}$ et $V_a \simeq 75$ litres
les valeurs propres de pompage sont :

$$p = - 1.2 \pm 13.6$$

Ce qui correspond à une fréquence de pompage $F_p \simeq 2.16 \text{ Hz}$.
Expérimentalement on a $F_p \simeq 2.15 \text{ Hz}$.

* Pour $Q_1^0 \simeq 225 \text{ m}^3/\text{h(N)}$ et $V_a \simeq 115$ litres
les valeurs propres de pompage sont :

$$p = - 0.48 \pm 13.02$$

Ce qui correspond à une fréquence de pompage $F_p \simeq 2.07 \text{ Hz}$
Expérimentalement on a $F_p \simeq 2.1 \text{ Hz}$

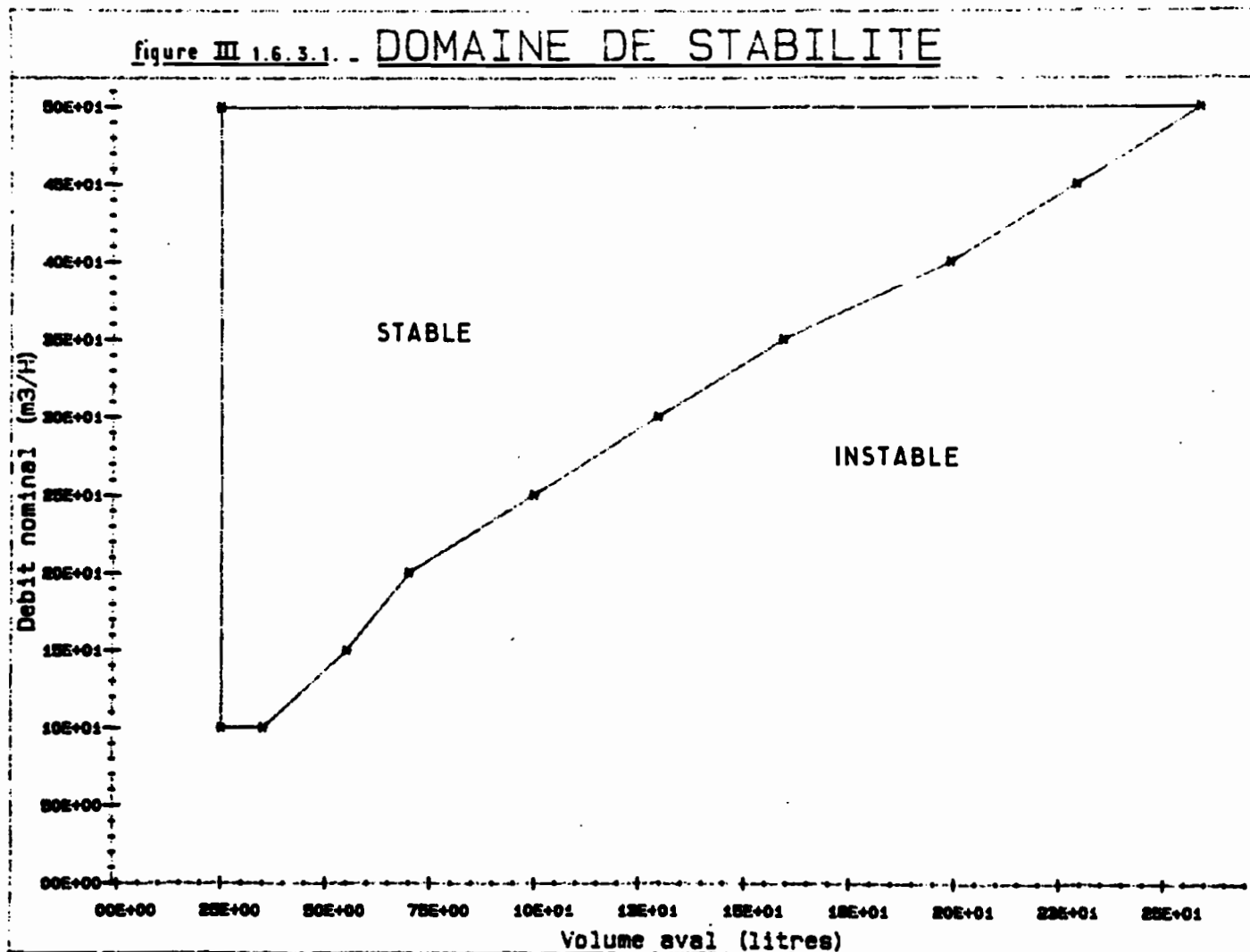
.../...

La figure III.1.6.3.1, montre le domaine stable dans le plan (V_a, Q_1^0) . Nous nous sommes limités à un volume aval minimal $V_a \approx 25$ litres et un débit nominal compris entre $100 \text{ m}^3/\text{h}(\text{N})$ et $500 \text{ m}^3/\text{h}(\text{N})$. Les résultats théoriques portés sur la figure III.1.6.3.1 sont confirmés par les essais expérimentaux rapportés au § III.1.3.6.

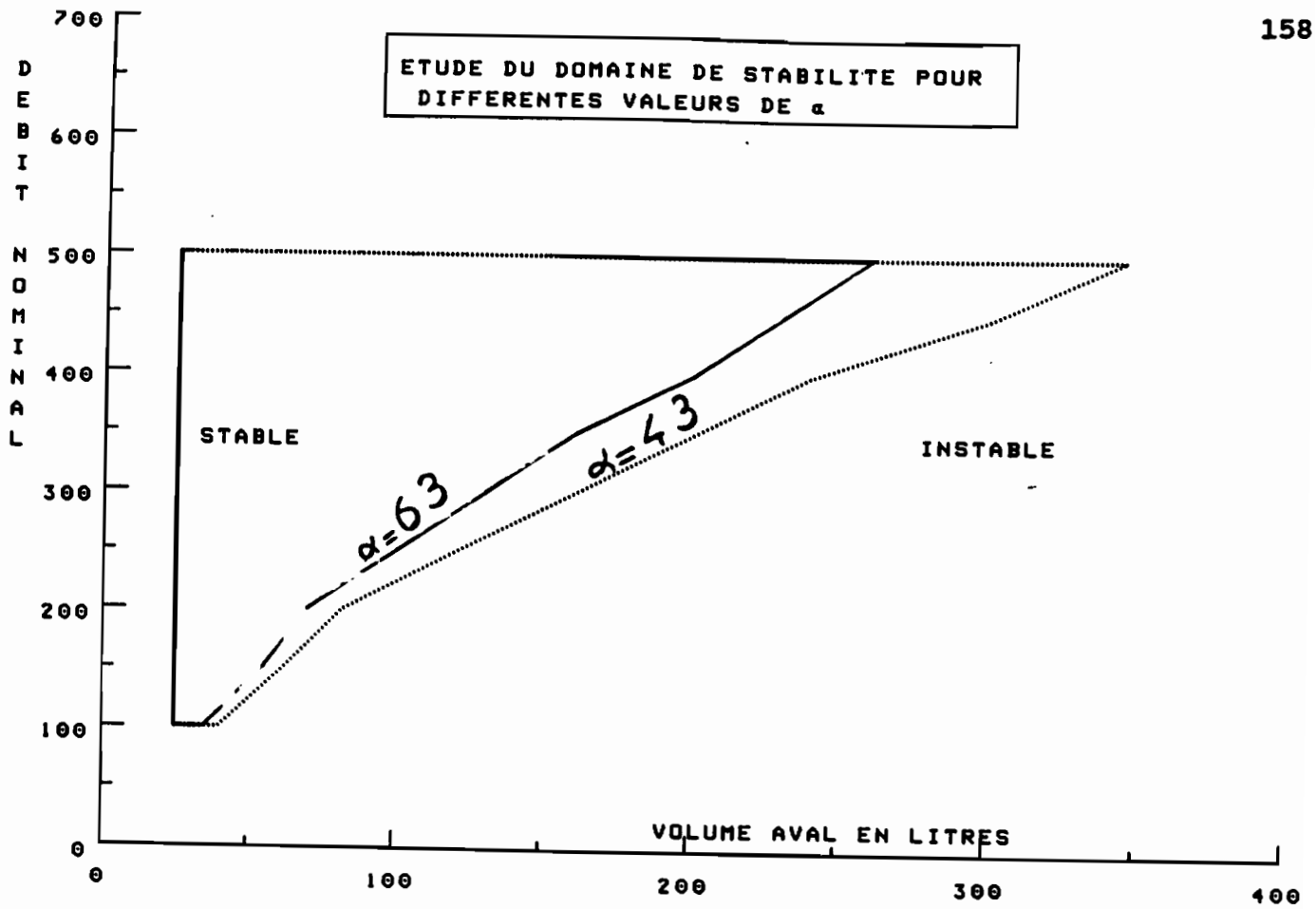
La figure III.1.6.3.2 (resp. III.1.6.3.3) représente, pour diverses valeurs du coefficient α (resp. du paramètre R_2), le domaine stable dans le plan débit nominal - volume aval.

On remarquera que le domaine de stabilité est d'autant plus grande que le coefficient α est petit, et que la vanne d'amortissement V_{a2} est peu ouverte.

Ces résultats sont d'ailleurs en parfaite concordance avec les remarques faites au § III.1.3.6

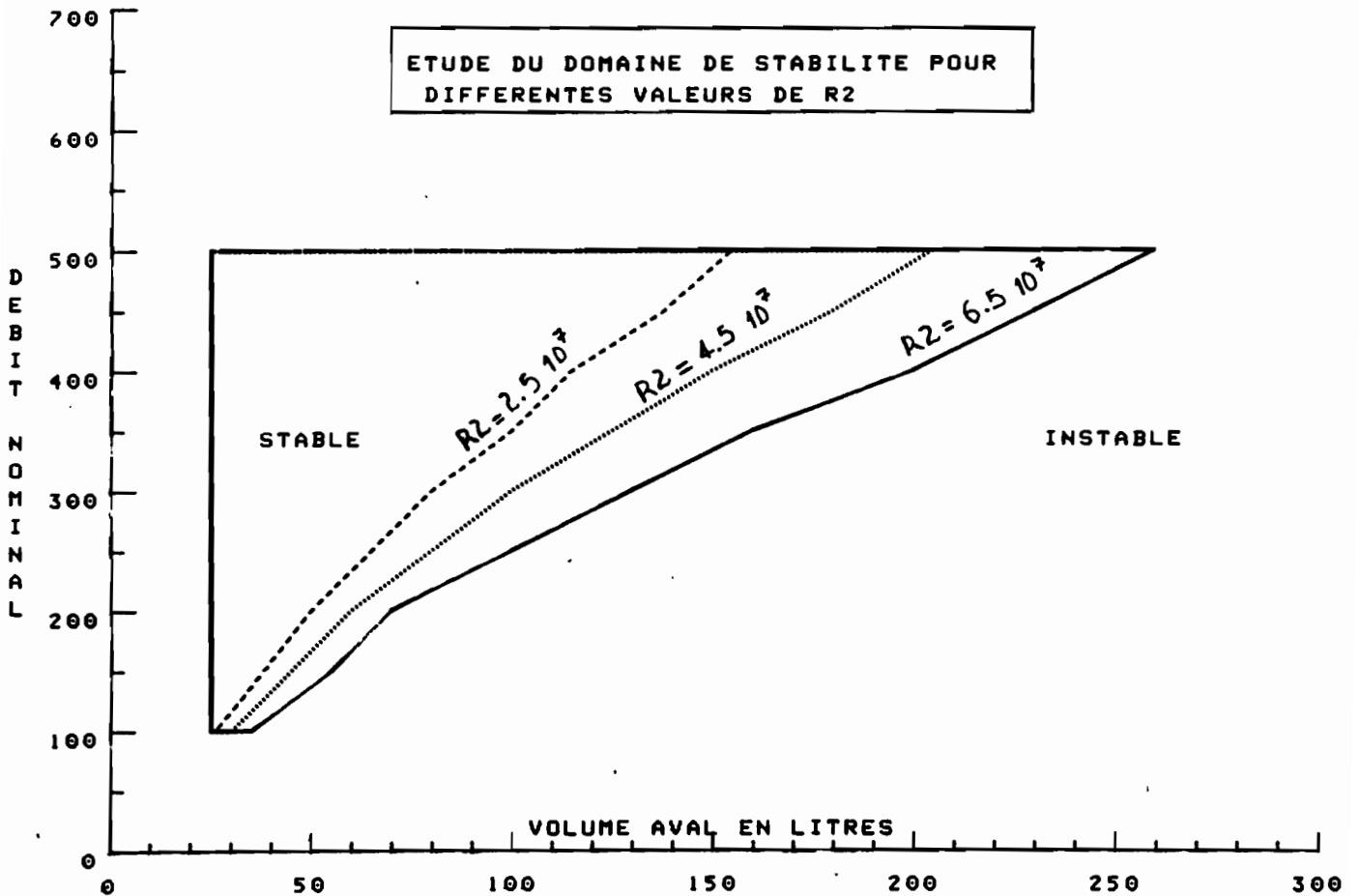


ETUDE DU DOMAINE DE STABILITE POUR DIFFERENTES VALEURS DE α



- FIGURE III.1.6.3.2 -

ETUDE DU DOMAINE DE STABILITE POUR DIFFERENTES VALEURS DE R_2



- FIGURE III.1.6.3.3 -

III.2 - IDENTIFICATION NON LINEAIRE

II.2.1 - INTRODUCTION

Comme nous l'avons fait remarquer au § III.1.4.1, l'identification est une étape décisive dans la mise au point du modèle.

En effet, si certaines grandeurs du modèle non linéaire sont accessibles à une mesure directe, d'autres le sont avec une marge d'incertitude ou ne le sont pas du tout. D'où la nécessité de déterminer les valeurs prises par ces grandeurs en question par identification.

III.2.2 - METHODE D'IDENTIFICATION NON LINEAIRE

Les méthodes classiques d'identification (méthodes du gradient, des polyèdres flexibles ou de Newton), sont d'une façon générale des méthodes qui permettent d'effectuer une identification uniquement sur un système linéaire.

La méthode que nous allons développer ici, a pour but d'estimer des paramètres figurant dans le modèle non linéaire et dont certains ne sont pas accessibles avec précision à une mesure directe. Cette méthode d'identification utilise la structure particulière du modèle et les informations provenant des essais.

Cette méthode généralise celle développée au § III.1.4.1.

Le modèle non linéaire, peut sous forme matricielle s'écrire :

$$\text{III.2.2 - (1)} \quad \frac{dU}{dt} = AU + F(U) + BE$$

où

* U représente le vecteur d'état du système, c'est-à-dire la matrice colonne dont les composantes sont les inconnues décrivant l'état instantané.

* E représente le vecteur d'entrée, c'est-à-dire la matrice colonne dont les composantes sont des fonctions connues qui caractérisent l'excitation.

.../...

* $F(U)$ prend en compte toutes les non linéarités en racine carrée, lesquelles sont de la forme :

$$\text{III.2.2 - (2)} \quad Q = K \frac{\Delta P}{|\Delta P|} \sqrt{|\Delta P|}$$

où ΔP est une combinaison linéaire de certaines des inconnues figurant dans U . On peut donc écrire :

$$\text{III.2.2 - (3)} \quad F(U) = \sum_{i=1}^q \lambda_i F_i(U)$$

Sous cette forme, seuls les coefficients λ_i sont à identifier car tout est connu dans chacun des $F_i(U)$

$$F_i(U) = \begin{bmatrix} F_{i1}(U) \\ \vdots \\ F_{in}(U) \end{bmatrix}$$

où n représente l'ordre du système III.2.2 - (1).

Les paramètres que nous voulons identifier sont des éléments de la matrice A , de la matrice B et les coefficients λ_i .

Au départ, on suppose que le relevé du jeu entrée-sortie (E, U) a été effectué expérimentalement. Donc, si le modèle mathématique défini en III.2.2 - (1) décrit le comportement du processus réel, on devrait pouvoir déterminer les éléments des matrices A et B , et les λ_i .

On part à nouveau de la fonctionnelle :

$$I(A, B, \lambda_1, \dots, \lambda_q) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) (\dot{U} - AU - F(U) - B E(t))^T (\dot{U} - AU - F(U) - B E(t)) dt$$

.../...

où $g(t)$ est une fonction positive suffisamment régulière pour que l'intégrale soit définie. D'une façon générale $g(t)$ est un coefficient de pondération.

Supposons que $g(t)$ soit nulle en dehors de l'intervalle $[0, T]$ d'observation.

On a :

$$\text{III.2.2 - (4) } I(A, B, \lambda_1, \dots, \lambda_q) = \int_0^T g(t) \left\{ \left(\dot{U} - AU - F(U) - B E(t) \right)^T \right. \\ \left. \left(\dot{U} - AU - F(U) - B E(t) \right) \right\} dt$$

Intéressons nous à l'expression sous le signe intégral :

$$\begin{aligned} (\dots) &= \dot{U}^T(t) \cdot \dot{U}(t) - \dot{U}^T(t) \cdot A \cdot U(t) - \dot{U}^T(t) \cdot F(U) - \dot{U}^T(t) \cdot B \cdot E(t) - \dot{U}^T(t) \cdot A^T \cdot \dot{U}(t) \\ &+ U^T(t) \cdot A^T \cdot A \cdot U(t) + U^T(t) \cdot A \cdot F(U) + U^T(t) \cdot A^T \cdot B \cdot E(t) - F^T(U) \cdot \dot{U}(t) \\ &+ F^T(U) \cdot A \cdot U(t) + F^T(U) \cdot F(U) + F^T(U) \cdot B \cdot E(t) - E^T(t) \cdot B^T \cdot \dot{U}(t) \\ &+ E^T(t) \cdot B^T \cdot A \cdot U(t) + E^T(t) \cdot B^T \cdot F(U) + E^T(t) \cdot B^T \cdot B \cdot E(t) \end{aligned}$$

En tenant compte de l'expression de $F(U)$ définie en III.2.2 - (3) et si on utilise la convention de l'indice muet, l'expression sous le signe intégral définie ci-dessus devient :

$$\begin{aligned} \text{III.2.2 - (5) } (\dots) &= \dot{U}^T(t) \cdot \dot{U}(t) - \dot{U}^T(t) \cdot A \cdot U(t) - \lambda_1 \dot{U}^T(t) \cdot F_1(U) \\ &- \dot{U}^T(t) \cdot B \cdot E(t) - U^T(t) \cdot A^T \cdot \dot{U}(t) + U^T(t) \cdot A^T \cdot A \cdot U(t) \\ &+ \lambda_1 U^T(t) \cdot A \cdot F_1(U) \\ &+ U^T(t) \cdot A^T \cdot B \cdot E(t) - \lambda_1 F_1^T(U) \cdot \dot{U}(t) + \lambda_1 F_1^T(U) \cdot A \cdot U(t) \\ &+ \lambda_1 \lambda_j F_1^T(U) \cdot F_j^T(U) + \lambda_1 F_1^T(U) \cdot B \cdot E(t) - E^T(t) \cdot B^T \cdot \dot{U}(t) \\ &+ E^T(t) \cdot B^T \cdot A \cdot U(t) + \lambda_1 E^T(t) \cdot B^T \cdot F_1(U) + E^T(t) \cdot B^T \cdot B \cdot E(t) \end{aligned}$$

.../...

Identifier les paramètres du système, revient à chercher les composantes des matrices A, B et les coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ qui minimisent la fonctionnelle $I(A, B, \lambda_1, \dots, \lambda_q)$ définie en III.2.2 - (4) où l'expression sous le signe intégral est donnée par III.2.2 - (5).

Pour minimiser I, on doit écrire :

$$\text{III.2.2 - (6)} \quad \frac{\partial I}{\partial A} = 0 \quad \frac{\partial I}{\partial B} = 0 \quad \frac{\partial I}{\partial \lambda_i} = 0 \quad i = 1, \dots, q$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial A_{pq}} = & - 2 \int_0^T g(t) \dot{U}_p(t) U_q(t) dt + \left(\int_0^T g(t) U_q(t) U_k(t) dt \right) A_{pk} \\ & + \left(\int_0^T g(t) U_k(t) U_q(t) dt \right) A_{pk} + 2 \left(\int_0^T g(t) U_q(t) E_k(t) dt \right) B_{pk} \\ & + 2 \left(\int_0^T g(t) U_q(t) F_{ip}(t) dt \right) \lambda_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial B_{pq}} = & - 2 \int_0^T g(t) \dot{U}_p(t) E_q(t) dt + 2 \left(\int_0^T g(t) U_k(t) E_q(t) dt \right) A_{pk} \\ & + 2 \left(\int_0^T g(t) F_{ip}(t) E_q(t) dt \right) \lambda_i + 2 \left(\int_0^T g(t) E_q(t) E_k(t) dt \right) B_{pk} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \lambda_i} = & - 2 \int_0^T g(t) \dot{U}_p(t) F_{ip}(t) dt + 2 \left(\int_0^T g(t) U_p(t) F_{iq}(t) dt \right) A_{qp} \\ & + 2 \left(\int_0^T g(t) F_{ip}(t) F_{jp}(t) dt \right) \lambda_j + 2 \left(\int_0^T g(t) E_p(t) F_{iq}(t) dt \right) B_{qp} \end{aligned}$$

.../...

Posons :

$$\begin{aligned}
 \text{III.2.2 - (7)} \quad \alpha_{qk} &= \int_0^T g(t) U_q(t) U_k(t) dt \\
 \delta_{qk} &= \int_0^T g(t) U_q(t) E_k(t) dt \\
 \mu_{ipq} &= \int_0^T g(t) U_q(t) F_{ip}(t) dt \\
 \beta_{qk} &= \int_0^T g(t) E_q(t) E_k(t) dt \\
 \varphi_{iqp} &= \int_0^T g(t) E_q(t) F_{ip}(t) dt \\
 \gamma_{ij} &= \int_0^T g(t) F_{ip}(t) F_{jp}(t) dt \\
 \psi_{pq} &= \int_0^T g(t) \dot{U}_p(t) U_q(t) dt \\
 \eta_{qp} &= \int_0^T g(t) \dot{U}_p(t) E_q(t) dt \\
 \theta_i &= \int_0^T g(t) \dot{U}_p(t) F_{ip}(t) dt
 \end{aligned}$$

Avec les notations III.2.2 - (7), le système III.2.2 - (6) devient :

$$\text{III.2.2 - (8)} \quad \begin{cases} \alpha_{qk} A_{pk} + \delta_{qk} B_{pk} + \mu_{iqp} \lambda_i = \psi_{qp} \\ \delta_{qk} A_{pk} + \beta_{qk} B_{pk} + \varphi_{iqp} \lambda_i = \eta_{qp} \\ \mu_{iqp} A_{qp} + \varphi_{ipq} B_{pq} + \gamma_{ij} \lambda_j = \theta_i \end{cases}$$

Ces équations apparaissent comme un système linéaire relativement aux inconnues A_{pq} , B_{pk} , λ_i , dont les coefficients α_{qk} , δ_{qk} , μ_{iqp} , φ_{iqp} , γ_{ij} , β_{qk} et les seconds membres ψ_{qp} , η_{qp} , θ_i peuvent être calculés à partir des formules III.2.2 - (7) en utilisant les résultats d'essais.

En suivant un raisonnement analogue à celui développé au § III.1.4.2, on montre que I est convexe et que par conséquent les paramètres déterminés à partir des équations III.2.2 - (8) minimisent effectivement la fonctionnelle.

.../...

III.2.3 - IDENTIFICATION

Nous allons comme au § III.1.4.3, en appliquant la méthode que nous venons de développer au § III.2.2, identifier les paramètres équation par équation.

Considérons l'équation traduisant la variation de l'état du gaz dans la chambre supérieure du pilote définie par la formule II.4.3 - (6) que nous rappelons ici :

II.4.3 - (6)

$$\frac{\rho_h(t) V_h \dot{P}_h(t)}{\gamma P_h(t)} + \rho_h(t) \sigma \dot{x}(t) - k_1 \frac{P_a(t) - P_h(t)}{|P_a(t) - P_h(t)|} \sqrt{P_h(t) |P_a(t) - P_h(t)|} = 0$$

Dans cette équation, cherchons à identifier le paramètre k_1 caractérisant la perte de charge de la prise d'influence pilote. On a :

$$\rho_h(t) = \rho_h^0 \left(\frac{P_h(t)}{P_h^0} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$P_h(t)$, $P_a(t)$ et $x(t)$ sont des fonctions mesurées pendant l'essai. V_h et σ sont des constantes données.

Posons :

$$F_1(t) = \frac{\rho_h V_h \dot{P}_h(t)}{\gamma P_h(t)} + \rho_h \sigma \dot{x}(t)$$

$$F_2(t) = \frac{P_a - P_h}{|P_a - P_h|} \sqrt{P_h |P_a - P_h|}$$

on a donc $I(k_1) = \int_0^T |F_1(t) - k_1 F_2(t)|^2 dt$

$$= \int_0^T F_1^2(t) dt + k_1^2 \int_0^T F_2^2(t) dt - 2k_1 \int_0^T F_1(t) F_2(t) dt$$

.../...

Donc la condition $\frac{\partial I}{\partial k_1} = 0$ nous conduit à la formule

$$\text{III.2.3 - (1)} \quad k_1 = \frac{\int_0^T F_1(t) F_2(t) dt}{\int_0^T F_2^2(t) dt}$$

On obtient $k_1 \cong 1.9 \cdot 10^{-10}$

En suivant un raisonnement analogue, on identifie le paramètre k_1^* (caractérisant la perte de charge de la prise d'influence principale), en partant de l'équation II.4.5 - (4). Rappelons que cette équation traduit la variation de l'état du gaz dans la chambre supérieure du servomoteur principal. On a :

$$\text{III.2.3 - (2)} \quad k_1^* = \frac{\int_0^T F_3(t) F_4(t) dt}{\int_0^T |F_4(t)|^2 dt}$$

où :

$$F_3(t) = \frac{\rho_h^* V_h^*}{\gamma P_h^*} \dot{P}_h^* - \rho_h^* \Sigma \dot{X}$$

$$F_4(t) = \frac{P_a(t) - P_h^*(t)}{|P_a(t) - P_h^*(t)|} \sqrt{P_h^*(t) |P_a(t) - P_h^*(t)|}$$

$$\rho_h^*(t) = \rho_h^{*0} \left(\frac{P_h^*(t)}{P_h^{*0}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

On obtient $k_1^* \cong 3,1 \cdot 10^{-9}$

.../...

L'équation traduisant la variation de l'état du gaz dans la chambre inférieure du pilote et définie par la relation II.4.4 - (4) nous permet d'identifier le coefficient k_4 caractérisant la perte de charge de l'évent pilote. On a :

$$\text{III.2.3 - (3)} \quad k_4 = \frac{\int_0^T F_5(t) F_6(t) dt}{\int_0^T |F_6(t)|^2 dt}$$

où :

$$F_5(t) = \frac{\rho_b V_b}{\gamma P_b} \dot{P}_b(t) - \rho_b \sigma \dot{x}$$

$$F_6(t) = \frac{P_b(t) - P_{at}}{|P_b(t) - P_{at}|} \sqrt{P_{at} |P_b - P_{at}|}$$

$$\rho_b(t) = \rho_b^0 \left(\frac{P_b(t)}{P_b^0} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$k_4 \cong 5.9 \cdot 10^{-9}$$

De même l'équation traduisant la variation de l'état du gaz dans la chambre inférieure du servomoteur principal et définie par la relation II.4.6 - (2) nous permet d'identifier le coefficient k_2 caractérisant la perte de charge de la vanne d'amortissement V_{a2} .

On aboutit à :

$$\text{III.2.3 - (4)} \quad k_2 = - \frac{\int_0^T F_7(t) F_8(t) dt}{\int_0^T |F_8(t)|^2 dt}$$

.../...

où

$$F_7(t) = \frac{\rho_m V_m}{\gamma P_m} \dot{P}_m + \rho_m \Sigma \dot{X}$$

$$F_8(t) = \frac{P_m - P_d}{|P_m - P_d|} \sqrt{P_d |P_m - P_d|}$$

On a $K_2 \cong 5.86 \cdot 10^{-9}$

IV - ETUDE DE LA NON LINEARITE EN RACINE CARREE

IV.1 - POSITION DU PROBLEME

Dans la linéarisation du modèle, nous nous sommes heurtés au problème de la singularité que présentaient certaines fonctions au voisinage du régime permanent. Notons qu'il s'agissait toujours de fonctions très simples du type :

$$\text{IV.1 - (1) } f(X) = \alpha \frac{X}{|X|} \sqrt{|X|}$$

où X s'exprime linéairement en fonction de variables inconnues principales et où α est, chaque fois, un coefficient numérique bien déterminé. Cette difficulté avait été contournée en remplaçant chaque fonction de ce type par une expression linéaire.

$$\text{IV.1 - (2) } \tilde{f}(X) = \frac{1}{R} X$$

ou la constante R est choisie, il faut bien le dire, arbitrairement par des considérations dictées uniquement par l'idée empirique que l'on peut se faire à travers l'expérience accumulée de l'amplitude de la variation de X au voisinage du régime permanent. Pour des raisons de commodité de langage et parce que l'expression est suggestive, nous appelions le fait de remplacer la fonction f par son substitut \tilde{f} , la méthode de linéarisation par la sécante. Nous allons ici reprendre l'étude avec les différentes fonctions f.

IV.2 - EQUATIONS DU SYSTEME EN TENANT COMPTE DES FONCTIONS NON LINEAIRES

Reprenons les équations adimensionnalisées du système en tenant compte maintenant des fonctions non linéaires exprimant les divers débits.

.../...

Chaque débit s'exprime comme suit :

$$\text{IV.2 - (1)} \quad Q = \pm C \sqrt{P_a |P_b - P_a|}$$

où $\left\{ \begin{array}{l} \text{le signe + est utilisé si } P_b > P_a \\ \text{le signe - est utilisé si } P_b < P_a \end{array} \right.$

P_b et P_a désignant des pressions.

Si en régime permanent on a $P_a = P_a^0 = P_b^0 = P_b$, on a alors $Q = 0$

En régime dynamique, on définit la variation de pression suivante :

$$\Delta P_a = P_a - P_a^0$$

$$\Delta P_b = P_b - P_b^0$$

La variation de débit peut alors s'écrire :

$$\text{IV.2 - (2)} \quad \Delta Q = \pm C \sqrt{P_a^0 |\Delta P_b - \Delta P_a|} \left(1 + 0 \left(\frac{\Delta P_a}{P_a^0} \right) \right)$$

avec le signe + si $\Delta P_b > \Delta P_a$ et le signe - sinon.

Dans la suite nous négligerons la correction $0 \left(\frac{\Delta P_a}{P_a^0} \right)$

d'où le système :

$$\frac{m l_c}{t^2} \Delta \ddot{X} + \frac{f l_c}{t_c} \Delta \dot{X} + k l_c \Delta \bar{x} - \sigma P_c (\Delta \bar{P}_h - \Delta \bar{P}_b) = 0$$

$$\frac{M l_c}{t_c^2} \Delta \ddot{X} + \frac{F l_c}{t_c} \Delta \dot{X} + K l_c \Delta \bar{X} - \Sigma P_c (\Delta \bar{P}_M - \Delta \bar{P}_h^*) = 0$$

.../...

$$\frac{C_h^0 \sqrt{P_c}}{k_1 \sqrt{P_a^0} t_c} \Delta \bar{P}_h - \frac{\Delta \bar{P}_a - \Delta \bar{P}_h}{|\Delta P_a - \Delta P_h|} \sqrt{|\Delta \bar{P}_a - \Delta \bar{P}_h|} - \frac{\rho_h^0 \sigma l_c}{k_1 \sqrt{P_a^0} \sqrt{P_c} t_c} \Delta \bar{x}$$

$$\frac{C_b^0 \sqrt{P_c}}{k_4 \sqrt{P_{at}} t_c} \Delta \bar{P}_b - \frac{\Delta \bar{P}_b}{|\Delta P_b|} \sqrt{|\Delta \bar{P}_b|} + \frac{\rho_b^0 \sigma l_c}{k_4 \sqrt{P_{at}} \sqrt{P_c} t_c} \Delta \bar{x}$$

$$\frac{C_h^{0*} \sqrt{P_c}}{k_1^* \sqrt{P_a^0} t_c} \Delta \bar{P}_h^{**} - \frac{\Delta \bar{P}_a - \Delta \bar{P}_h}{|\Delta P_a - \Delta P_h^*|} \sqrt{|\Delta \bar{P}_a - \Delta \bar{P}_h^*|} + \frac{\rho_h^0 \Sigma l_c}{k_1^* \sqrt{P_a^0} \sqrt{P_c} t_c} \Delta \bar{x}$$

$$\frac{C_M^0 \sqrt{P_c}}{k_2 \sqrt{P_d^0} t_c} \Delta \bar{P}_M - \frac{\Delta P_M - \Delta P_d}{|\Delta P_M - \Delta P_d|} \sqrt{|\Delta \bar{P}_M - \Delta \bar{P}_d|} - \frac{\rho_h^0 \Sigma l_c}{k_2 \sqrt{P_d^0} \sqrt{P_c} t_c} \Delta \bar{x}$$

$$\frac{C_d^0 \sqrt{P_c}}{k_2 \sqrt{P_d^0} t_c} \Delta \bar{P}_d - \frac{\Delta P_M - \Delta P_d}{|\Delta P_M - \Delta P_d|} \sqrt{|\Delta \bar{P}_M - \Delta \bar{P}_d|} - \frac{\delta l_c}{k_2 \sqrt{P_d^0} \sqrt{P_c}} \Delta \bar{x} - \frac{\sqrt{P_c}}{R_7 k_2 \sqrt{P_d^0}} \Delta \bar{P}_d$$

$$- \frac{q_3^0 (P_d^0 - 2P_a^0) \sqrt{P_c}}{2P_a^0 (P_d^0 - P_a^0) k_2 \sqrt{P_d^0}} \Delta \bar{P}_a$$

$$\frac{C_a^0 \sqrt{P_c}}{\sqrt{P_a^0} t_c} \Delta \bar{P}_a - \frac{\alpha l_c}{\sqrt{P_a^0} \sqrt{P_c}} \Delta \bar{x} - \frac{Q_c \sqrt{P_c}}{2\eta^0 \sqrt{P_a^0}} \Delta \bar{P}_a + \frac{\sqrt{P_c}}{R_5 \sqrt{P_a^0}} \Delta \bar{P}_a + \frac{\sqrt{P_c}}{R_3 \sqrt{P_a^0}} \Delta \bar{P}_d$$

$$- \frac{\Delta \bar{P}_a - \Delta \bar{P}_h}{|\Delta P_a - \Delta P_a|} k_1 \sqrt{|\Delta \bar{P}_a - \Delta \bar{P}_h|} - \frac{\Delta \bar{P}_a - \Delta \bar{P}_h^*}{|\Delta P_a - \Delta P_h^*|} k_1^* \sqrt{|\Delta \bar{P}_a - \Delta \bar{P}_h^*|}$$

$$+ \frac{Q_1 P_c}{P_a^0 \sqrt{P_a^0} \sqrt{P_c}} \Delta P_e - (\lambda^0 \bar{S}_c / \sqrt{P_a^0} \sqrt{P_c}) \Delta \bar{S}_c$$

.../...

où l_c , t_c et p_c désignent respectivement les longueurs, temps et pression caractéristiques de perturbation.

$$\frac{1}{R_7} = \frac{q_3^0}{2(P_d^0 - P_a^0)} - \frac{Q_p^0 (\Pi^0 - 2P_d^0)}{2P_d^0 (\Pi^0 - P_d^0)}$$

$$\frac{1}{R_5} = \frac{q_3^0 (P_d^0 - 2P_a^0)}{2P_a^0 (P_d^0 - P_a^0)}$$

$$\frac{1}{R_3} = \frac{q_3^0}{2(P_d^0 - P_a^0)}$$

IV.2.1 - ETUDE DU SYSTEME D'EQUATION

On voit donc que sous forme matricielle, le système peut s'écrire :

$$\text{IV.2.1 - (1)} \quad \frac{dU}{dt} = AU + f(U) + E(t)$$

où $U = \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix}$ représente les variables d'état du système

$f(U) = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}$ caractérise les divers débits

$E(t) = \begin{bmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_N \end{bmatrix}$ représente les termes d'excitation

.../...

A est une matrice carrée d'ordre N dont les composantes A_{ij} caractérisent les divers organes à caractéristiques linéaires :

N = 10 dans notre cas.

Les fonctions f possèdent les propriétés suivantes :

$$\text{IV.2.1a} \quad f_1(\lambda U_1, \lambda U_2, \dots, \lambda U_N) = \lambda^{1/2} f_1(U_1, U_2, \dots, U_N)$$

$$\text{IV.2.1b} \quad f_1(-U_1, \dots, -U_N) = -f_1(U_1, \dots, U_N)$$

Etant donné un système mécanique décrit, comme c'est le cas ici, par un système d'équations différentielles du type IV.2.1 - (1), on peut donner plusieurs définitions relatives à la notion intuitive que l'on qualifie de stabilité (voir [15]).

Dans notre cas, une définition qui représente assez bien l'idée que l'on se fait en général de la stabilité d'un détendeur, est que si l'excitation est assez faible, la réponse ne dépasse pas une certaine amplitude.

Pour traduire cela en langage mathématique nous partons de l'excitation E que nous choisissons dans une certaine classe C. Le choix de la classe C caractérisera l'idée que l'excitation reste assez faible en imposant que $E \in C$. Pour simplifier l'exposé, nous supposerons que E fonction excitatrice, est une fonction du temps, définie sur tous les temps $t \in \mathbb{R}$. Tous les cas d'utilisation pratique peuvent rentrer dans ce cadre là. Pour caractériser le fait que la réponse ne dépasse pas une certaine amplitude, nous emploierons le critère suivant :

$$\text{IV.2.1 - (2)} \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} \{ X^T(t) \cdot M \cdot X(t) \} \leq c$$

où M désignera une matrice carrée symétrique, définie positive indépendante du temps. Le choix de M pourra permettre de représenter des critères variés, adaptés aux divers besoins des utilisateurs.

Définition 1

On appelle classe d'excitation et on note C , un ensemble de fonction $E(t)$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^n , à support compact (c'est-à-dire s'annulant identiquement dans un voisinage de $-\infty$ et dans un voisinage de $+\infty$), continues, ensemble qui n'est pas autrement précisé, pour l'instant.

Définition 2

La donnée d'une matrice M , symétrique et définie positive, et d'un réel c positif sera dit caractériser un critère de stabilité globale que l'on notera $Sg(M, c)$.

Définition 3

Le système IV.2.1 - (1) sera dit globalement stable pour la classe d'excitation C et pour le critère globale de stabilité $Sg(M, c)$ si quelque soit $E \in C$ toute solution de IV.2.1 - (1) nulle identiquement dans un voisinage de $-\infty$ vérifie :

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \{ U^T(t) \cdot M \cdot U(t) \} \leq c$$

Théorème

Considérons la fonction suivante, définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (U, E) \longrightarrow l(U, E) = & [U^T \cdot A^T + f^T(U)] \cdot M \cdot U \\ & + U^T \cdot M \cdot [A \cdot U + f(U)] \\ & + E^T \cdot M \cdot U + U^T \cdot M \cdot E \end{aligned}$$

où U et E sont deux matrices colonnes arbitraires.

Supposons que l'on ait :

$(t \longrightarrow E(t)) \in C \implies l(U, E(t)) < 0$ à chaque instant t où $U^T \cdot M \cdot U = c$;
alors le système IV.2.1 - (1) est globalement stable au sens de la définition 3.

Démonstration

Supposons que le système IV.2.1 - (1) ne soit pas globalement stable au sens de la définition 3.

Par définition, il existerait un $t_0 \in \mathbb{R}$ pour lequel on aurait $U^T(t_0).M.U(t_0) > c$

Faisons décroître t à partir de t_0 et soit $t^* \in \mathbb{R}$ la première valeur de t telle que $U^T(t^*).M.U(t^*) = c$.

Cette valeur existe nécessairement parce que $t \longrightarrow U^T(t).M.U(t)$ est continue, prend la valeur zéro pour t voisin de $-\infty$ et prend une valeur plus grande que c en $t = t_0$.

On a nécessairement :

$$a - \left(\frac{d}{dt} (U^T(t).M.U(t)) \right)_{t=t^*} - l(U(t^*), E(t^*)) \geq 0$$

par définition de t^* .

En effet supposons le contraire, il existerait un δ suffisamment petit mais positif tel que :

$U^T(t^* + \delta).M.U(t^* + \delta) < c$ ce qui impliquerait, en vertu de la continuité de $U^T(t).M.U(t)$, l'existence de t_1 avec :

$t^* + \delta < t_1 < t_0$ tel que :

$U^T(t_1).M.U(t_1) = c$ en contradiction avec la définition de t^* . Mais a est contraire à l'hypothèse du théorème et celui-ci est donc démontré.

On voit d'après le théorème ci-dessus, que pour que le système IV.2.1 - (1) soit globalement stable au sens de la définition 3, il suffit de pouvoir montrer que :

IV.2.1 - (3) Pour tout instant tel que $U^T(t).M.U(t) = c$ on a $l(U(t), E(t)) < 0$

.../...

Posons :

$$\text{IV.2.1 - (4)} \quad \begin{cases} U = rS \text{ avec } r > 0 \text{ et} \\ S^T S = 1 \end{cases}$$

On a d'après IV.2.1 - (1)

$$\begin{aligned} l(U(t), E(t)) &= \dot{U}^T(t) \cdot M \cdot U(t) + U^T(t) \cdot M \cdot \dot{U}(t) \\ &= (U^T(t) \cdot A^T + f^T(t) + E^T(t)) \cdot M \cdot U(t) + \\ &\quad U^T(t) \cdot M \cdot (A \cdot U(t) + f(U) + E(t)) \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} l(U(t), E(t)) &= U^T(t) \cdot (A^T M + M A) \cdot U(t) + f^T(U) \cdot M \cdot U(t) + U^T(t) \cdot M \cdot f(U) \\ &\quad + E^T(t) \cdot M \cdot U(t) + U^T(t) \cdot M \cdot E(t) \end{aligned}$$

Tenant compte de IV.2.1a - IV.2.1b et IV.2.1 - (4), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \text{IV.2.1 - (5)} : l(U(t), E(t)) &= r^2 S^T(t) (A^T M + M A) \cdot S(t) + \\ &\quad + r^{3/2} (f^T(S) \cdot M \cdot S(t) + S^T(t) \cdot M \cdot f(S)) \\ &\quad + r(E^T(t) \cdot M \cdot S(t) + S^T(t) \cdot M \cdot E(t)) \end{aligned}$$

On a posera dans toute la suite

$$\text{IV.2.1 - (6)} \quad \begin{cases} g(S) = S^T (A^T M + M A) \cdot S \\ h(S) = f^T(S) \cdot M \cdot S + S^T \cdot M \cdot f(S) \\ k(t, S) = E^T(t) \cdot M \cdot S + S^T \cdot M \cdot E(t) \end{cases}$$

.../...

Propriété

$$\sup_{S^T S = 1} k(t, S) > 0, \quad t \text{ fixé}$$

Démonstration

Montrons que la fonction $t \rightarrow k(t, S)$ prend des valeurs positives si :

$$E(t) \neq 0$$

En effet, si $E(t) \neq 0$, on peut écrire,

$$E(t) = \left(E^T(t) \cdot E(t) \right)^{1/2} e(t) \text{ avec } e^T(t) \cdot e(t) = 1$$

Dans ces conditions $S = e(t)$ est une valeur acceptable et $k(t, e(t))$ fait partie des valeurs prises par $k(t, S)$ quand $S^T S = 1$

Or on a $k(t, e(t)) = 2 \left(E^T(t) \cdot E(t) \right)^{1/2} e^T(t) \cdot M \cdot e(t) > 0$ en vertu du caractère défini positif de M .

La propriété en résulte.

IV.2.2 - CAS OU LA MATRICE A A TOUTES SES VALEURS PROPRES A PARTIE
REELLE NEGATIVE

Définition

Une solution $X \in \mathbb{R}^n$ du système $\dot{X} = AX$ où A est une matrice $n \times n$, est dite stable au sens de Liapunoff si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon)$ tel que toute autre solution $y \in \mathbb{R}^n$ du système qui pour $t = t_0$ vérifie

$$\|X(t_0) - y(t_0)\| \leq \delta \text{ satisfait à } \|X(t) - y(t)\| \leq \epsilon, \forall t \geq t_0.$$

Si de plus $\|X(t) - y(t)\| \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ on dira que la solution est asymptotiquement stable.

Théorème de Liapunoff :

Considérons le système d'équations différentielles ordinaires

$$(1) \quad \frac{dX}{dt} = f(X)$$

où $X \in \mathbb{R}^n$ et où f est une application de U ouvert de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n , continue et Lipschitzienne. Supposons que $f(0) = 0$ de sorte que $X = 0$ est solution, dite d'équilibre du système (1) ; supposons qu'il existe une fonction.

$V(X) : U \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1 - $V(X)$ est continue et continuellement différentiable

2 - $V(0) = 0$ et $V(X) > 0 \quad \forall X \in U \setminus \{0\}$

3 - $\|X\| \rightarrow 0 \implies V(X) \rightarrow 0$

4 - $V(X) \rightarrow 0 \implies \|X\| \rightarrow 0$

5 - $\frac{d}{dt}(V(X(t))) \leq 0$ dans U comme conséquence de 1

Alors la solution d'équilibre $X = 0$ est stable au sens de Liapunoff.

Si dans la condition 5 ci-dessus, l'égalité :

$$\frac{dV}{dt} = 0$$

n'a jamais lieu sauf pour $X = 0$, alors la solution $X = 0$ est en outre asymptotiquement stable.

On retrouvera une démonstration du Théorème de Liapunoff dans [18].

Si A a toutes ses valeurs propres à partie réelle négative, il existe un ensemble B de matrices symétriques définies positives vérifiant la condition suivante :

$\forall L \in B$, la matrice $(A^T L + LA)$ est définie négative.

Un tel ensemble B n'est pas vide car la matrice unité $I \in B$.

Choisissons la matrice M dans l'ensemble B .

La matrice $(A^T M + MA)$ est donc symétrique définie négative et cela entraîne que la fonction $g(S)$ telle que définie en IV.2.1 - (6) vérifie :

$$\text{IV.2.2 - (1)} \quad g(S) < -a^2 \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}$$

De même, $h(S)$ telle que définie en IV.2.1 - (6) est une fonction continue sur le fermé borné $S^T S = 1$. Elle est donc bornée. Il existe par conséquent $h^* \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\text{IV.2.2. - (2)} \quad h(S) < h^*$$

On choisit de définir la classe C de la façon suivante :

Pour chaque fonction $t \rightarrow E(t)$ appartenant à C , on a :

$E(\cdot)$ est continue et on a $\sup_{t \in \mathbb{R}, S^T S = 1} k(t, \delta) < k^*$ où k^* est une valeur positive.

A ce stade du raisonnement, il est important de rappeler que nous voulons ici établir les conditions de stabilité globale (au sens de la définition 3) dans le cas où la matrice A a toutes ses valeurs à partie réelle négative. C'est-à-dire en clair nous voulons démontrer la relation IV.2.1 - (3).

.../...

Ce qui donne avec les notations introduites et résultats obtenus en :
 IV.2.1 - (4), IV.2.1 - (5) - IV.2.1 - (6), IV.2.2 - (1), IV.2.2 - (2)

$$\left(\begin{array}{l} \text{A tout instant } t \\ \text{tel que } r^2(t)S^T(T).M.S(t) = c \end{array} \right) \text{ on a } \left(\begin{array}{l} r^2(t)g(S(t)) + r^{3/2} h(S(t)) + \\ r(t) k(t, S(t)) < 0 \end{array} \right)$$

ce qui est réalisé si on a $\psi(r(t)) < 0$

$$\text{avec } \psi(r) = -a^2 r^2 + h^* r^{3/2} + k^* r.$$

L'évolution de la fonction $\psi(r)$ est représentée sur la figure IV.2.2.1.

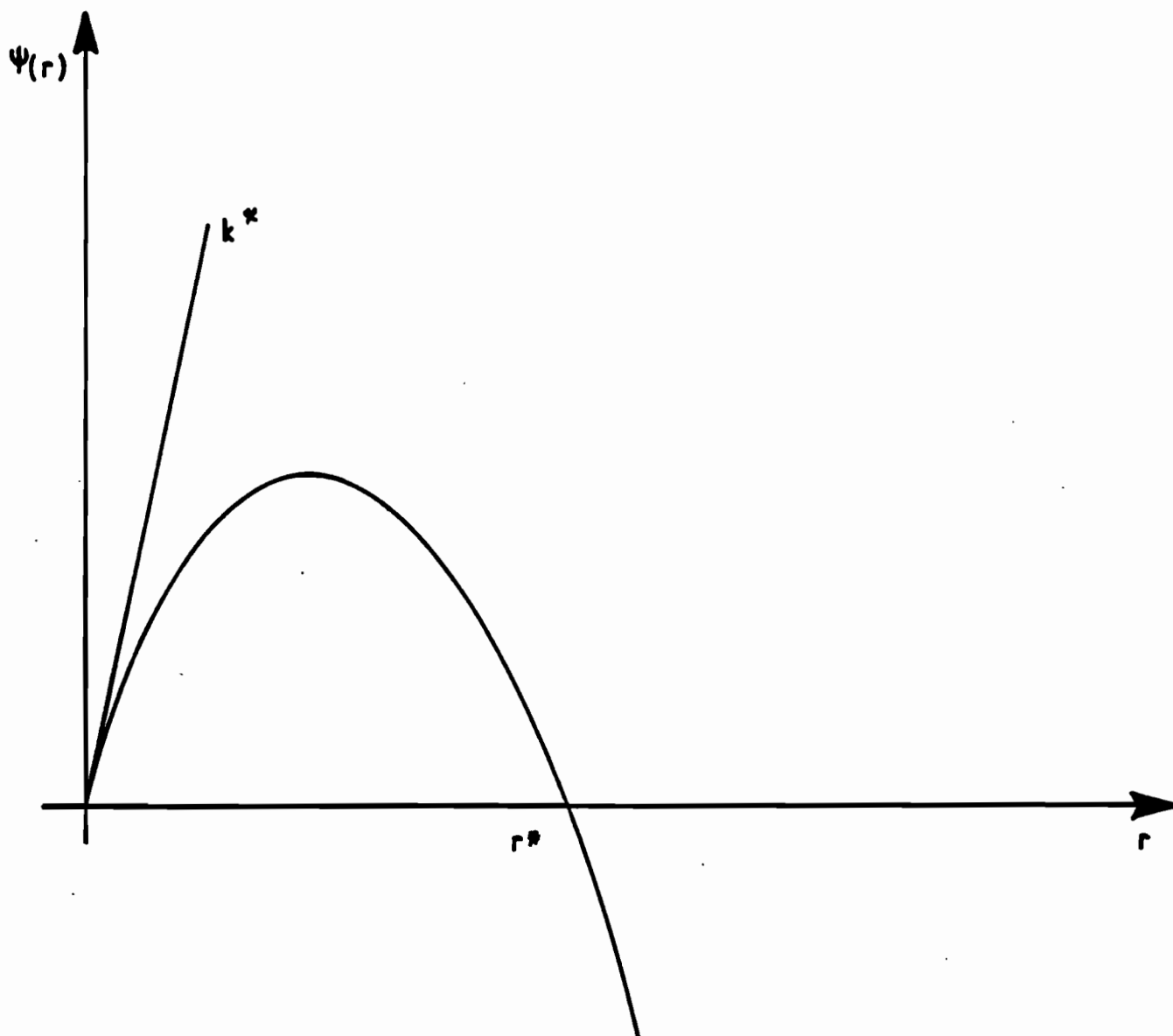


figure IV 2.2.1

Supposons que $r^2 S^T.M.S = c$

La matrice M étant définie positive on a $S^T.M.S > 0$, égalité exclue si S est non nul.

De manière plus précise, il existe deux constantes positives α^2 et β^2 telles que $\alpha^2 S^T.S \leq S^T.M.S \leq \beta^2 S^T.S$

et comme $S^T.S = 1$ par construction, on en déduit que :

$$\alpha^2 \leq S^T.M.S \leq \beta^2$$

Définissons R_1 et R_2 ($R_2 > R_1$) par :

$$R_1^2 \beta^2 - R_2^2 \alpha^2 = c$$

On est assuré que :

$$r^2(t) S^T(t).M.S(t) = c \implies R_1 \leq r \leq R_2$$

La fonction $\psi(r)$ s'écrit $\psi(r) = r(k^* + k^*r^{1/2} - a^2(r^{1/2})^2)$ avec $r \geq 0$

Il est facile de voir, k^* étant positif ($k^* > 0$), que $\psi(r)$ ne s'annule qu'une fois quand r varie entre $] 0, +\infty [$

$$\begin{aligned} \text{On a } \psi(r) &\geq 0 \text{ pour } 0 \leq r \leq r^* \\ \psi(r) &\leq 0 \text{ pour } r^* \leq r \end{aligned}$$

Choisissons c de manière que $R_1 > r^*$. On aura, $\forall r \in [R_1, R_2]$, $\psi(r) < 0$

Donc $\psi(r(t)) < 0$ à tout instant tel que $r^2(t) S^T(t).M.S(t) = c$. Ce qui entraîne que le système est globalement stable.

.../...

IV.2.3 - Cas où la matrice A n'a pas toutes ses valeurs propres à partie réelle négative

Soit M une matrice symétrique définie positive. $(A^T M + MA)$ est alors symétrique. Appelons L l'endomorphisme de \mathbb{R}^n associé à la matrice symétrique $(A^T M + MA)$. Dans ces conditions L est un endomorphisme symétrique de \mathbb{R}^n . L est donc diagonalisable.

Avant d'effectuer l'étude de la stabilité globale de notre système dans le cas où la matrice A n'a pas toutes les valeurs propres à partie réelle négative, nous allons énoncer une série de résultats qui nous serviront dans la suite de l'étude.

Proposition

Soit L un endomorphisme symétrique de \mathbb{R}^n . Etant donnée $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ (avec $q \leq n$) les valeurs propres distinctes de L , si $E(\lambda_i)$ désigne le sous espace de \mathbb{R}^n associé à λ_i (c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ_i), alors

$$\mathbb{R}^n = E(\lambda_1) \oplus \dots \oplus E(\lambda_q)$$

Démonstration

L étant un endomorphisme symétrique de \mathbb{R}^n , il admet q valeurs propres réelles distinctes et on a :

$$\dim E(\lambda_i) = S_i \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^q S_i = n$$

$$\text{Soit} \quad u \in \bigcap_{i=1}^q E(\lambda_i)$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } u \in E(\lambda_i) \quad \forall i = 1, \dots, q \\ \text{c'est-à-dire } L(u) = \lambda_i u \quad \forall i \end{aligned}$$

d'où $\forall j \neq k ; 1 \leq j, k \leq q$, on a $(\lambda_j - \lambda_k) u = 0$

.../...

Comme $\lambda_j \neq \lambda_k$ par hypothèse, on a alors $u = 0$

$$\text{donc } \bigcap_{i=1}^q E(\lambda_i) = \{0\}$$

Posons $E(\lambda_1) \oplus \dots \oplus E(\lambda_q) = E$

Soit F un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^n tel que $\mathbb{R}^n = E \oplus F$, $\forall X \in \mathbb{R}^n$,
 $X = u + v$ où $u \in E$ et $v \in F$,

$$\text{on a } u = \sum_{i=1}^q u_i \quad \text{et } L(u_i) = \lambda_i u_i.$$

\mathbb{R}^n étant un espace vectoriel euclidien, il est muni d'un produit scalaire $\langle X, y \rangle$ et on a :

$$\langle L(X), y \rangle = \langle X, L(y) \rangle$$

$$\langle L(u), v \rangle = \sum_{i=1}^q \lambda_i \langle u_i, v \rangle = 0$$

$$\text{car } \langle u_p, u_q \rangle = 0 \quad p \neq q \text{ et } \langle u_p, v \rangle = 0$$

$$\text{d'où } \langle u, L(v) \rangle = 0$$

Donc $v \rightarrow L(v)$ est un endomorphisme dans F . Puisqu'il est symétrique, il a donc des valeurs propres qui sont nécessairement déjà répertoriés dans les $E(\lambda_i)$. Par conséquent $F = \emptyset$.

Corollaire

Etant donné L un endomorphisme symétrique de \mathbb{R}^n , si on désigne par E_1 le sous espace de \mathbb{R}^n engendré par les vecteurs propres positifs ou nuls de L et E_2 le sous espace de \mathbb{R}^n engendré par les vecteurs propres associées aux valeurs propres négatives, on a :

$$\mathbb{R}^n = E_1 \oplus E_2$$

.../...

Démonstration

Il suffit de prendre $E_1 = E(\lambda_1) \oplus \dots \oplus E(\lambda_m)$ où les $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont les valeurs propres positives ou nulles et $E_2 = E(\lambda_{m+1}) \oplus \dots \oplus E(\lambda_q)$ où les $\lambda_{(m+1)}, \dots, \lambda_q$ sont les valeurs propres négatives, puis appliquer le résultat de la proposition.

Revenons à l'étude de la stabilité du système. Du fait que $(A^T M + MA)$ est symétrique, si on désigne par D la matrice diagonale formée des valeurs propres de $(A^T M + MA)$ (qui sont réelles), on sait qu'il existe une matrice orthogonale P qui est telle que :

$$\text{IV.2.3 - (1)} \quad D = P^T (A^T M + MA) P$$

Posons

$$Z = P^T S$$

on a :

$$\text{IV.2.3 - (2)} \quad Z^T Z = S^T P P^T S = S^T S = 1$$

Si on désigne par E_1 le sous espace de \mathbb{R}^n engendré par les vecteurs propres associés aux valeurs propres positives ou nulles de $(A^T M + MA)$, E_2 le sous espace de \mathbb{R}^n engendré par les vecteurs propres associés aux valeurs propres négatives, on peut, en vertu du corollaire ci-dessus, écrire que :

$$\mathbb{R}^n = E_1 \oplus E_2.$$

Dans ces conditions, la fonction $g(S)$ définie par la formule en IV.2.1 - (6) peut encore s'écrire :

$$\text{IV.2.3 - (4)} \quad g(S) = S^T . P . D . P^T S$$

Ce qui donne par changement de variables :

$$\text{IV.2.3 - (5)} \quad \tilde{g}(Z) = Z^T D Z$$

.../...

La partition de \mathbb{R}^n , induit deux restrictions de la fonction $\tilde{g}(Z)$, soit :

$$\text{IV.2.3 - (6)} \quad \begin{cases} \tilde{g}(Z) = \tilde{g}_1(Z) & \text{si } Z \in E_1 \\ \tilde{g}(Z) = \tilde{g}_2(Z) & \text{si } Z \in E_2 \end{cases}$$

Théorème

Les fonctions $\tilde{g}_1(Z)$ et $\tilde{g}_2(Z)$ définies par les formules en IV.2.3 - (6) sont telles que :

$$\tilde{g}_1(Z) \geq 0 \quad \text{et} \quad \tilde{g}_2(Z) < 0$$

Démonstration

On a $\forall Z \in \mathbb{R}^n$, $Z = Z_1 + Z_2$ où,

Z_1 est la projection de Z sur E_1 et Z_2 la projection de Z sur E_2 . La matrice diagonale D peut se décomposer sous la forme $D = D_1 + D_2$ où les éléments non nuls de la matrice D_2 sont les valeurs propres négatives.

On a alors $\tilde{g}(Z) = Z^T D Z = (Z_1 + Z_2)^T (D_1 + D_2) (Z_1 + Z_2)$

$$\begin{aligned} &= Z_1^T D_1 Z_1 + Z_1^T D_1 Z_2 + Z_1^T D_2 Z_1 + Z_1^T D_1 Z_2 + Z_2^T D_1 Z_1 + Z_2^T D_1 Z_2 \\ &+ Z_2^T D_2 Z_1 + Z_2^T D_2 Z_2 \end{aligned}$$

$$Z_1^T D_2 Z_1 - Z_1^T D_2 Z_2 - Z_2^T D_1 Z_1 - Z_2^T D_2 Z_1 - Z_1^T D_1 Z_2 - Z_2^T D_2 Z_1 = 0$$

En effet, considérons par exemple $Z_1^T D_2 Z_2$. En vertu du caractère diagonale de D de la décomposition $D = D_1 + D_2$, $D_2 Z_2$ a une projection nulle sur E_1 . Ce qui entraîne $Z_1^T D_2 Z_2 = 0$ quelque soit $Z_1 \in E_1$.

$$\text{d'où} \quad \tilde{g}(Z) = Z_1^T D_1 Z_1 + Z_2^T D_2 Z_2$$

.../...

Ce qui revient encore à écrire en utilisant les expressions en IV.2.3 - (6) que :

$$\tilde{g}(Z) = \tilde{g}_1(Z) + \tilde{g}_2(Z) .$$

La matrice D_1 étant définie non négative, on a :

$$Z_1^T D_1 Z_1 \geq 0, \quad \text{soit } \tilde{g}_1(Z) \geq 0 .$$

De même, la matrice D_2 étant définie négative, on a :

$$Z_2^T D_2 Z_2 < 0, \quad \text{soit } \tilde{g}_2(Z) < 0$$

D'où le résultat.

$$\text{Soit } a^2 = \sup_{Z^T Z = 1} (\tilde{g}_1(Z), |\tilde{g}_2(Z)|) \quad \text{où } a \in \mathbb{R}$$

Rappelons que la fonction $h(S)$ définie en IV.2.1 - (6) s'écrit :

$$h(S) = f^T(S).M.S + S^T.M.f(S)$$

Si on appelle $\tilde{h}(Z)$ (resp. $\tilde{f}(Z)$), la fonction obtenue par le changement de variable $S = PZ$ de $h(S)$ (resp. $f(S)$), on aura :

$$\text{IV.2.3 - (7)} \quad \tilde{h}(Z) = \tilde{f}^T(Z).M.P.Z + Z^T.P^T.M.\tilde{f}(Z)$$

A ce niveau, faisons l'hypothèse importante suivante :

on suppose que pour tout Z tel que $Z^T Z = 1$, on a :

$$\text{IV.2.3 - (8)} \quad \tilde{h}(Z) < -b^2 ; \quad b \in \mathbb{R}^*$$

L'hypothèse IV.2.3 - (8) n'est pas irréaliste. Car, elle signifie qu'après avoir excité même les modes instables, l'introduction des non linéairités a un effet stabilisateur sur l'ensemble du système.

.../...

Si on désigne par $\tilde{k}(t, Z)$, la fonction obtenue par le changement de variable $S = PZ$ à partir de la fonction $k(t, S)$, définie en IV.2.1. - (6), on aura :

$$\text{IV.2.3 - (9)} \quad \tilde{k}(t, Z) = E^T(t) \cdot M \cdot P \cdot Z + Z^T \cdot P^T \cdot M \cdot E(t) .$$

On choisit de définir la classe C de la façon suivante :

pour chaque fonction $t \rightarrow E(t)$ appartenant à C , cette fonction $t \rightarrow E(t)$ est continue et l'on a :

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \sup_{Z^T Z = 1} \tilde{k}(t, Z) < k^* \quad \text{où } k^* \text{ est une valeur positive.}$$

Signalons que nous voulons établir les conditions de stabilité globale (au sens de la définition 3), dans le cas où la matrice A n'a pas toutes ses valeurs propres à partie réelle négative. Compte tenu du changement de variable et des notations introduits, la stabilité globale est :

$$\text{IV.2.3 - (10)} \quad \left(\begin{array}{c} \text{A tout instant } t \\ \text{tel que } r^2(t) Z^T(t) \cdot P^T M \cdot P \cdot Z(t) = c \end{array} \right) \text{ on a } \left(\begin{array}{c} r^2(t) \tilde{g}(Z(t)) + r^{3/2} \tilde{h}(Z(t)) \\ + r(t) \tilde{k}(t, Z(t)) < 0 \end{array} \right)$$

Ce qui est réalisé si on a $\psi(r(t)) < 0$ avec $\psi(r) = a^2 r^2 - b^2 r^{3/2} + k^* r$.

Supposons que $r^2 Z^T \cdot P^T \cdot M \cdot P \cdot Z = c$

La matrice M étant définie positive, il en est de même de la matrice $P^T \cdot M \cdot P$. Par conséquent, on a $Z^T \cdot P \cdot T \cdot M \cdot P \cdot Z > 0$ égalité exclue si Z est non nul.

Il existe deux constantes w_1^2 et w_2^2 telles que :

$$w_1^2 Z^T Z \leq Z^T \cdot P^T \cdot M \cdot P \cdot Z \leq w_2^2 Z^T Z$$

comme $Z^T Z = 1$ (d'après IV.2.3 - (2)), on en déduit que :

$$w_1^2 \leq Z^T \cdot P^T \cdot M \cdot P \cdot Z \leq w_2^2$$

.../...

Définissons R_1 et R_2 ($R_2 > R_1$) par

$$R_1^2 w_2^2 - R_2^2 w_1^2 = c$$

on est assuré que :

$$r^2(t) Z^T(t) P^T.M.P.Z(t) = c \longrightarrow R_1 \leq r \leq R_2$$

La fonction $\psi(r)$ s'écrit $\psi(r) = r(a^2(r^{1/2})^2 - b^2 r^{1/2} + k^*)$, avec $r \geq 0$

Suivant la valeur de k^* , on voit que deux cas peuvent se présenter.

1er cas - k^* pas assez grand

On a plus exactement la condition suivante :

$$IV.2.3 - (11) \quad 4 a^2 k^* \leq b^4 .$$

La fonction $\psi(r)$ correspondant à ce cas est représenté sur la figure IV.2.3.1.

Le polynôme du second degré en $r^{1/2}$ qui est en évidence sur l'expression de $\psi(r)$ a deux racines réelles qui sont de même signe car $k^* > 0$ et dont la somme est positive puisque b^2 est positif.

On voit donc que $\psi(r)$ s'annule deux fois quand r varie entre $]0, +\infty[$.

Soient r_1^* et r_2^* ($r_1^* < r_2^*$) les solutions non nulles de $\psi(r) = 0$

On a : $\psi(r) \geq 0$ pour $r \in [0, r_1^*] \cup [r_2^*, +\infty[$

$\psi(r) \leq 0$ pour $r \in [r_1^*, r_2^*]$

.../...

Choisissons c de manière que $r_1^* < R_1$ et $R_2 < r_2^*$

on aura alors pour tout $r \in [R_1, R_2]$, $\psi(r) < 0$

donc $\psi(r(t)) < 0$ à tout instant tel que :

$$r^2(t) Z^T(t) P^T . M . P . Z(t) = c,$$

ce qui entraîne alors que le système est globalement stable.

2ème cas - k^* assez grand

On a plus exactement la condition suivante :

$$IV.2.3 - (12) \quad 4 a^2 k^* > b^4$$

La fonction $\psi(r)$ correspondant à ce cas est représentée sur la figure IV.2.3.2. Le polynôme du second degré en $r^{1/2}$, en évidence sur l'expression de $\psi(r)$, n'a pas de racine réelle.

On voit donc que $\psi(r)$ ne s'annule jamais quand r varie entre $]0, +\infty[$.

Plus exactement on a $\psi(r) \geq 0$ pour $r \geq 0$.

Par conséquent, quelque soit le choix de c , donc de R_1 et R_2 on aura toujours pour tout $r \in [R_1, R_2]$, $\psi(r) \geq 0$

Donc $\psi(r(t)) \geq 0$ à tout instant t tel que :

$$r^2(t) Z^T(t) . P^T . M . P . Z(t) = c$$

Ce qui signifie donc que, dans ces conditions, on ne peut pas, à priori, conclure sur la stabilité globale du système.

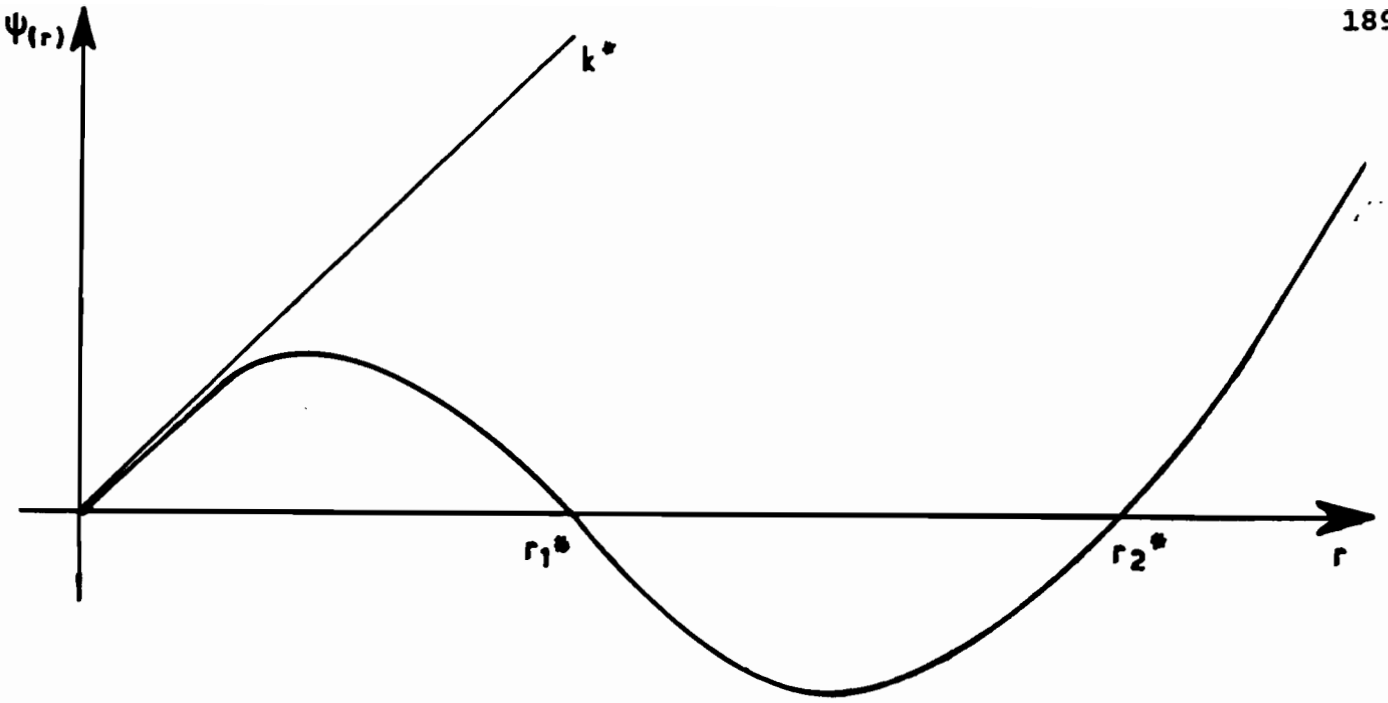


figure IV 2.3.1

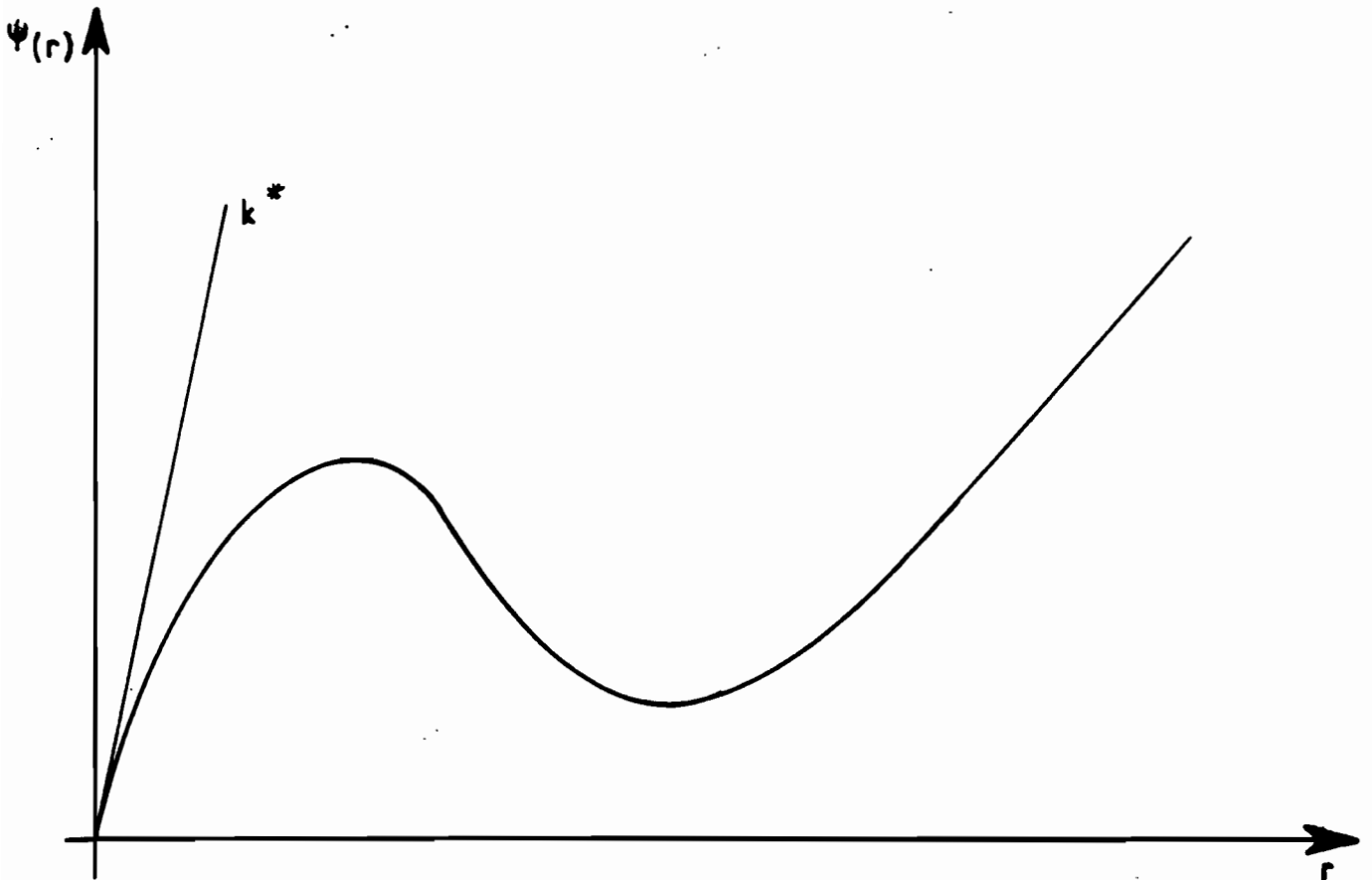


figure IV 2.3.2

IV.3 - ETUDE DU CAS DU DETENDEUR

IV.3.1 - ANALYSE PHENOMENOLOGIQUE ET REDUCTION DU SYSTEME

Nous nous proposons dans cette partie, d'appliquer au cas du régulateur-détendeur, la notion de stabilité telle que définie en IV.2.1. Nous rappelons, que l'évolution dynamique du régulateur est régie par le système représenté par les équations en IV.2 dans lesquelles nous avons tenu compte des effets de non linéarité.

Remarque : Dans toute cette partie, sauf mention expresse du contraire, les variables Δf du système seront notées f .

Avant d'étudier le système, nous allons par une analyse, voir l'influence des termes non linéaires sur le système. Pour cela définissons les grandeurs caractéristiques de perturbation suivantes :

$$l_c = 10^{-3} \text{ mètre (longueur caractéristique)}$$

$$p_c = 10^2 \text{ pascals (pression caractéristique)}$$

$$t_c = 1 \text{ seconde (temps caractéristique)}$$

Posons :

$$\lambda_1 = \frac{\rho_h^0 \sigma l_c}{k_1 \sqrt{P_a^0} \sqrt{P_c} t_c}$$

$$\lambda_1^* = \frac{\rho_h^{0*} \Sigma l_c}{k_1^* \sqrt{P_a^0} \sqrt{P_c} t_c}$$

$$\lambda_2 = \frac{\rho_m^0 \Sigma l_c}{k_2 \sqrt{P_d^0} \sqrt{P_c} t_c}$$

$$\lambda_4 = \frac{\rho_b^0 \sigma l_c}{k_4 \sqrt{P_{at}} \sqrt{P_c} t_c}$$

.../...

On a :

$$c_h^0 \cong 4.2 \cdot 10^{-10}$$

$$Ch^0 \cong 9.6 \cdot 10^{-9}$$

$$C_M^0 \cong 8.85 \cdot 10^{-9}$$

$$C_b^0 \cong 1.2 \cdot 10^{-9}$$

$$C_d^0 \cong 1.2 \cdot 10^{-10}$$

$$k_1 \cong 1.9 \cdot 10^{-10}$$

$$k_1^* \cong 9.12 \cdot 10^{-9}$$

$$k_2 \cong 5.86 \cdot 10^{-9}$$

$$k_4 \cong 5.95 \cdot 10^{-9}$$

Les termes λ_1 , λ_1^* , λ_2 et λ_4 caractérisent les pertes de charge au niveau de la prise d'influence pilote, de la prise d'influence principale, de la vanne d'amortissement V_{a2} et de l'évent pilote.

On a :

$$\frac{c_h^0 \sqrt{P_c}}{k_1 \sqrt{P_a^0} t_c} \cong 7 \cdot 10^{-2}$$

$$\text{et } \lambda_1 \cong 10,54 \quad ,$$

$$\frac{c_h^{0*} \sqrt{P_c}}{k_1^* \sqrt{P_a^0} t_c} \cong 9 \cdot 10^{-2}$$

$$\text{et } \lambda_1^* \cong 8,84 \quad ,$$

$$\frac{C_b^0 \sqrt{P_c}}{k_4 \sqrt{P_{at}} t_c} \cong 6 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{et } \lambda_4 \cong 55 \quad ,$$

$$\frac{C_M^0 \sqrt{P_c}}{k_2 \sqrt{P_d^0} t_c} \cong 4,5 \cdot 10^{-2}$$

$$\text{et } \lambda_2 \cong 4,57 \quad .$$

.../...

On remarque donc que :

$$\frac{C_h^0 \sqrt{P_c}}{k_1 \sqrt{P_a^0} t_c} \ll \lambda_1 \quad , \quad \frac{C_h^{0*} \sqrt{P_c}}{k_1^* \sqrt{P_a^0} t_c} \ll \lambda_1^*$$

$$\frac{C_b^0 \sqrt{P_c}}{k_4 \sqrt{P_{at}} t_c} \ll \lambda_4 \quad , \quad \frac{C_M^0 \sqrt{P_c}}{k_2 \sqrt{P_d^0} t_c} \ll \lambda_2$$

Cela revient donc à dire que dans les équations 3 à 6 (ce sont les équations traduisant la variation de l'état du gaz respectivement dans la chambre supérieure pilote, dans la chambre inférieure pilote, dans la chambre supérieure et inférieure du servomoteur principal), on peut négliger l'effet de compressibilité devant l'effet de volume.

Ainsi les équations 3 à 6 deviennent :

$$\frac{\bar{P}_a - \bar{P}_h}{|\bar{P}_a - \bar{P}_h|} \sqrt{|\bar{P}_a - \bar{P}_h|} = \lambda_1 \dot{x}$$

$$\frac{\bar{P}_b}{|\bar{P}_b|} \sqrt{|\bar{P}_b|} = \lambda_4 \dot{x}$$

$$- \frac{\bar{P}_a - \bar{P}_h^*}{|\bar{P}_a - \bar{P}_h^*|} \sqrt{|\bar{P}_a - \bar{P}_h^*|} = \lambda_1^* \dot{x}$$

$$- \frac{\bar{P}_M - \bar{P}_d}{|\bar{P}_M - \bar{P}_d|} \sqrt{|\bar{P}_M - \bar{P}_d|} = \lambda_2 \dot{x}$$

.../...

Soit encore :

$$\bar{P}_a = \bar{P}_h + \frac{\dot{\bar{x}}}{|\dot{\bar{x}}|} \lambda_1^2 \bar{x}^2$$

$$\bar{P}_b = \frac{\dot{\bar{x}}}{|\dot{\bar{x}}|} \lambda_4^2 \bar{x}^2$$

$$\bar{P}_a = \bar{P}_h^* - \frac{\dot{\bar{x}}}{|\dot{\bar{x}}|} \lambda_1^{*2} \bar{x}^2$$

$$\bar{P}_M = \bar{P}_d - \frac{\dot{\bar{x}}}{|\dot{\bar{x}}|} \lambda_2^2 \bar{x}^2$$

Dans l'équation 7 du système, c'est-à-dire dans l'équation traduisant la variation de l'état du gaz dans le volume V_d , on a :

$$\frac{c_d^0 \sqrt{P_c}}{k_2 \sqrt{P_d^0} t_c} \approx 6.2 \cdot 10^{-4}$$

On remarque que ce terme est négligeable devant les autres termes de l'équation qui sont du même ordre.

Ce qui donne pour l'équation 7 :

$$0 = - \lambda_2 \frac{\dot{\bar{x}}}{|\dot{\bar{x}}|} - \frac{\delta l_c}{k_2 \sqrt{P_d^0} \sqrt{P_c}} \bar{x} - \frac{\sqrt{P_c}}{R_7 k_2 \sqrt{P_d^0}} \bar{P}_d - \frac{q_3^0 (P_d^0 - 2P_a^0) \sqrt{P_c}}{2P_a^0 (P_d^0 - P_a^0) k_2 \sqrt{P_d^0}} \bar{P}_a$$

.../...

Soit encore :

$$\bar{P}_d = - \frac{\lambda_2 R_7 k_2 \sqrt{P_d^0}}{\sqrt{P_c}} \frac{\dot{x}}{\bar{x}} - \frac{\delta l_c R_7}{P_c} \bar{x} - \frac{R_7}{R_5} \bar{P}_a$$

d'où

$$\bar{P}_M = - \frac{\delta l_c R_7}{P_c} \bar{x} - \frac{\lambda_2 R_7 k_2 \sqrt{P_d^0}}{\sqrt{P_c}} \frac{\dot{x}}{\bar{x}} - \frac{R_7}{R_5} \bar{P}_a - \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} \lambda_2^2 \frac{\dot{x}^2}{\bar{x}^2}$$

En remplaçant les différentes expressions ci-dessus par leur valeur dans les équations initiales le système se réduit à :

$$\frac{m l_c}{t_c^2} \frac{\ddot{x}}{\bar{x}} + f \frac{l_c}{t_c} \frac{\dot{x}}{\bar{x}} + k l_c \bar{x} - \sigma P_c \bar{P}_a = - \sigma P_c \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \frac{\dot{x}^2}{\bar{x}^2}$$

$$\frac{M l_c}{t_c^2} \frac{\ddot{x}}{\bar{x}} + \frac{l_c}{t_c} (F + R_7 \rho_h^0 \Sigma^2) \frac{\dot{x}}{\bar{x}} + k l_c \bar{x} + \Sigma \delta l_c R_7 \bar{x}$$

$$+ \Sigma P_c \left(1 + \frac{R_7}{R_5}\right) \bar{P}_a = - \Sigma P_c \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \frac{\dot{x}^2}{\bar{x}^2}$$

$$\frac{\dot{P}_a}{\bar{P}_a} = - \frac{\delta l_c R_7 t_c}{R_3 P_c C_a^0} \bar{x} - \frac{\rho_h^0 \sigma l_c}{C_a^0 P_c} \frac{\dot{x}}{\bar{x}} + \frac{\alpha l_c t_c}{C_a^0 P_c} \bar{x} - \frac{\lambda_c^0 \bar{s}_c}{C_a^0 P_c} \frac{\Delta S_c}{\bar{P}_a}$$

$$+ \frac{\rho_h^0 \Sigma l_c}{C_a^0 P_c} \left(1 - \frac{R_7}{R_3}\right) \frac{\dot{x}}{\bar{x}} - \frac{t_c}{C_a^0} \left(\frac{Q_c^0}{2\eta^0} + \frac{R_7}{R_3 R_5} - \frac{1}{R_5}\right) \bar{P}_a + \frac{Q_1^0 \bar{P}_c t_c}{P_e^0 P_c C_a^0} \frac{\Delta P_e}{\bar{P}_a}$$

.../...

On constate donc que sous forme vectorielle, le système peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{dU}{dt} = AU + Q(U, U) + E(t)$$

où la matrice colonne $Q(U, U)$ caractérise la partie non linéaire du système et est égale à :

$$Q(U, U) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sigma P_c t_c^2}{m l_c} \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} (\lambda_1^2 + \lambda_4^2) \frac{\dot{x}^2}{x^2} \\ 0 \\ -\frac{\Sigma P_c t_c^2}{M l_c} \frac{\dot{X}}{|\dot{X}|} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \frac{\dot{X}^2}{X^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

La fonction vectorielle $Q(U, U)$ est positivement homogène de degré 2.

IV.3.2 - ETUDE DE LA STABILITE DU SYSTEME

Après analyse et réduction, le système peut se mettre sous la forme suivante :

$$\text{IV.3.2 - (1)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dU}{dt} = AU + Q(U, U) + E(t) \\ U = 0 \quad \text{pour } t < 0 \end{array} \right.$$

.../...

où :

* U est la matrice colonne dont les composantes, fonctions inconnues du temps, sont les variables de notre système réduit à savoir :

$$\Delta x(t), \dot{\Delta x}(t), \Delta X(t), \dot{\Delta X}(t) \text{ et } \Delta P_a(t).$$

* $Q(U, U)$ est la matrice colonne dont les composantes sont des fonctions quadratiques des inconnues. Cette matrice représente la non linéarité du système.

* $E(t)$ représente la matrice colonne dont les composantes caractérisent à chaque instant, l'excitation extérieure appliquée au régulateur-détendeur.

Nous nous proposons d'étudier la stabilité globale du système IV.3.2 - (1). Pour cela, nous allons suivre un raisonnement analogue à celui développé en IV.2, à la seule différence qu'ici, les non linéarités sont des fonctions positivement homogènes de degré 2 et non 1/2.

Proposition

Soit A une matrice carrée 5×5 réelle possédant des valeurs propres toutes distinctes dont quatre sont complexes conjuguées deux à deux. On peut trouver une matrice 5×5 , P , inversible telle que :

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} D_1 & [0] & [0] \\ [0] & D_2 & [0] \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

où λ est la valeur propre réelle de A , tandis que D_1 et D_2 sont deux matrices carrées chacune correspondant à un couple de valeurs propres conjuguées, et $[0]$ représente la matrice colonne nulle d'ordre 2.

Dans le cas du régulateur, c'est-à-dire où la matrice A est celle définie par le système IV.3.2 - (1), on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_1 = D_p \text{ où } D_p \text{ est une matrice carrée } 2 \times 2 \text{ caractérisant les valeurs propres} \\ \text{de pompage} \\ D_2 = D_v \text{ où } D_v \text{ est une matrice carrée } 2 \times 2 \text{ caractérisant les valeurs propres} \\ \text{de vibration} \end{array} \right.$$

.../...

Démonstration

On trouvera la démonstration de ce théorème dans les livres d'algèbre. L'on pourra se reporter par exemple à : [16]

A titre indicatif, on prendra comme colonnes de la matrice P, les vecteurs propres associés aux différentes valeurs propres de A.

Pour pouvoir étudier la stabilité globale au sens de la définition 3 du système IV.3.2 - (1), nous allons voir sous quelles conditions portant sur l'excitation on a la propriété suivante :

$$\text{IV.3.2 - (2)} \quad \left(\begin{array}{l} \text{A chaque instant } t \text{ tel que} \\ U^T(t).M.U(t) = 2\delta^2 \end{array} \right) \text{ on a } \left(1(U(t), E(t)) < 0 \right)$$

Considérons un instant t tel que $U^T(t).M.U(t) = 2\delta^2$ et posons $U(t) = \delta S(t)$ en convenant que $\delta > 0$.

Compte tenu des calculs déjà effectués au § IV.2.1, on voit que la propriété IV.3.2 - (2) revient à la suivante :

$$\text{IV.3.2 - (3)} \quad \left(\begin{array}{l} \text{A tout instant } t \text{ tel que} \\ S^T(t).M.S(t) = 2 \end{array} \right) \text{ on a } \left(\begin{array}{l} \delta S^T(t).(A^T M + MA).S(t) + \\ \delta^2(S^T(t).M.Q(S, S) + Q^T(S, S).M.S(t)) + \\ (S^T(t).M.E(t) + E^T(t).M.S(t)) < 0 \end{array} \right)$$

Posons pour toute la suite comme au § IV.2

$$\text{IV.3.2 - (4)} \quad \left\{ \begin{array}{l} g(S) = S^T(A^T M + MA) S \\ h(S) = Q^T(S, S).M.S + S^T.M.Q(S, S) \\ k(t, S) = E^T(t).M.S + S^T.M.E(t) \end{array} \right.$$

La propriété IV.3.2 - (3) devient, avec les notations introduites ci-dessus en IV.3.2 - (4) :

$$\text{IV.3.2 - (5)} \quad \left(\begin{array}{l} \text{A chaque instant } t \text{ tel} \\ \text{que } S^T(t).M.S(t) = 2 \end{array} \right) \text{ on a } \left(\delta^2 h(S(t)) + \delta g(S(t)) + k(t, S(t)) < 0 \right)$$

.../...

Propriété

On se donne une matrice 5 x 5, M, diagonale, définie positive.

On donne aussi une fonction $S \rightarrow Q(S, S)$ où S est une matrice colonne à 5 éléments et Q également une matrice colonne à 5 éléments, fonction définie par :

$$Q(S, S) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha^2 \text{ signe}(S_2) S_2^2 \\ 0 \\ -\beta^2 \text{ signe}(S_4) S_4^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \end{bmatrix}$$

Alors la fonction $S \rightarrow h(S)$ définie en IV.3.2 - (4) possède la propriété suivante :

$$h(S) \leq 0$$

Démonstration

$$\text{Soit } M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{la matrice diagonale} \\ \text{définie positive} \end{array}$$

$$\text{On a } h(S) = Q^T(S, S) \cdot M \cdot S + S^T \cdot M \cdot Q(S, S)$$

$$= -2(\alpha^2 m_2 S_2^2 + \beta^2 m_4 S_4^2)$$

Comme la matrice M est définie positive, m_2 et m_4 sont positifs.

Par conséquent $\alpha^2 m_2 S_2^2 + \beta^2 m_4 S_4^2 > 0$. D'où $h(S) \leq 0$.

La propriété que nous venons d'énoncer, traduit le fait que toute introduction de perte de charge au niveau des organes présentant une non linéarité fondamentale a un effet stabilisateur sur le système.

.../...

Cela signifie, conformément à la notion de stabilité développée précédemment, que l'introduction de perte de charge (c'est-à-dire la réduction de l'ouverture de la vanne d'amortissement V_{a2} ou l'augmentation de la perte de charge au niveau de l'évent pilote et des deux prises d'influence) joue un rôle de filtre en atténuant l'amplitude des oscillations du système.

On choisit de définir la classe d'excitation C de la façon suivante :

pour chaque fonction $t \rightarrow E(t)$ appartenant à C , la fonction $t \rightarrow E(t)$ est continue et on a :

$$\sup_{t \in \mathbb{R}, S^{\text{T.M.S-2}}} k(t, S) = e.$$

on considère la fonctionnelle :

$$\text{IV.3.2 - (6)} \quad G(S, \delta) = g(S) + \delta h(S)$$

et on définit la fonction :

$$\text{IV.3.2 - (7)} \quad \Phi(\delta) = \sup_{S^{\text{T.M.S-2}}} G(S, \delta)$$

On sait qu'il y aura stabilité au sens où on l'a défini si la propriété IV.3.2 - (5) est vérifiée.

Ce qui, avec les définitions et notations introduites, est réalisée si on a :

$\text{IV.3.2 - (8)} \quad \delta \Phi(\delta) < -e$
--

Calcul de la fonctionnelle $G(s, \delta)$

$$G(s, \delta) = g(s) + \delta h(s)$$

$$= S^{\text{T}}(A^{\text{T.M}} + MA) S + \delta [Q^{\text{T}}(S, S).M.S + S^{\text{T}}.M.Q(S, S)]$$

.../...

Posons

$$(J)_{ij} = (A^T M + M A)_{ij}$$

La matrice J est symétrique c'est-à-dire qu'on a $J_{ij} = J_{ji}$, car M est symétrique, comme matrice diagonale.

En utilisant la convention de l'indice muet, on montre que :

$$G(s, \delta) = J_{ij} S_i S_j - 2\delta [\alpha^2 \text{signe}(S_2) m_2 S_2^3 + \beta_2 \text{signe}(S_4) m_4 S_4^3]$$

c'est-à-dire sous forme développée :

$$\begin{aligned} G(s, \delta) = & J_{11} S_1^2 + J_{22} S_2^2 + J_{33} S_3^2 + J_{44} S_4^2 + J_{55} S_5^2 \\ & + 2J_{12} S_1 S_2 + 2J_{13} S_1 S_3 + 2J_{14} S_1 S_4 + 2J_{15} S_1 S_5 + 2J_{23} S_2 S_3 \\ & + 2J_{24} S_2 S_4 + 2J_{25} S_2 S_5 + 2J_{34} S_3 S_4 + 2J_{35} S_3 S_5 + 2J_{45} S_4 S_5 \\ & - 2\delta [\alpha^2 \text{signe}(S_2) m_2 S_2^3 + \beta_2 \text{signe}(S_4) m_4 S_4^3] \end{aligned}$$

Application numérique

Notre propos dans cette partie, est de vérifier à l'aide de résultats de simulation numérique, la notion et le critère de stabilité globale, tels que nous venons de les définir.

Cette notion de stabilité globale nécessite le calcul de la fonction $\Phi(\delta)$ telle que définie par la formule IV.3.2.7. Nous allons ici, affecter le même poids à toutes les variables du système, en prenant comme matrice symétrique définie positive M la matrice unité.

Ce qui donne donc :

$$\Phi(\delta) = \sup_{S^T S=2} G(S, \delta)$$

.../...

Le calcul de $\Phi(\delta)$, se ramène à la résolution d'un problème d'optimisation avec contrainte. La méthode d'optimisation que nous avons utilisé pour ce calcul est celle développée par M.J.D Powell [9].

Avec les valeurs retenues pour les différents paramètres du système, on obtient pour $\delta = 1$, le critère de stabilité suivant :

$$\text{IV.3.2 - (9)} \quad \overline{\Delta S_c} < 0,68$$

Signalons que cette relation traduit la condition définie en IV.3.2 - (8)

Ceci signifie, qu'étant données les valeurs des paramètres que nous avons retenues, tant que l'excitation du système ne dépasse pas 0,6 (ce qui revient à dire en terme dimensionné que l'amplitude de l'excitation ne dépasse pas 0,6 mm car nous avons pris $S_c = 10^{-3}$ mètre), on est sûr que la fonction :

$$\Delta Z(\bar{t}) = S^T(\bar{t}) S(\bar{t})$$

restera dans le domaine $[0, 2]$

Prenons pour illustrer ceci, une excitation définie par une fonction échelon en vitesse de 0,5 mm d'amplitude. On remarque sur la figure IV.3.2.1, que la fonction ΔZ reste bien dans le domaine défini, pendant tout le temps d'observation. On a donc un système globalement stable au sens de la définition 3 pour le critère $S_g(I, 2)$. Signalons que pour une telle excitation la pression aval varie entre - 1,2 mbar et 1,17 mbar.

En revanche, et comme le montre la figure IV.3.2.2, si on choisit une fonction d'excitation ayant une amplitude de 1 mm, on constate que la fonction ΔZ sort du domaine. Par conséquent toute violation du critère de stabilité rend le système instable au sens de la définition 3. Signalons que pour une telle excitation la pression aval varie entre - 2,52 mbar et 2,28 mbar.

.../...

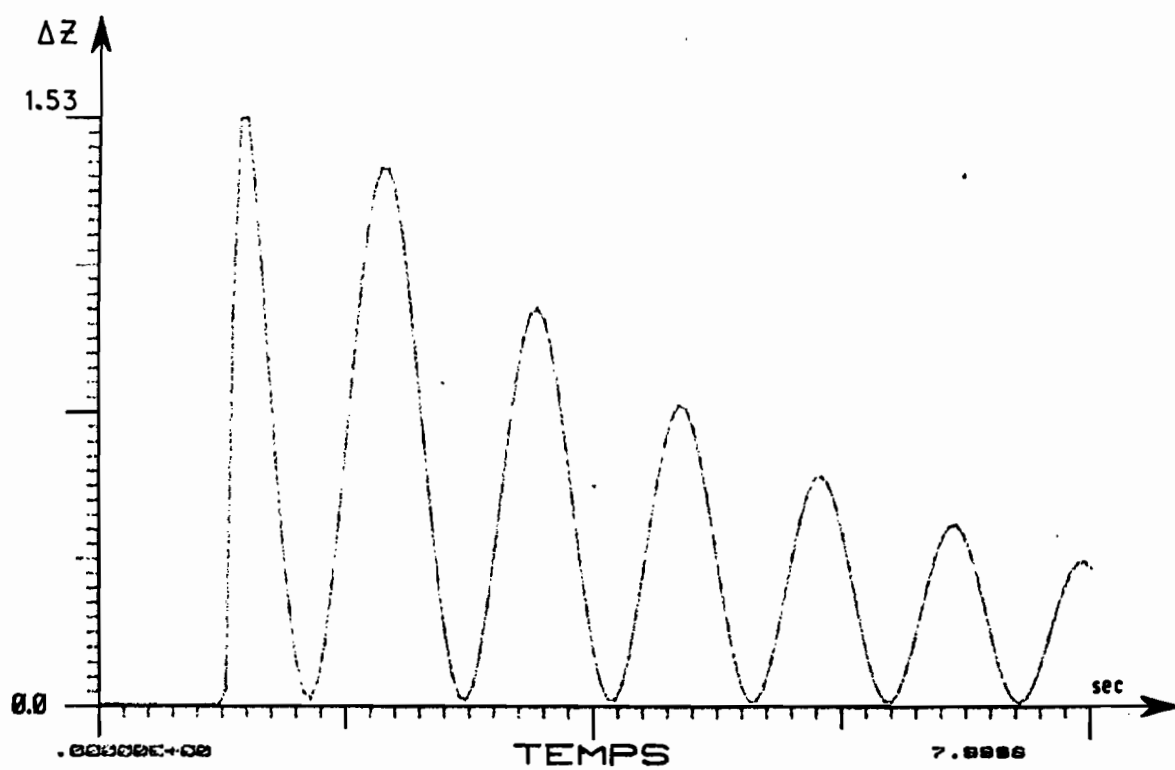


figure IV 3.2.1

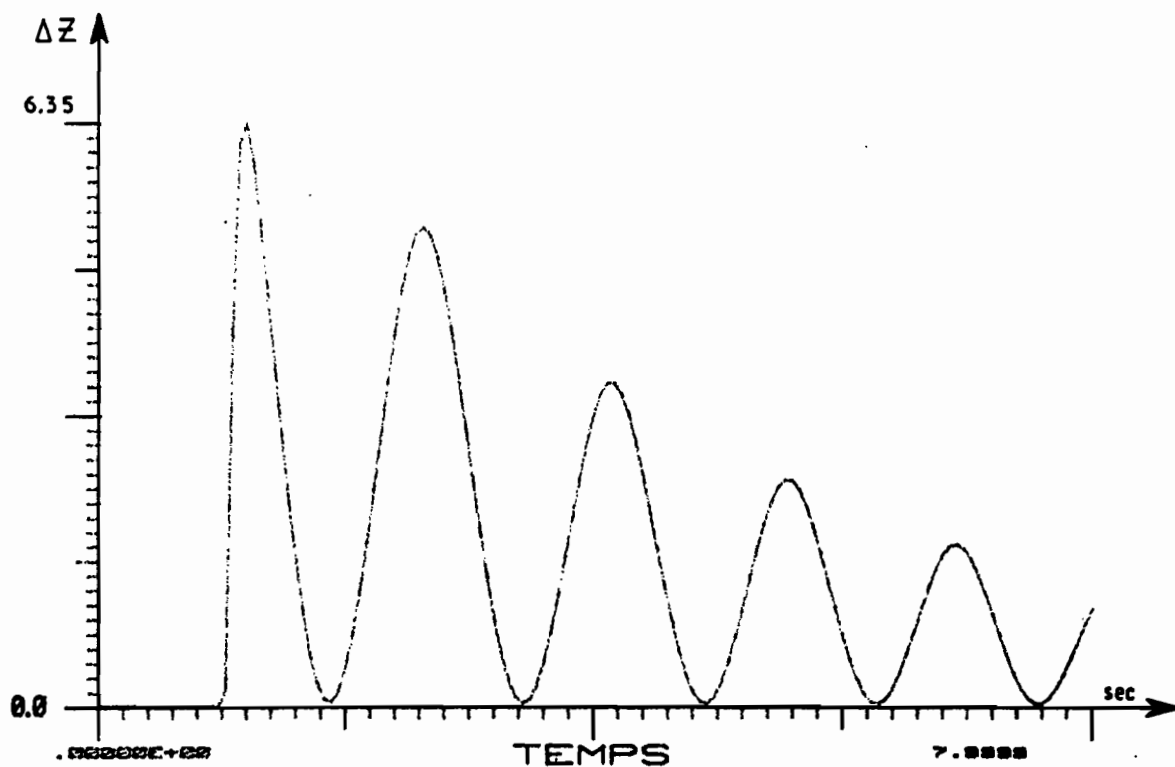


figure IV 3.2.2

IV.4 - CONCLUSION RELATIVE A LA NOTION DE STABILITE GLOBALE

Nous venons donc de voir que la notion de stabilité globale nous permet, étant donné une matrice M symétrique définie positive, de pouvoir enfermer les variables du système dans un domaine, et ceci, pour une classe d'excitations. Le choix de la matrice M est guidé par le poids que l'on souhaite donner aux différentes variables.

On remarque que si on décide de prendre comme domaine, la plage de régulation de l'appareil, cette notion de stabilité globale couvre assez bien l'idée que l'on se fait en général de la stabilité des régulateurs-détendeurs de gaz.

On pourrait affiner cette étude, en cherchant, par optimisation, le meilleur jeu de paramètres qui permet, pour une matrice symétrique définie positive M et une constante c , d'obtenir une stabilité globale du système. Cette recherche, qui généraliserait la présente étude, reviendrait à dire que l'on pourrait par exemple déterminer le jeu de paramètres qui permet, pour une classe d'excitations, au régulateur-détendeur d'avoir ses variables qui évoluent dans la plage de régulation.

CONCLUSION

L'étude entreprise, nous a permis de mettre en évidence certaines caractéristiques dynamiques des régulateurs-détendeurs de type piloté. Nous avons pu d'une part confirmer certaines tendances observées expérimentalement dans le milieu des professionnels (voir la référence [7]) et d'autre part apporter des explications relatives au fonctionnement dynamique de ces appareils.

Nous avons ainsi pu mettre en évidence, l'existence de deux couples de valeurs propres complexes, conjuguées deux à deux, susceptibles de déstabiliser l'appareil. Il s'agit :

* D'un couple de valeurs propres ayant une fréquence généralement de l'ordre du hertz, communément appelée pompage dans le milieu des professionnels.

* D'un couple de valeurs propres ayant une fréquence généralement de l'ordre de la dizaine de hertz, appelée vibration dans le milieu des professionnels.

Une étude paramétrique, effectuée sur le système définissant l'évolution dynamique des régulateurs pilotés, nous a permis de constater que la valeur propre de pompage dépendait des conditions d'installation et de réglage de l'appareil, tandis que la fréquence de vibration était la même pour un appareil donné, puisque caractéristique du module pilote de l'appareil. En clair, pour un même appareil donné, la fréquence de pompage peut varier d'un réseau à un autre, tandis que la fréquence de vibration reste inchangée quelque soit le réseau sur lequel il est placé.

D'une façon générale, dans la configuration habituelle de fonctionnement des régulateurs-détendeurs de type piloté, le phénomène de pompage est beaucoup plus fréquent que le phénomène de vibration, car nous avons montré que dans une

telle configuration la partie réelle de la valeur propre de pompage était souvent plus grande que celle de la valeur propre de vibration. Afin de remédier à ces défauts de stabilité, plus précisément pour éviter tout phénomène de pompage, une étude de sensibilité des différents paramètres nous a conduit aux remarques suivantes dont nous résumons ici celles relatives à quelques paramètres significatifs :

* la réduction de l'ouverture de la vanne d'amortissement V_{a2} est un facteur de stabilité. Cependant une trop grande réduction de cette ouverture augmente le temps de réponse de l'appareil dans la mesure où elle rend plus difficile la communication entre le pilote et le servomoteur principal.

* Une augmentation de la perte de charge au niveau des deux prises d'influence (grâce à une vanne de laminage par exemple) ou une augmentation de la perte de charge au niveau de l'évent pilote sont facteurs de stabilité dans la mesure où de telles augmentations atténuent tout phénomène de pompage.

* Une augmentation du débit nominal favorise la stabilité car elle écarte le clapet principal de la zone de petites ouvertures qui est une zone de pompage.

* Une augmentation de l'ouverture de la vanne de fuite V_{a3} atténue tout phénomène de pompage.

* Toute augmentation de la raideur du ressort pilote ou du ressort principal est facteur de stabilité. Signalons toutefois que si l'augmentation de la raideur du ressort pilote atténue le phénomène de pompage, elle dégrade la sensibilité de l'appareil et donc l'efficacité du mécanisme de régulation.

* Une diminution du volume aval atténue tout phénomène de pompage et s'accompagne d'une augmentation de la variation de pression aval et aussi d'une augmentation de la valeur de la fréquence de pompage. Contrairement à une idée reçue dans le milieu des professionnels du gaz, toute augmentation du volume aval n'est pas facteur de stabilité, mais diminue l'amplitude de la variation ce qui rend souvent le phénomène de pompage difficilement perceptible par les moyens de mesure de bord. Afin de pouvoir se servir du volume aval comme moyen de stabilisation, il serait intéressant de placer sur les réseaux, à l'aval des appareils, des vannes de laminage (ou tout autre matériel pouvant jouer le même rôle) qui permettraient de faire varier le volume aval effectif du régulateur-détendeur. Ainsi suivant les conditions d'utilisation, l'on pourrait adopter le volume aval adéquat, qui permettrait le bon fonctionnement de l'appareil.

* Le choix d'un clapet à ouverture parabolique ou de tout autre clapet permettant de grandes variations de position pour une faible variation de débit, est un facteur de stabilité. En effet, un tel clapet permet de travailler fréquemment en dehors de la zone de petites ouvertures qui est une zone de pompage.

Nous avons remarqué que dans beaucoup de cas, le phénomène de vibration est antagoniste à celui du pompage. C'est-à-dire que certains facteurs d'atténuation du pompage peuvent engendrer le phénomène de vibration. Cependant, et comme nous avons pu le montrer, l'énergie associée au mode de vibration est souvent négligeable devant celle associée au mode de pompage. Donc généralement, la présence de la vibration est difficilement décelable car "noyée" dans le pompage. Ainsi, le plus souvent, le régime transitoire est caractérisé par le pompage, même si la partie réelle de la valeur propre de vibration est plus grande que celle du pompage. En revanche, si dans de telles conditions, on arrive par un artifice quelconque à apporter de l'énergie supplémentaire à la vibration (de sorte qu'elle soit du même ordre que l'énergie de pompage), on aura alors un système qui peut se mettre en vibration. On peut apporter de l'énergie supplémentaire de vibration, en créant une forte variation instantanée de pression au niveau du pilote. En pratique, cette forte variation de pression au niveau du pilote peut avoir lieu dans l'un des cas ci-dessous :

* Une très brutale variation de débit à proximité d'un régulateur-détendeur.

* Sur les réseaux de distribution, les opérations normales de raccordement nécessitant un "ballonnement" peuvent créer un front de pression assez raide, qui se transmet au pilote par l'intermédiaire de la prise d'influence.

* Un gain très important au niveau du pilote, c'est-à-dire une très grande valeur de prédétente à pression aval constante, peut créer une grande fluctuation de pression de prédétente qui se transmet au pilote.

* Une variation brutale et instantanée de pression au niveau de l'évent pilote suite à une manipulation au niveau d'un poste de détente basse pression.

.../...

Signalons enfin, qu'un fort débit nominal à petit volume aval peut être cause de mise en vibration. Dans de telles conditions, une diminution du débit nominal peut être facteur d'atténuation du phénomène de vibration. Une étude de l'influence des différents paramètres sur la stabilité du système nous a permis de mettre en évidence, outre les cas cités ci-dessus, d'autres facteurs de mise en vibration.

Afin de pouvoir valider notre modèle, nous avons dû retenir un type d'appareil bien déterminé. L'étape d'identification, qui a consisté à déterminer les valeurs des paramètres permettant une adéquation entre le comportement du modèle et celui du processus réel, nous a permis, entre autres, de déterminer quantitativement des domaines de stabilité relatifs à l'appareil pour certaines configurations données. Ces domaines de l'espace des paramètres pour lequel le modèle est stable ont été vérifiées grâce à une série d'essais expérimentaux et assurent une qualité de régulation suffisante. Comme nous l'avons fait remarquer, cette étape quantitative nécessite pour chaque configuration, un nouveau "calage" des paramètres. Néanmoins, si cet ensemble de remarques relatives aux conditions de réglages, aux conditions d'installations et aux critères de choix de matériels n'est peut être pas généralisable du point de vue quantitatif, il couvre, sur le plan qualitatif, une assez grande classe de régulateurs-détendeurs de type piloté. C'est pour cela que ces remarques me semblent assez importantes, dans la mesure où elles donnent des indications permettant d'améliorer les conditions de stabilité des régulateurs-détendeurs pilotés en fonctionnement dynamique.

Toutefois, une partie intéressante de cette étude surtout pour les "exploitants" sur le terrain, serait d'envisager un programme de recherches en vue de déboucher sur une étude systématique des régulateurs-détendeurs de type piloté. Ce programme comporterait deux volets :

- Un premier volet qui consisterait à définir une méthodologie pour une large classe de régulateurs-détendeurs pilotés. Ce volet serait fortement inspiré de l'étude que nous avons menée. Il définirait, pour un régulateur donné, un modèle mathématique en ajoutant au modèle de base que nous venons d'établir, les particularités de l'appareil que l'on a en vue d'étudier. Ces particularités sont d'une façon générale soit des vannes placées à certains endroits, soit des chambres pneumatiques qu'il faudrait prendre en compte. Dans tous les cas, on se ramènerait à un système du même type que celui que nous avons établi, avec éventuellement plus de paramètres et d'inconnus.

.../...

- le second volet consisterait, pour une classe de régulateurs-détendeurs, à cerner de plus près le comportement. Pour cela, l'on pourrait disposer d'une "chaîne" d'études des régulateurs pilotés qui permettent de tester systématiquement la stabilité des appareils et préconiser éventuellement des paramètres de réglage. Cette chaîne comprendrait deux modules principaux. Le premier module étant un système d'acquisition de données, qui permet de recueillir et de stocker les informations sur les différentes variables. Ces informations seraient par la suite traitées, grâce à un logiciel qui constitue le second module. On sait que d'une façon générale, le système décrivant la dynamique de l'appareil peut s'écrire sous la forme :

$$(1) \quad \frac{dU}{dt} = AU + F(U) + E(t)$$

où :

$$(2) \quad F(U) = \sum_{i=1}^P F_i(U)$$

avec $F_i(U)$ caractéristique des organes non linéaires.

Ce logiciel devrait avoir comme entrée, la dimension du système, le nombre de non linéarités et éventuellement les valeurs des paramètres qui composent la matrice A. A partir des données stockées par le système d'acquisition, le logiciel devrait identifier tous les paramètres par minimisation de la fonctionnelle :

$$(3) \quad I = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \left\{ \left| \dot{U} - AU - \sum_{i=1}^P F_i(U) - E \right|^2 \right\} dt$$

Des opérations de simulation numérique pourraient alors permettre de voir le comportement du système et partant de préconiser le choix des paramètres. Ce logiciel pourrait même tracer des abaqués donnant le domaine de l'espace des paramètres pour lequel le modèle est stable. Il pourrait enfin comporter, un programme d'optimisation, permettant par la donnée d'une matrice M symétrique et définie positive (le choix de M étant guidé par le poids que l'on souhaite donner aux variables), de définir et préconiser le choix de paramètres et de classes d'excitations, qui soient tels que les variables restent enfermées dans un domaine. Pour l'exploitant, ce domaine pourrait par exemple être la plage de régulation.

Comme nous l'avons fait remarquer en introduction, le modèle que nous avons utilisé, même s'il prenait en compte les phénomènes essentiels, était assez simple dans son élaboration. On pourrait affiner le présent modèle, en prenant en compte certains phénomènes qui ont été négligés pour des raisons de simplification. Ainsi, l'on pourrait prendre en compte l'effet des perturbations de la prédétente, en supposant que celle-ci est dépendante du temps. Certains phénomènes liés aux efforts aérodynamiques exercés sur le clapet principal ont été supposés négligeables en première approximation. Mais, comme nous avons pu le remarquer, les zones de faibles ouvertures du clapet principal, sont des zones où se manifestent le phénomène de pompage. Une étude des efforts instationnaires sur le clapet principal, permettrait d'expliquer ces instabilités liées aux petites ouvertures. Pour les mêmes raisons de simplification, nous avons supposé que le réseau aval était un simple volume, obturé partiellement par une vanne permettant de régler le débit sortant de manière à le prescrire selon une loi horaire. Si une telle modélisation, nous a permis dans une configuration simple, d'expliquer les phénomènes d'instabilités liés à cette partie, dans la réalité un réseau de distribution est souvent maillé. Ce qui fait qu'un régulateur-détendeur est souvent raccordé à une canalisation servant d'alimentation à tout un réseau de distribution. Par conséquent, une modélisation complète devrait prendre en compte l'effet des divers appels de débit enregistrés sur tout ce réseau. Pour cela, on pourrait modéliser le réseau aval, par une longue canalisation à laquelle sont raccordées plusieurs autres canalisations. On supposera que l'écoulement dans la canalisation est monodimensionnel, de sorte que si x désigne l'abscisse le long de la canalisation, les grandeurs caractéristiques de l'écoulement seront :

$u(x,t)$, $\rho(x,t)$, $Q(x,t)$ et $p(x,t)$.

Soit $S(x)$ la section de la canalisation, on a :

$$(4) \quad u = \frac{Q}{\rho S}$$

L'équation de bilan de la masse s'écrit :

$$(5) \quad \frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho S u}{\partial x} = - M(t, x)$$

.../...

où $M(t,x)$ simule les divers appels en débit. On pourrait schématiser $M(t,x)$ par :

$$(6) \quad M(t,x) = \sum_{i=1}^N M_i(t) \delta(x - x_i)$$

avec $M_i(t)$ qui peut avoir un caractère aléatoire lié à l'appel en débit de la i ème station branchée sur la canalisation.

L'équation de bilan de la quantité de mouvement s'écrit :

$$(7) \quad \frac{\partial \rho S u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho S u^2 + p S) = F_d(x, t) + F_s(x, t)$$

où F_d représente la perte de charge linéaire le long de la canalisation et F_s la perte de charge singulière au i ème raccordement. Plus exactement, on a :

$$(8) \quad F_s(t, x) = \sum_{i=1}^N F_i(M_i(t)) \delta(x - x_i)$$

Une étude devrait permettre de modéliser $F_i(M_i(t))$.

L'équation de l'énergie s'écrit :

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho S \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \rho S u \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) = E_d(t, x) + E_s(t, x)$$

Par combinaison des équations (5) et (7), on a :

$$(10) \quad \rho S \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} p S = u M + F_d + F_s$$

Par combinaison des équations (5) et (9), on a :

$$(11) \quad \rho S u \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \rho S \left(\frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial x} \right) = M \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) + E_d + E_s$$

.../...

Si on s'intéresse aux variables en dehors des x_1 , on a :

$$E_s(x, t) = 0 \quad \text{et} \quad F_s(x, t) = 0$$

D'où le système se réduit à :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho S \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} p S - u M + F_d \\ \rho S u \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \rho S \left(\frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial x} \right) - M \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) + E_d \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho S + \frac{\partial}{\partial x} \rho S u = - M \end{array} \right.$$

En tenant compte de la loi d'état :

$$(13) \quad p = \rho^\gamma \exp(\sigma/c_v)$$

où $\sigma(x, t)$ désigne l'entropie,

on pourrait résoudre le système (12), donc déterminer en tout point x ($x \neq x_1$) de la canalisation et à tout instant t , la valeur de la pression à l'aval du régulateur-détendeur. L'équation permettant donc de déterminer la pression aval, remplacerait dans le modèle, celle que nous appelons équation de la variation de l'état du gaz dans le volume aval.

Nous terminerons cette conclusion, en formulant une réflexion relative à la conception des régulateurs-détendeurs pilotés. L'étude que nous avons menée, nous a permis de mettre en évidence les deux phénomènes susceptibles de déstabiliser l'appareil à savoir le pompage et la vibration.

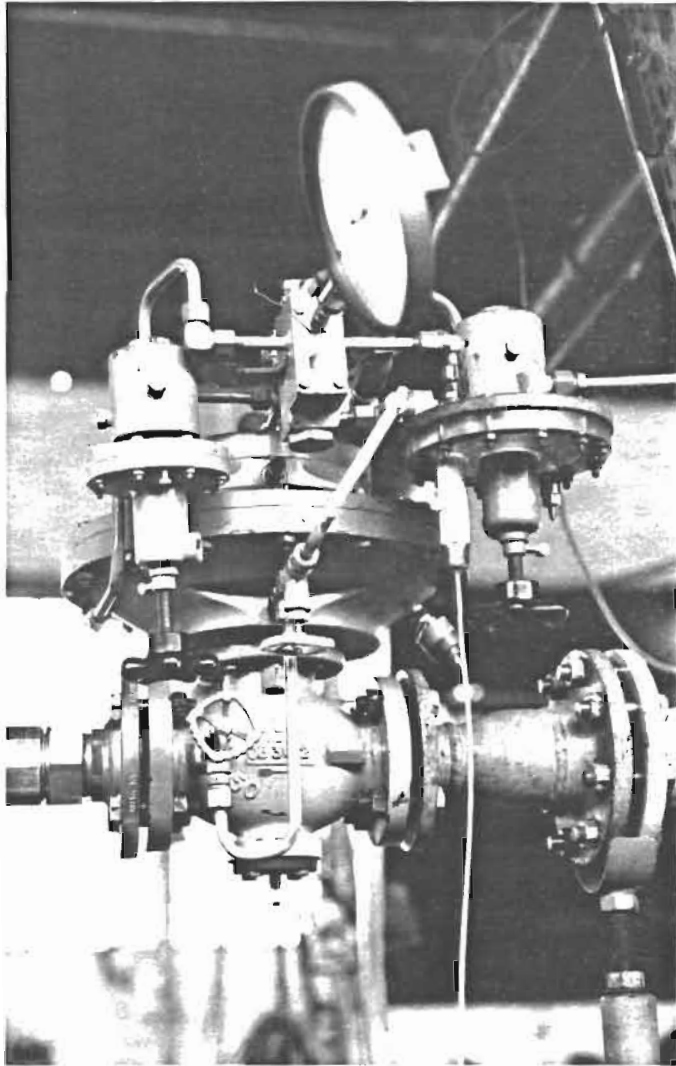
Compte tenu de la très faible fréquence des oscillations liées aux phénomènes de pompage, ceux-ci, quoique fréquents, ont des conséquences relativement minimes sur l'appareil ou sur le réseau lorsque les amplitudes des variables sont assez faibles et peuvent passer souvent inaperçues pour une personne non avertie. Par contre, le phénomène de vibration peut être très dangereux pour toute l'installation, surtout lorsqu'il est porteur d'une assez forte énergie.

.../...

On pourrait alors chercher à concevoir un régulateur-détendeur de type piloté, qui éliminerait tout risque de mise en vibration. Le module pilote de l'appareil étant essentiellement le siège d'un tel phénomène, il serait intéressant de changer le système de pilotage pneumatique tel qu'il est conçu actuellement par un comparateur muni d'un microprocesseur, qui commanderait la correction de pression motrice dans le servomoteur principal, donc la valeur de la pression aval.

Les avantages d'une telle démarche sont multiples. En effet, les systèmes de régulation électroniques sont beaucoup plus connus et maîtrisés. Ils ont en particulier un temps de réponse beaucoup plus faible que les systèmes pneumatiques, et permettent par conséquent une correction assez rapide de la pression aval. En outre, on peut avec de tels systèmes, avoir une commande à la fois précise et stable.

ANNEXE 1



Vue d'ensemble d'un régulateur piloté

ANNEXE II

ETUDE DE LA VARIATION DE L'ETAT DU GAZ
DANS UN DOMAINE Ω

Considérons un domaine Ω contenant du gaz dont la frontière

$$\partial \Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_\epsilon \quad \text{où}$$

. Γ_1 est mobile et a le mouvement de l'équipage mobile

. Γ_2 est fixe

. Γ_ϵ est un domaine surfacique par lequel transite le gaz qui entre ou sort du domaine Ω . Soit $Q(t)$ le débit passant par Γ_ϵ .

Les équations du gaz dans le domaine Ω sont :

II.1

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + U^* \cdot \nabla \rho^* + \rho^* \cdot \nabla \cdot U^* = 0 \\ \frac{\partial U^*}{\partial t^*} + U^* \cdot \nabla U^* + \frac{1}{\rho^*} \nabla P^* = 0 \\ \frac{\partial S^*}{\partial t} + U^* \cdot \nabla S^* = 0 \\ U^* \cdot n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \\ U^* \cdot n = W^*(t^*) \quad \text{sur } \Gamma_1 \\ \int_{\Gamma_\epsilon} \rho^* U^* \cdot n ds = Q(t) \end{array} \right.$$

Soient ρ_0 , P_0 et $U = 0$ la masse volumique, la pression et la vitesse du gaz à l'équilibre.

.../...

On adimensionnalise le système II.1, en introduisant différentes grandeurs caractéristiques de la manière suivante :

$$P^* = P_0 (1 + \Pi)$$

$$W^*(t^*) = Ma_0 W(t) \text{ où } M \text{ désigne un nombre de Mach caractéristique et } a_0 \text{ la vitesse du son}$$

$$U^* = a_0 M U$$

$$X^* = L X$$

$$t^* = t_c t$$

$$\rho^* = \rho_0 (1 + r)$$

Ainsi, les équations du système II.1 deviennent :

$$1. \quad \frac{L}{a_0 t_c} \frac{\partial r}{\partial t} + M [U \cdot \nabla r + (1 + r) \nabla \cdot U] = 0$$

$$2. \quad \frac{a_0 M}{t_c} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{a_0^2 M^2}{L} U \cdot \nabla U + \frac{P_0}{\rho_0 L (1+r)} \nabla \Pi = 0$$

3. L'équation (3) du système II(1) traduit le fait que l'écoulement du gaz dans Ω soit isentropique, c'est-à-dire constante le long des lignes de courant.

On part d'un état du gaz au repos (c'est-à-dire la pression, la masse volumique et l'entropie sont constantes). Comme nous avons supposé que le niveau de turbulence était négligeable, on peut alors dire aussi que l'entropie est constante partout dans l'écoulement.

Le gaz étant supposé parfait à chaleur spécifique constante, si on combine l'équation (3) de II(1) et la loi d'état du gaz on obtient :

$$(1 + \Pi) = (1 + r)^\gamma$$

.../...

$$4. \quad \begin{array}{ll} U.n = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \\ U.n = W(t) & \text{sur } \Gamma_1 \end{array}$$

$$\int_{\Gamma_\epsilon} (1+r) U.nds = Q(t)$$

On a donc le système :

$$II.2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{L}{a_0 t_c} \frac{\partial r}{\partial t} + M [U.Vr + (1+r) \nabla.U] = 0 \\ \frac{a_0 M}{t_c} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{a_0^2 M^2}{L} U.VU + \frac{P_0}{\rho_0 L(1+r)} VII = 0 \\ (1+\Pi) = (1+r)^\gamma \\ U.n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \\ U.n = w(t) \quad \text{sur } \Gamma_1 \\ \int_{\Gamma_\epsilon} (1+r) U.nds = Q(t) \end{array} \right.$$

La relation II.2 - (3) nous permet d'écrire :

$$II.2 - (5) \quad VII = \gamma \frac{1+\Pi}{1+r} Vr ,$$

d'où

$$\frac{P_0}{\rho_0 L(1+r)} VII = \frac{P_0 \gamma}{\rho_0 L} \frac{(1+\Pi)}{(1+r)^2} Vr = \frac{a_0^2}{L} \frac{(1+\Pi)}{(1+r)^2} Vr ,$$

Réinjectant cette formule dans l'équation II.2 - (2) on a :

$$II.2 - (6) \quad \frac{a_0 M}{t_c} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{a_0^2 M^2}{L} U.VU + \frac{a_0^2}{L} \frac{1+\Pi}{(1+r)^2} Vr = 0$$

comme $|\Pi| \ll 1$ et $|r| \ll 1$, il s'en suit que

$$\frac{1+\Pi}{(1+r)^2} \cong 1 .$$

L'équation II.2 - (6) devient alors :

$$II.2 - (7) \quad \frac{a_0 M}{t_c} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{a_0^2 M^2}{L} U.VU + \frac{a_0^2}{L} Vr = 0 ,$$

.../...

soit

$$\frac{L}{a_0 t_c} M \frac{\partial U}{\partial t} + M^2 U \cdot \nabla U + \nabla r = 0 .$$

A ce stade du raisonnement, il est important de remarquer que le nombre sans dimension

$$\frac{L}{a_0 t_c}$$

définit le nombre de strouhal encore appelé par abus de langage fréquence réduite. Soit ω ce nombre,

on a :

$$\omega = \frac{L}{a_0 t_c} .$$

Pour notre étude, on a la vitesse du son dans le gaz qui est :

$$a_0 \cong 330 \text{ m/s} .$$

La longueur caractéristique de Ω est $L \cong 10^{-3} \text{ m}$.

Le temps caractéristique est $t_c \cong 10^{-1} \text{ s}$.

D'où :

$$\omega = \frac{L}{a_0 t_c} \ll 1 .$$

Dans les essais effectués, on observe une vitesse maximale de l'ordre de 30 m/s.

D'où le nombre de Mach $M \ll 1$

Avec ces remarques, l'équation II.2 - (7) devient alors :

$$\text{II 2 - (8)} \quad \nabla r = 0$$

.../...

Le système peut alors s'écrire :

$$\text{II.3} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{L}{a_0 t_c} \frac{\partial r}{\partial t} + M [U \cdot \nabla r + (1+r) \nabla \cdot U] = 0 \\ \nabla r = 0 \\ (1+\Pi) = (1+r)^\gamma \\ U \cdot n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \\ U \cdot n = w(t) \quad \text{sur } \Gamma_1 \\ \int_{\Gamma_e} (1+r) U \cdot n ds = Q(t) \end{array} \right.$$

Tenant compte de II.3 - (2), l'équation II.3 - (1) devient :

$$\text{II.3 - (5)} \quad \frac{L}{a_0 t_c} \frac{\partial r}{\partial t} + M (1+r) \nabla \cdot U = 0$$

soit

$$\text{II.3 - (6)} \quad \int_{\Omega} \frac{L}{a_0 t_c} \frac{\partial r}{\partial t} dv = - \int_{\Omega} M(1+r) \nabla \cdot U dv$$

Signalons que l'équation

$$\text{II.3 - (2)} \quad \nabla r = 0 \longrightarrow r(\vec{x}, t) = r(t)$$

. Le membre de gauche de II.3 - (6) peut s'écrire, tenant compte de l'implication ci-dessus

$$\int_{\Omega} \frac{L}{a_0 t_c} \frac{\partial r}{\partial t} dv = \frac{L}{a_0 t_c} V \frac{dr}{dt}$$

si on admet que V désigne la mesure du domaine Ω .

La notation $\frac{dr}{dt}$ se justifie dans la mesure où r ne dépend que de t comme indiqué par l'implication ci-dessus.

. Le membre de droite de II.3 (6) peut aussi s'écrire

$$- \int_{\Omega} M (1+r) \nabla \cdot U dv = - M (1+r) \int_{\Omega} \nabla \cdot U dv$$

.../...

En utilisant le théorème de la divergence, on a

$$- M (1 + r) \int_{\Omega} \nabla \cdot U \, dv = - M (1 + r) \int_{\partial\Omega} U \cdot n \, ds$$

$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_\epsilon$ (qui sont des surfaces disjointes). Utilisant par conséquent la propriété d'additivité de l'intégrale, on a :

$$- M(1+r) \int_{\partial\Omega} U \cdot n \, ds = - M(1+r) \int_{\Gamma_1} U \cdot n \, ds - M(1+r) \int_{\Gamma_2} U \cdot n \, ds - M(1+r) \int_{\Gamma_\epsilon} U \cdot n \, ds$$

Etant donné, les conditions aux limites définies par l'équation

$$\text{II.3 - (4)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} U \cdot n = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \\ U \cdot n = W(t) & \text{sur } \Gamma_1 \\ \int_{\Gamma_\epsilon} (1+r) U \cdot n \, ds = Q(t) \end{array} \right.$$

$$\text{on a : } - M (1 + r) \int_{\partial\Omega} U \cdot n \, ds = - M (1 + r) \int_{\Gamma_1} W(t) \, ds - MQ(t)$$

L'équation II.3 - (6) devient alors :

$$\text{II.3 - (7)} \quad \frac{L}{a_0 t_c} V \frac{dr}{dt} = - M (1 + r) \int_{\Gamma_1} W(t) \, ds - MQ(t)$$

Soit :

$\text{II.3 - (8)} \quad \frac{\omega}{M} V \frac{dr}{dt} = - (1 + r) \int_{\Gamma_1} W(t) \, ds - Q(t)$
--

où ω désigne le nombre de Strouhal

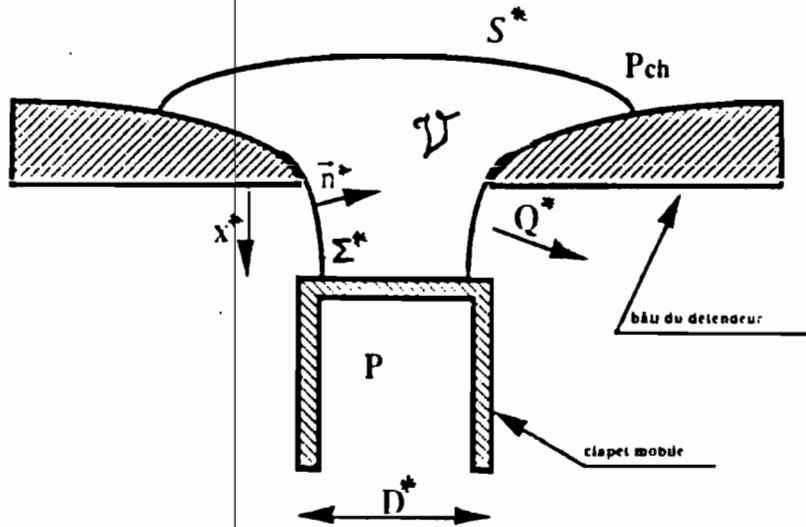
M désigne un nombre de Mach

La relation II.3 - (8) traduit la variation de l'état du gaz dans le domaine Ω .

Aux notations près, elle justifie les différentes équations que nous avons utilisées, pour décrire la variation de l'état du gaz dans diverses chambres du régulateur-détendeur.

ANNEXE III

EFFETS DE FROTTEMENTS VISQUEUX



Soit Q^* le débit massique qui s'échappe par le clapet, D^* le diamètre de la base du clapet, X^* la course de la tige qui guide le clapet (compté dans un sens bien déterminé), X_0^* la valeur de X^* lorsque le clapet est fermé.

φ^* le potentiel des vitesses de l'écoulement dans le volume V au dessus du clapet.

Σ^* la surface de contrôle entourant la fuite du clapet.

S^* la surface de contrôle loin de la fuite.

$$(1) \quad Q^* = - \rho^* \int_{\Sigma^*} \nabla^* \varphi^* \cdot \mathbf{n} \, ds^*$$

$$(2) \quad Q^* = \Pi D^* (X^* - X_0^*) a_0^* \rho^*$$

où a_0^* désigne la célérité du son dans les conditions de la chambre.

X^* n'intervient dans la détermination de φ^* que par la condition (1).
Compte tenu de (2) on peut écrire :

$$(3) \quad \varphi^* = a_0^*(X^* - X_0^*) \phi$$

En reportant (3) dans (1) et (2) et en tenant compte de :

$$(4) \quad X^* = D^* X \quad X_0 = D^* X_0 \quad dS^* = D^{*2} dS$$

on a :

$$\Pi D^{*2} (X - X_0) a_0^* \delta^* = - \rho^* a_0^* D^* (X - X_0) \frac{1}{D^*} \int_{\Sigma} \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n} D^{*2} dS$$

D'où

$$(5) \quad \Pi = - \int_{\Sigma} \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n} ds$$

ϕ est déterminé par les conditions

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur (C) U(L)} \\ \nabla \phi = 0 \quad \text{dans } \theta \\ - \Pi = - \int_{\Sigma} \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n} ds \\ \text{Sur S, } \phi \text{ est le potentiel d'un puit de débit} \\ \text{(adimensionné) égal à } \Pi \end{array} \right.$$

Donc ϕ ne dépend que de la géométrie au dessous du clapet.

D'après la version instationnaire du théorème de Bernouilli, on a :

$$(7) \quad p^* + \rho^* \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial t^*} + \frac{1}{2} ||\nabla^* \varphi^*||^2 \right) = p_{ch}^*$$

où p_{ch}^* est la pression dans la chambre (au niveau de S où les vitesses sont négligeables).

La force non compensée agissant sur le clapet comptée positivement dans le sens de X^* est :

$$(8) \quad F^* = \int_{C^*} (p^* - p_{ch}^*) dS^* \\ - \int_{C^*} \rho^* \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial t^*} + \frac{1}{2} ||\nabla^* \varphi^*||^2 \right) dS^*$$

Posons (9) $t^* = t_c^* t$

D'où :

$$(10) \quad \frac{\partial \varphi^*}{\partial t^*} = \frac{1}{t_c^*} \frac{\partial}{\partial t} [(X^* - X_0^*) a_0^* \phi] \\ = \frac{a_0^* D^*}{t_c^*} \frac{\partial}{\partial t} [(X - X_0) \phi] \\ = \frac{a_0^* D^*}{t_c^*} \dot{X} \phi$$

$$(11) \quad \frac{1}{2} ||\nabla^* \varphi^*||^2 = \frac{1}{2D^{*2}} ||\nabla [a_0^* D^* (X - X_0) \phi] ||^2 \\ = \frac{1}{2} a_0^{*2} (X - X_0)^2 ||\nabla \phi||^2$$

.../...

Tenant compte de (10) et (11), l'expression de (8) devient :

$$(12) \quad F^* = - D^{*2} \rho^* \int_C \left(\frac{a_0^* D^*}{t_c^*} \dot{X}\phi + \frac{1}{2} a_0^{*2} |X - X_0|^2 ||\nabla\phi||^2 \right) ds$$

$$(13) \quad F^* = - \rho^* a_0^* \frac{D^{*3}}{t_c^*} \int_C \left(\dot{X}\phi + \frac{1}{2} \frac{t_c^* a_0^*}{D^*} (X - X_0)^2 ||\nabla\phi||^2 \right) ds$$

Mais D^* n'est pas une bonne longueur caractéristique pour X^* et encore moins pour $(X^* - X_0^*)$.

$$(14) \quad X^* - X_0^* = D^* \lambda \xi$$

$$(15) \quad \frac{dX^*}{dt^*} = \frac{D^* \lambda}{t_c^*} \dot{\xi} = \frac{D^*}{t_c^*} \dot{X} ,$$

$$\dot{X} = \lambda \dot{\xi}$$

$$(16) \quad F^* = - \rho^* a_0^* \frac{D^{*3}}{t_c^*} \int_C \left(\lambda \dot{\xi} \phi + \frac{1}{2} \frac{t_c^* a_0^*}{D^*} \lambda^2 \xi^2 ||\nabla\phi||^2 \right) ds .$$

Pour que l'on puisse négliger le second terme, il faut que :

$$(17) \quad \frac{a_0^* t_c^* \lambda}{D^*} \gg 1 .$$

Soit h^* la hauteur maximale d'ouverture au passage au niveau du clapet.

On a :

$$(18) \quad \lambda = \frac{h^*}{D^*}$$

$$k_{30} = 3.16 \cdot 10^{-9}$$

$$k_{31} = 7.66 \cdot 10^{-9}$$

$$k_{32} = -2.13 \cdot 10^{-9}$$

$$k_{33} = 2.25 \cdot 10^{-10}$$

$$n_t = 2$$

$$k_3 = k_{30} + (k_{31} \cdot n_t) + (k_{32} \cdot n_t^2) + (k_{33} \cdot n_t^3)$$

$$q_3^0 = k_3 \sqrt{p_a^0 (p_d^0 - p_a^0)}$$

$$q_p^0 = q_3^0$$

$$Q_1^0 = 8.5 \cdot 10^{-2}$$

$$Q_c^0 = Q_1^0$$

$$\eta = 2 \cdot 10^3$$

$$R = 3 \cdot 10^4$$

$$R^* = 10^4$$

$$R_2 = 2.7 \cdot 10^7$$

$$R_4 = 1.7 \cdot 10^2$$

ANNEXE 4

Les différentes valeurs des paramètres ci-dessous sont données en unité S.I

m	- 2.6 10 ⁻¹
M	- 2.2
f	- 0
F	- 0
σ	- 8. 10 ⁻³
Σ	- 1.1 10 ⁻¹
k	- 1860
K	- 8200
ρ	- 0.8
ρ_b	- 1.293
vh	- 7.5 10 ⁻⁵
P_h^0	- 1.02 10 ⁵
γ	- 1.293
vb	- 1.24 10 ⁻⁴
pb	- 10 ⁵
vh*	- 1.6 10 ⁻³
vm	- 1.7 10 ⁻³
P_d^0	- 1.078 10 ⁵
vd	- 1.21 10 ⁻⁵
p_a^0	- 1.02 10 ⁵
Π	- 1.2 10 ⁵
δ	- 1.4
va	- 15
α	- 63

On voit donc que le second terme de (16) sera négligeable si :

$$(19) \quad \frac{a_0^* t_c^* h^*}{D^{*2}} \gg 1 .$$

On a :

$$a_0^* = 300 \text{ m/sec}, \quad h^* = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}, \quad t_c^* = 1 \text{ seconde}, \quad D^* = 10^{-2} \text{ m}.$$

D'où :

$$\frac{a_0^* t_c^* h^*}{D^{*2}} = 1.2 \cdot 10^4 \gg 1 .$$

Par conséquent le second terme de (16) est négligeable et on a F^* qui peut s'écrire :

$$(21) \quad F^* = - f^* \frac{dX^*}{dt^*} ,$$

où

$$f^* = \rho^* a_0^* D^{*2} \int_c \phi \, dS .$$

$$\text{Quand le clapet s'ouvre, on a } \frac{dX^*}{dt^*} > 0$$

Le débit est beaucoup plus grand, d'où un accroissement des vitesses. D'après le théorème de Bernoulli, on a la pression p^* qui a donc tendance à décroître.

F^* correspond donc à une dépression et se trouve dirigé dans le sens contraire à X c'est-à-dire au déplacement.

De plus on a $\phi = 0$ à l'infini, et sur le clapet on a :

$$\phi_{\text{clapet}} = \int_L \vec{v} \phi \cdot d\vec{P} > 0$$

Ce qui entraîne donc que $f^* > 0$

$$\text{On voit donc que } F^* = - f^* \frac{dX^*}{dt^*}$$

traduit bien un terme d'amortissement.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] ALI H. NAYFEH & DEAN. T. MOOK : Non linear oscillations-
Pure & Applied Mathematics
A wiley Interscience series
of texts, monographs &
tracts.
- [2] Bouraly : Etude sur les détendeurs
- [3] D.H.Tsai & E.C.Cassidy : Dynamic behavior of a simple
pneumatic pressure reducer-
Journal of Basic Engineering-
transactions of the ASME-June
1961-pp 253-264
- [4] H.W.Liepmann & A.Roshko : Eléments de la dynamique des gaz
Gauthiers-Villars et Cie Editeurs
de Paris-1962-
- [5] J.A.Wilkinson : The Algebraic Eigenvalue problem-
Monograph on Numerical Analysis
Clarendon Press - Oxford.
- [6] J.Ch.Gille & P.Decaulne & M.Pellegrin : Théorie et calcul
des asservissements linéaires-
collection Dunod.
- [7] J.Ph.Cornil : Compte rendu des essais effectués pour le
groupe de travail A.T.G "Analyse des
phénomènes de pompage des détendeurs"-
Rapport du Gaz De France
- [8] K.Stein : The transient response of the direct-acting
gas governor - Revue générale du gaz-
Janvier - Fevrier 1972
- [9] M.J.D Powell : A fast algorithm for non linearly
constrained optimization calculations -
Numerical Analysis Proceedings, Dundee 1977,
Ed G. A. Watson - Springer - Verlag. Lecture
Notes in Mathematics 630 (1978) - pp 144-157
- [10] M. L. Tatnall & A. Redpath : Dynamic modelling of a gas
pressure regulator for low pressure service.
Measurement and control. Vol. 11 April 1978

- [11] Miles. O. Dustin : Analog computer study of a design parameter effects on the stability of the direct-acting gas pressure regulator-
NASA Technical note - March 1971
- [12] P. de Larminat & Y. Thomas : Automatique des systèmes linéaires - Signaux et Systèmes -
Flammarion Sciences
- [13] P. Germain : Mécanique - Cours de l'école Polytechnique
Tome II - Collection Ellipses
- [14] R. Comolet : Mécanique expérimentale des fluides - Tome I
Collection Masson
- [15] R. J. Knops & E. W. Wilkes : Theory of elastic stability -
Handbuch Der Physik - Volume VI a / 3
- Springer Verlag -
- [16] Roger Godement : Cours d'algèbre - Enseignement des sciences - Collection Hermann
- [17] S. J. Walder Davis : The dynamic testing of a gas pressure regulators - Measurement and Control - Vol 9
October 1976
- [18] Solomon Lefschetz : Differential equations : Geometric theory - Pure and Applied Mathematics -
Volume VI
- [19] Tosio Kato : Perturbation theory for linear operators
- Springer Verlag Berlin -Heidelberg-
New-york 1966
- [20] Wolfgang Wasow : Asymptotic Expansions for ordinary differential equations
Pure and Applied Mathematics