Champs électromagnétiques d'une particule en mouvement hyperbolique dans un plan

MOUSSÉ Logbo M

RÉSUMÉ

Dans cet article nous avons déterminé les expressions du potentiel et du champ électromagnétique d'une particule en mouvement hyperbolique dans le plan d'un référentiel fixe. Nous nous sommes servi, pour cette détermination, de la méthode de passage au référentiel non inertiel développée par Gutsunaev Ts. I. (Gutsunaev Ts I, Terlestkii Y. P., 1960, Gutsunaev Ts I, 1972)

ABSTRACT

In this work we have determinate the potential and the electromagnetic fields of moving particle by using the passage method of non inertial frame of reference developed by Gutsunaev Ts. I (Gutsunaev Ts I, Terlestkii Y. P., 1960, Gutsunaev Ts I, 1972)

INTRODUCTION

La définition physique du mouvement accéléré du référentiel, en particulier le mouvement uniformément accéléré, est un problème qui, depuis longtemps, intéresse les chercheurs (Romain J. E., 1963 ; Salia R N., 1965, 1967). La différence dans les résultats obtenus se situe au niveau des postulats physiques que chaque auteur privilégie dans sa théorie. Toutefois, il faut noter qu'un même résultat a été interprété différemment par les chercheurs.

En mécanique classique le mouvement uniformément accéléré du point matériel est défini comme un mouvement qui se produit sous l'action d'une force

$$F^{\alpha} = cste \quad ; \quad \alpha = 1,2,3' \quad , \qquad (1)$$

constante en valeur et en direction.

La même définition est conservée en relativité. Mais cette force satisfait aux équations de la mécanique relativiste

$$mc\frac{du^{i}}{ds} = 0 \quad ; \quad i = 0,1,2,3 \qquad (2).$$

1. Mouvement relativiste unidimensionnel et uniforme

En étudiant le mouvement relativiste unidimensionnel et uniforme Kottler F. (Kottler F, 1921) a obtenu la métrique suivante :

$$ds^2 = c^2\left(1+\frac{az}{c^2}\right)^2 dt^2 - dx_{\alpha}dx^{\beta} \quad ; \quad \alpha, \beta = 1,2, \qquad (3)$$

Whitaker E. (Whitaker E, 1937), tout en étudiant ce même mouvement dans le cas d'une accélération constante et en utilisant une méthode semblable à celle de Kottler F., a obtenu la métrique :

$$ds^2 = c^2\left(1+\frac{2az}{c^2}\right)dt^2 - dx^2 - dy^2 - \left(1+\frac{2az}{c^2}\right)^{-1}dz^2, \qquad (4)$$

tandis que Meksyn D. (Meksyn D, 1931) utilisant l'article de Whittaker E. les formules de transformations, lors du passage à un référentiel non inertiel, suivantes :

$$Z = \frac{c^2}{a}\left[\left(1+\frac{2az}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} ch\left(\frac{at}{c}\right) - 1\right]$$
$$T = \frac{c}{a}\left(1+\frac{2az}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} sh\left(\frac{at}{c}\right) \qquad (5)$$

Des formules différentes de transformation ont été obtenues par certains auteurs (Lass H., 1963 ; Hill E, 1945 ; Taub A, 1961).

Dans l'article (Gutsunaev Ts I, 1972) la méthode de détermination des formules de transformation des coordonnées pour un mouvement unidimensionnel, relativiste et arbitraire a été développée. L'auteur a montré que ces formules peuvent, d'une manière générale, s'écrire comme suit :

$$Z = c\int sh\left(\int\frac{a(t)tdt}{c}\right)dt + z\,ch\left(\int\frac{a(t)tdt}{c}\right)$$
$$T = \int ch\left(\int\frac{a(t)tdt}{c}\right)dt + \frac{z}{c}sh\left(\int\frac{a(t)tdt}{c}\right) \qquad (6)$$

UFR-SFA. Université d'Abobo-Adjamé
02 BP 801 Abidjan 02 Côte d'Ivoire.
Email : mousse@uabobo.ci

2. Formules de transformation lors du passage d'un référentiel en mouvement par rapport à un référentiel fixe

Soit le référentiel $S'(x;y;z;t)$ en mouvement de translation par rapport au référentiel $S(X,Y,Z,T)$ dans le plan (XOY) sous l'angle φ0 .

Dans ce cas, il est évident que ce sont les coordonnées spatiales X, Y et temporaire T qui subiront des transformations.

$$T = f(x,y,z,t) \quad ; \quad X = g(x,y,z,t) \quad ; \quad T \qquad (7)$$

Pour déterminer les fonctions f ; g et h nous avons supposé que le tenseur de courbure Riklm est nul et avons considéré l'espace tridimensionnel du référentiel en mouvement euclidien, c'est-à-dire :

avec $$dl^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

$$\text{avec } \eta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & ; \quad \alpha = \beta \\ 0 & ; \quad \alpha \neq \beta \end{cases}$$

La supposition (8) a permis d'écrire la métrique du référentiel en mouvement sous la forme :

$$ds^2 = g_{00} dt^2 - dl^2 \qquad (9)$$

La nullité du tenseur de courbure Riklm donne un systèmes d'équations différentielles, desquelles, avec la condition (9)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 = 0, \\ &\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 = 0, \\ &\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial F}{\partial x \partial y} = 0, \end{aligned} \qquad (10)$$

où la fonction F est définie de la manière suivante :

$$g_0 = e^{2F} \qquad (11)$$

Cherchant la solution de (10) sous la forme

$$F = \ln\{f_0(t) + xf_1(t) + yf_2(t)\} \qquad (12)$$

et la substituant dans (11), puis dans (9) nous avons obtenu une métrique, qui comparée à celle du référentiel fixe

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2 \qquad (13)$$

donne le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} &c^2\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^2 = \left(1 + \frac{a_1 Ax + a_2 By}{c^2}\right)^2, \\ &c^2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 = -1, \\ &c^2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 = -1, \\ &c^2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial t}\right) = 0, \\ &c^2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial t}\right) = 0, \\ &c^2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}\right) = 0. \end{aligned}$$

(14)

Les fonctions f, g et h sont celles définies dans (7) alors que les fonctions f0, f1 et f2 s'écrivent comme suit :

$$f_0 = 1 \; ; \quad f_1 = \frac{Aa_1}{c^2} \; ; \quad f_2 = \frac{Ba_2}{c^2} \qquad (15)$$

avec a1, a2 des accélérations et A, B des fonctions de l'angle φ0.

Etant donné que le système d'équations (14) ne disposant pas de méthode de résolution en théorie d'équations différentielles, par tâtonnements, nous avons pu trouver une solution qui n'est, en fait, que les formules de transformation des coordonnées spatio-temporelles dans le cas d'un déplacement dans un plan, en posant :

a1 = a2 = a = cste.

$$\begin{aligned} &f = T = \frac{M}{c} sh\left(\frac{at}{c}\right), \\ &g = X = \left[Mch\left(\frac{at}{c}\right) - \xi\right]\cos\varphi_0 + D\sin\varphi_0, \\ &g = X = \left[Mch\left(\frac{at}{c}\right) - \xi\right]\sin\varphi_0 - D\cos\varphi_0, \end{aligned} \qquad (16)$$

avec $M = \xi\left(1 + \frac{x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0}{\xi}\right)$; $\xi = \frac{c^2}{a}$; $D = x\sin\varphi_0 - y\cos\varphi_0$.

Les expressions (16) se ramènent aux transformations relativistes d'un mouvement unidimensionnel si l'on pose φ0 = 0 (mouvement suivant l'axe des X) ou $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ (mouvement suivant l'axe des Y) (Gutsunaev Ts I, Terlestkii Y. P., 1960, 1972 ; 1974).

Potentiel et champ électromagnétiques

Pour déterminer les potentiels dans le référentiel en mouvement, nous avons utilisé les formules covariantes du 4-potentiel (Landau L. D., Lifchitz E. M, 1980)

$$A_i' = -e g^{kn} a_{i;k;m}\Big|_{s^2=0}$$

avec

$$a_i = \frac{1}{4}\frac{\partial s^2}{\partial x_i}, \qquad (17)$$

et s2 – carré de l'intervalle liant les coordonnées du point d'observation (x, y, z, t) et celles du point où se situe la charge (x', y', z', t'). Pour notre modèle, s2 s'écrit :

$$s^2 = 2\xi^2\left(1+\frac{x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0}{\xi}\right)\left(1+\frac{x'\cos\varphi_0 + y'\sin\varphi_0}{\xi}\right)b\left(\frac{c(t'-t)}{\xi}\right) - (z'-z)^2$$

$$\xi^2\left(1+\frac{x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0}{\xi}\right)^2 - \xi^2\left(1+\frac{x'\cos\varphi_0 + y'\sin\varphi_0}{\xi}\right)^2 - \left[(x'-x)\sin\varphi_0 - (y'-y)\cos\varphi_0\right]^2$$

(18)

En utilisant l'équation (17) et la condition x'=y'=z'=0, c'est-à-dire que la charge est confondue avec l'origine du référentiel en mouvement, nous avons obtenu les composantes spatiale et temporaire du potentiel dans le référentiel en mouvement et en utilisant les formules de transformation du 4 – potentiel suivantes

$$A_m = \frac{\partial x^l}{\partial x^m} A_l' \qquad (19)$$

les composantes spatiale et temporaire du potentiel dans le référentiel fixe.

$$A_0 = \frac{e}{\beta^2 - c^2T^2}\left\{\frac{\beta\left(Q+2\xi^2\right)}{P} - c^2T^2\right\}$$

$$A_X = \frac{e\cos\varphi_0}{\beta^2 - c^2T^2}\left\{\beta - \frac{cT\left(Q+2\xi^2\right)}{P}\right\} \qquad (20)$$

$$A_Y = \frac{e\sin\varphi_0}{\beta^2 - c^2T^2}\left\{\beta - \frac{cT\left(Q+2\xi^2\right)}{P}\right\}$$

avec

$$\beta = X\cos\varphi_0 + Y\sin\varphi_0 + \xi\ ; \quad Q = X^2+Y^2+Z^2+\xi(\beta-\xi) - c^2T^2$$

$$P = \left\{Q^2 + 4\xi^2\left[Z^2 + (X\sin\varphi_0 - Y\cos\varphi_0)^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Lorsque φ0 = 0 (mouvement suivant l'axe des X) ou $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ (mouvement suivant l'axe des Y) les formules (20) tendent vers celles obtenues dans (Gutsunaev Ts I, 1972). Ensuite, lorsque $a \to 0$, avec les conditions précédentes on aboutit à

$$A_X = A_Y = A_Z = 0 \ ; \quad A_0 = \frac{e}{\left(X^2+Y^2+Z^2\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad (21)$$

Utilisant les formules liant les potentiels aux champs électromagnétiques, c'est-à-dire

$$\vec{E} = -\overrightarrow{gradA_0} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial T} \quad ; \quad \vec{H} = \overrightarrow{rot A} \qquad (22)$$

nous avons obtenu :

$$E_X = \frac{4e\xi^2\cos\varphi_0}{P^3}\left(Q - 2\beta\sin\varphi_0\left(X\sin\varphi_0 - Y\cos\varphi_0\right)\right)$$

$$E_Y = \frac{4e\xi^2\sin\varphi_0}{P^3}\left(Q - 2\beta\sin\varphi_0\left(X\sin\varphi_0 - Y\cos\varphi_0\right)\right)$$

$$E_Z = -8e\xi^2\frac{\beta Z}{P^3}$$

$$H_X = -\frac{8e\sin\varphi_0\, cTZ}{P^3}\ ; \quad H_Y = -\frac{8e\cos\varphi_0\, cTZ}{P^3}$$

$$H_Z = -\frac{8e\xi^2\left(X\sin\varphi_0 - Y\cos\varphi_0\right)}{P^3\left(\beta^2 - c^2T^2\right)}\left\{2Z^2 - Q^2 + 2\xi\left(X\sin\varphi_0 - Y\cos\varphi_0\right)\right\}$$

(23)

CONCLUSION

Les potentiels (20) et les champs électromagnétiques (23) obtenus ont la même forme que ceux obtenus dans l'article (Gutsunaev Ts I, 1972) dans le cas d'un mouvement unidimensionnel. La différence avec ceux obtenus par nous se situe au niveau de l'angle φ0 (sous lequel le référentiel S' se déplace) que contiennent ces formules et de l'existence de deux composantes des champs électromagnétiques correspondants au mouvement dans le plan considéré.

En fait si nous considérons le mouvement uniquement suivant $\vec{r}$ (vecteur rayon de la particule) alors celui-ci sera considéré comme la superposition de deux mouvements hyperboliques. D'où la conclusion, la superposition de mouvements hyperboliques est un mouvement hyperbolique.

RÉFÉRENCES

1- **GUTSUNAEV TS. I.** Dans le recueil « les problèmes de la physique statistique et la théorie des champs », Edition Université de l'Amitié des peuples., Moscou, 1972, p. 115

2- **GUTSUNAEV TS. I., TERLETSKII Y. P.** Journal de la physique théorique, fascicule 5, n°30, 1960, p. 491 (en russe)

3- **GUTSUNAEV TS. I.** Ann. Henri Poincaré, vol. XXVII, n°1, 1972, p. 71

4- **GUTSUNAEV TS. I., ERMOLAEV Y. H., TERLETSKII Y. P.** Revue des grandes écoles, série physique, n°5, 1974, p. 151

5- **HILL E.** Phys. Rev., n° 11, 1945, p. 53

6- **KOTTLER F., PHYSYK ZEITSHER, T.** .XXII, n°9, 1921, p. 274

7- **LASS H. A.,** Am. Journal of physic, 31, 1963, p. 274

8- **LANDAU L. D., LIFCHITZ E. M.** Théorie des champs, Editions MIR,1980

9- **MEKSYN D.,** Proc. Roy. Soc., A51, Edingburg, 1931, p. 71

10- **ROMAIN J. E.,** Rev. Mod. Phys.,35, 1963, p. 376

11- **SALIA R. N.** Les problèmes comntemporains de la gravitation. Recueil de travaux de la conférence soviétique sur la gravitation. T.2, 1967., p. 532 (en russe)

12- **SALIA R. N.** Communication de l'Académie des Sciences de l'URSS, T. 38, fascicule 1, n°45, 1965 (en russe)

13- **TAUB A.** Annals of Math., 1961, p.53
Whittaker E., Proc. Roy. Soc., A11, London, 1937, p. 720